

400GeV/c pp 碰撞多粒子产生的分形行为*

王韶舜 张杰 肖臣国 叶云秀 钟宇 李祖豪

(中国科学技术大学近代物理系 合肥 230027)

1993年7月27日收到

摘 要

对 400GeV/c pp 碰撞产生的带电粒子赝快度分布的实验数据用 G 矩方法进行了多重分形分析。在分割代数 ν 很小的情况下得到的广义维数是不同的 ($1 > D_0 > D_1 > D_2 \cdots$)；谱函数是光滑的，凹面向下，在 α_0 时为峰值；重新标度后的谱函数 $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 在 $\bar{\alpha}_q \leq 1$ 时具有普适性。这些结果与其它实验是一致的。

关键词 多重分形矩, 赝快度分布, 广义维数, 谱函数, 自相似级联。

1 引 言

近年来, 在高能碰撞多重产生机制问题的研究中观察到许多小快度间隔内有大量粒子的事例。这种大的粒子数密度的涨落有统计的因素, 也有动力学的因素。Bialas 和 Peschanski^[1] 采用标度阶乘矩的方法来消除统计涨落的影响, 突出内在的动力学起伏现象。如果存在动力学起伏, 则标度阶乘矩随相空间(例如赝快度空间)间隔大小的减小呈指数规律增长, 即

$$\langle F_q \rangle \approx (\delta\eta)^{\phi_q}, \quad (1)$$

其中 $\langle F_q \rangle$ 为 q 级标度阶乘矩, $\delta\eta$ 是赝快度子区间间隔的大小, ϕ_q 称为间歇指数, 它与广义(分形)维数 D_q 有关。这种广义维数通常在经典的混沌系统中是描述分形和多重分形性质的。如文献[2]指出

$$D_q = 1 - \frac{\phi_q}{q-1}, \quad (2)$$

其中

$$\frac{\phi_q}{q-1} = d_q, \quad (3)$$

称为反常分形维数。

* 国家自然科学基金资助。

标度阶乘矩的分析已经被许多实验组作出,证实了高能碰撞多粒子产生过程具有分形的性质。但是标度阶乘矩的矩阶数是正整数 ($q \geq 2$),因此只能得到 $q \geq 2$ 的广义维数,而不能得到 D_0 和 D_1 两种重要的维数。为了能得到这两种重要的维数, Hwa 提出了 G 矩分析方法^[3]。这种方法能得到各种类型的维数,因而能用来研究系统的多重分形结构。我们利用 CERN NA27 合作组提供的 LEBC 照片,测量了 $400\text{GeV}/c$ pp 碰撞产生的带电粒子赝快度分布,并利用 G 矩分析了 pp 碰撞多粒子产生过程的分形性质,得到与其它实验相类似的结果^[4]。

2 多重分形的概念

为了研究高能碰撞多粒子产生中的分形结构, Hwa 提出了 G 矩分析方法。令赝快度区间 $\Delta\eta$ 划分成 M 个同样宽度 $\delta\eta = \Delta\eta/M$ 的子区间,如果 N 是一个事例在 $\Delta\eta$ 范围内的粒子数, K_m 是第 m 个子区间内的粒子数,则多重分形矩 G_q 定义如下:

$$G_q = \sum_{m=1}^{M'} \left(\frac{K_m}{N} \right)^q = \sum_{m=1}^{M'} P_m^q, \quad (4)$$

其中 $P_m = \frac{K_m}{N}$, q 是矩的阶数,它可以是正的、负的和非整数实数。撇号表示求和不包括空的子区间。(4)式所示的 G_q 矩给出了一个事例的水平分析,为了增加统计性,上述水平分析的 G_q 矩需要对所有的事例求平均。如果多粒子产生过程具有自相似行为,则当 $\delta\eta \rightarrow 0 (M \rightarrow \infty)$ 时有

$$G_q \approx (\delta\eta)^{\tau(q)} \approx M^{-\tau(q)}. \quad (5)$$

一旦 $\tau(q)$ 决定后,按多重分形理论^[5],谱函数 $f(\alpha_q)$ 可通过 Legendre 变换而得到,即

$$f(\alpha_q) = q\alpha_q - \tau(q), \quad (6)$$

其中

$$\alpha_q = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (7)$$

由于

$$\frac{df(\alpha_q)}{d\alpha_q} = q, \quad \frac{d^2f(\alpha_q)}{d\alpha_q^2} < 0, \quad (8)$$

可知 $f(\alpha_q)$ 是一光滑的函数,凹面向下,在 $q = 0$ 时达到峰值,即 $f(\alpha_q) < f(\alpha_0)$ 。实际上,谱函数 $f(\alpha_q)$ 对多重数分布的涨落给出了定量的描述,即赝快度空间分布稠密区域与稀疏区域分别对应于 $f(\alpha_q)$ 的 $q > 0$ 和 $q < 0$ 部分。而 $f(\alpha_0) < 1$ 则是空子区间数的一种测量。任何分形测量的最基本性质是它的维数。广义维数与 $\tau(q)$ 之间有如下的关系:

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta\eta \rightarrow 0} \frac{\ln G_q}{\ln \delta\eta}. \quad (9)$$

其中 $D_0 = f(\alpha_0)$ 称为分形维数;

$D_1 = f(\alpha_1) = \alpha_1$ 称为信息维数;

$D_2 = 2\alpha_2 - f(\alpha_2)$ 称为关联维数.

上面讨论的结果是从 $\delta\eta \rightarrow 0$ 的数学极限推导得到的. 实际上只有在 $N \rightarrow \infty$ 时才成立. 对于有限的粒子数 N , $\delta\eta \rightarrow 0$ 的数学极限是不可能实现的. 因为随着 $\delta\eta$ 的减小, 每个子区间的粒子数不是 1 就是零, 这时 G_q 矩变成

$$G_q \approx N^{1-q}, \quad (10)$$

而与 $\delta\eta$ 无关. 即 G_q 矩的标度性消失了. 因此多粒子产生的分形结构问题不同于几何的和统计的情况. 为了得出多粒子产生过程的分形性质, 只考虑 M 不大的区域. 如果得到的谱函数具有(8)式所描述的性质, 则多粒子产生过程的分形结构认为是可能存在的.

由于所测量的事例多重数有限, 需要对大量事例求平均, 以增加结果的可靠性. 通常不对 G_q 求平均, 而是对 $\ln G_q$ 求平均, 即

$$\langle \ln G_q \rangle = \frac{1}{N_{\text{event}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{event}}} (\ln G_q)_i. \quad (11)$$

令 $M = 2^v$, 并按下列公式计算 $\langle \tau(q) \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \tau(q) \rangle &= - \frac{\Delta \langle \ln G_q \rangle}{\Delta(\ln M)} \\ &= - \frac{\Delta \langle \ln G_q \rangle}{\Delta v \ln 2}. \end{aligned} \quad (12)$$

进一步有

$$\langle \alpha_q \rangle = \frac{d \langle \tau(q) \rangle}{dq}. \quad (13)$$

$$\langle f(\alpha_q) \rangle = q \langle \alpha_q \rangle - \langle \tau(q) \rangle. \quad (14)$$

$$D_q = \frac{\langle \tau(q) \rangle}{q-1}. \quad (15)$$

3 实验结果

利用 CERN NA27 合作组提供的 LEBC 泡室照片对 400GeV/c pp 碰撞产生的带电粒子径迹进行了空间几何重建. 共重建了 3364 个事例, 其中多重数 $n \geq 10$ 的事例为 2026 个. 计算了这些事例的赝快度分布. 赝快度的测量精度在感兴趣的赝快度窗口 ($-2 \leq \eta \leq 2$) 内为 0.1. 测量方法详见参考文献[6].

根据(4)式和(11)式计算了 $\langle \ln G_q \rangle$ 随 $\ln M$ 的变化. 其中 q 的变化范围从

-6.0 到 6.0, 步长为 0.5, 但在 $-1.0 < q < 1.0$ 之间, 步长为 0.1. 图1(a)-(c)指出 $\langle \ln G_q \rangle$

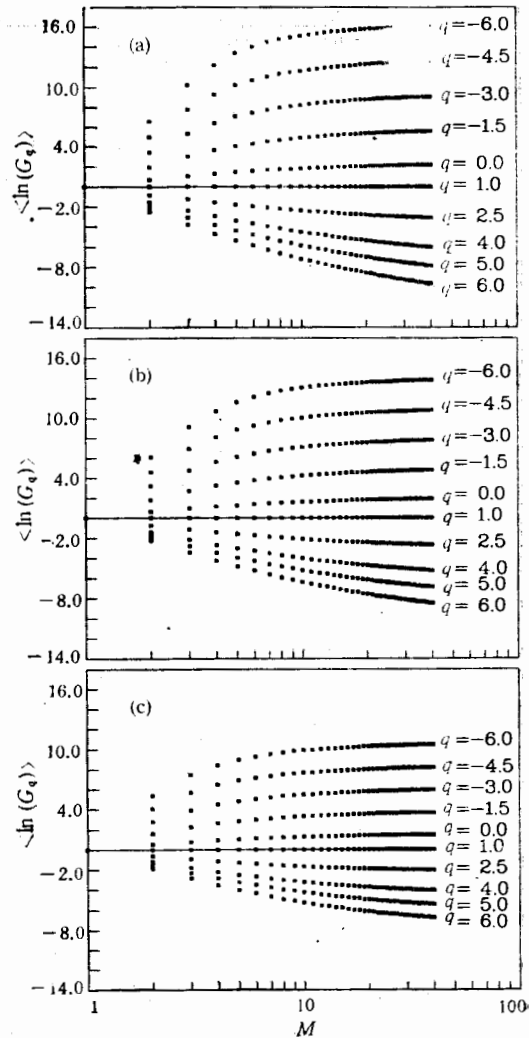


图1 $\langle \ln G_q \rangle$ 随区间数 M 的变化
(a) $n \geq 10$ 的事例, (b) $n = \text{all}$ 事例, (c) $n \leq 8$ 事例

随 $\ln M$ 的变化,在图中只对 q 为某些代表性值作图。

由图 1 可见,饱和行为对三种情况均存在,而且随平均多重数的减小,饱和开始得越早。因此只有在 ν 很小时,才能观察多重分形行为。由(12)式分别计算 $\nu = 0-1$ 和 $1-2$ 时 $\langle \tau(q) \rangle$ 随 q 的变化,并由(15)式计算 D_q 随 q 的变化。计算结果示于图 2 中。

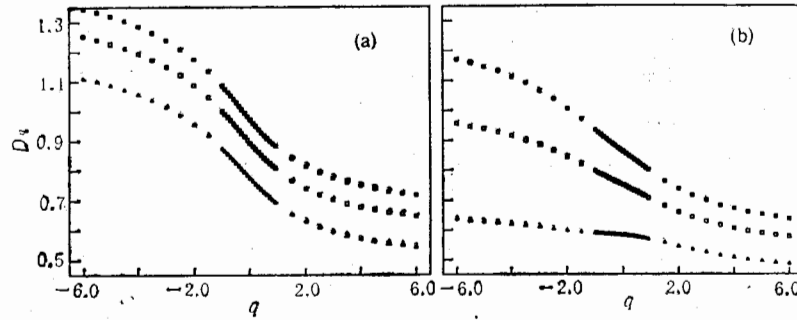


图 2 广义维数 D_q 随矩阶数 q 的变化

(a) $\nu = 0-1$ 情况, (b) $\nu = 1-2$ 情况

■ 事例多重数 $n \geq 10$; □ 全部事例; ▲ 多重数 $n \leq 8$ 的事例

由图 2 可见,随着平均多重数的减小, D_q 的数值也相应减小; $\nu = 1-2$ 时的 D_q 值比 $\nu = 0-1$ 时的相应值要小。 D_q 随 q 的增加而减小的行为与多重分形级联模型的预言是一致的。表 1 是计算得到的分形维数 D_0 , 信息维数 D_1 和关联维数 D_2 的数值。

表 1 不同条件下获得的广义维数的数值

$M = 2^\nu$	多重数	分形维数 $D_0 = \langle f(\alpha_0) \rangle$	信息维数 $D_1 = \langle f(\alpha_1) \rangle = \langle \alpha_1 \rangle$	关联维数 $D_2 = 2\langle \alpha_2 \rangle - \langle f(\alpha_2) \rangle$
$\nu = 0-1$	$n \geq 10$	0.971 ± 0.004	0.862 ± 0.004	0.813 ± 0.005
	$n = \text{all}$	0.892 ± 0.005	0.787 ± 0.005	0.740 ± 0.006
	$n \leq 8$	0.774 ± 0.011	0.674 ± 0.010	0.629 ± 0.010
$\nu = 1-2$	$n \geq 10$	0.860 ± 0.005	0.781 ± 0.006	0.737 ± 0.006
	$n = \text{all}$	0.749 ± 0.007	0.693 ± 0.007	0.660 ± 0.007
	$n \leq 8$	0.582 ± 0.013	0.561 ± 0.012	0.543 ± 0.012

已知 $\langle \tau(q) \rangle$ 随 q 的变化,可根据(13)式和(14)式计算 $\langle \alpha_q \rangle$ 和 $\langle f(\alpha_q) \rangle$, 其结果示于图 3 中。在图中也画出 $\langle f(\alpha_q) \rangle = \langle \alpha_q \rangle$ 的直线,所有的谱函数 $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 在 $\langle \alpha_1 \rangle$ 时与此直线相切,这是多重分形的一个普遍的性质^[7]。

由图 3 可见,对于所有的情况,谱函数 $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 是光滑的、凹面向下,在 $\langle \alpha_0 \rangle$ 时达到极大值,表明不同事例产生粒子的赝快度分布是不均匀的。另外随着平均多重数的减小, $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 的分布宽度减小,峰值也减小即移向较小的 $\langle \alpha_q \rangle$ 值。而当平均多重数固定时,随着赝快度窗口 ($\Delta \eta$) 的减小, $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 的宽度也减小,峰值也移向较小的 $\langle \alpha_q \rangle$ 值。这是可以理解的,因为随平均多重数的减小,空的子区间数增加,分形维数 $D_0 = \langle f(\alpha_0) \rangle$ 小于 1 的程度也越大,因而峰值移向 $\langle \alpha_q \rangle$ 值小的一侧。对图 3 作进一步观察发现,不同的情况引起谱函数 $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 的变化主要发生在谱的右翼,即 $q < 0$ 的一侧。为了使这种关系看得

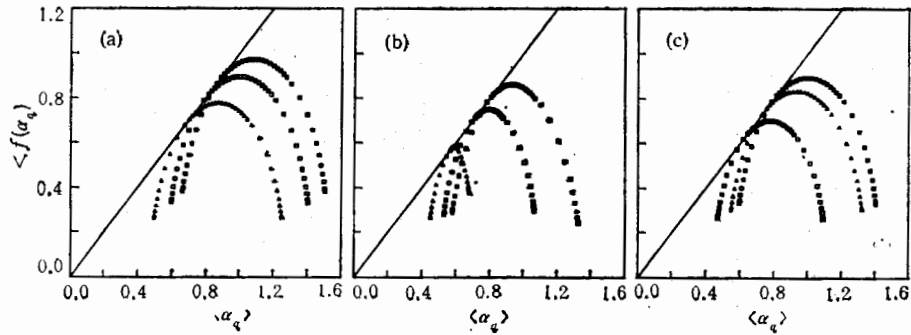


图 3 谱函数 $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 随 $\langle \alpha_q \rangle$ 的变化

(a) $\nu = 0-1$, $\blacksquare n \geq 10$ 的事例, $\square n = \text{all}$, $\blacktriangle n \leq 8, \Delta\eta < 4$; (b) $\nu = 1-2$, $\blacksquare n \geq 10$ 的事例, $\square n = \text{all}$, $\blacktriangle n \leq 8, \Delta\eta < 4$; (c) $\nu = 0-1, n = \text{all}$, $\blacksquare \Delta\eta < 4$, $\blacktriangle \Delta\eta < 3$, $\square \Delta\eta < 2$

更清楚,对 $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 按以下方式重新标度^[9]:

$$\bar{\alpha}_q = \langle \alpha_q \rangle / \langle \alpha_1 \rangle \tag{16}$$

和

$$\bar{f}(\bar{\alpha}_q) = \langle f(\alpha_q) \rangle / \langle f(\alpha_1) \rangle = \langle f(\alpha_q) \rangle / \langle \alpha_1 \rangle. \tag{17}$$

图 4 是重新标度后 $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 随 $\bar{\alpha}_q$ 变化的情况,图 4(a)–(c) 分别与图 3(a)–(c) 相对应。由图 4 可见,当 $\bar{\alpha}_q \leq 1$ 时,所有的谱函数 $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 都是相符的,这是 $q > 1$ 时多重分形结构普适性的一种形式。但是当 $\bar{\alpha}_q > 1$ (即 $q < 1$) 时,这种普适性不再保持,特别是对于 $\nu = 1-2$ 的情况,平均多重数不同时差别较大。当平均多重数相同时,对于不同的赝快度窗口, $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 随 $\bar{\alpha}_q$ 的变化差别不大。在图 5 中把图 4 的三张图画在一起,这时所有的 $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 曲线在 $\bar{\alpha}_q \leq 1$ 区域重叠得很好,而在 $\bar{\alpha}_q > 1$ ($q < 1$) 区域则差别较大。表明如果多重分形谱函数用 $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 来表示时,则对于不同的平均多重数和不同的赝快度窗口在 $\nu = 0-1$ 和 $1-2$ 时计算结果是一致的,即当 $\bar{\alpha}_q \leq 1$ 时, $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 具有普适性。

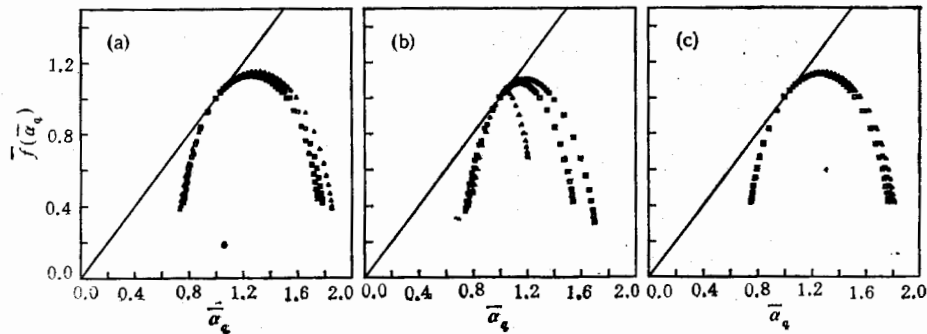


图 4 重新标度后谱函数 $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 随 $\bar{\alpha}_q$ 的变化

(a) $\nu = 0-1$, $\blacksquare n \geq 10$ 的事例, $\square n = \text{all}$, $\blacktriangle n \leq 8, \Delta\eta < 4$; (b) $\nu = 1-2$, $\blacksquare n \geq 10$ 的事例, $\square n = \text{all}$, $\blacktriangle n \leq 8, \Delta\eta < 4$; (c) $\nu = 0-1, n = \text{all}$, $\blacksquare \Delta\eta < 4$, $\blacktriangle \Delta\eta < 3$, $\square \Delta\eta < 2$

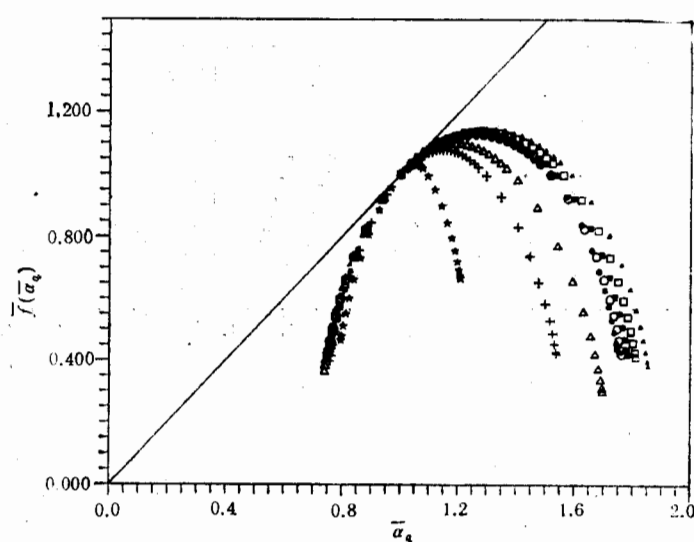


图5 $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 随 $\bar{\alpha}_q$ 的变化(包括图4中的所有曲线)

4 总结与讨论

对 400GeV/c pp 碰撞产生的带电粒子赝快度分布进行了测量。用 G 矩方法进行了多重分形分析,在分割代数 ν 很小的情况下得到的广义维数是不同的 ($1 > D_0 > D_1 > D_2 \dots$),谱函数 $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 随 $\langle \alpha_q \rangle$ 的变化是光滑的、凹面向下、在 $\langle \alpha_0 \rangle$ 时达到极大值的性质是与分形理论的预言相符的。

D_q 和 $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 与事例的平均多重数和相空间区间有关。 D_q 随平均多重数的减小而减小, $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 的宽度随平均多重数的减小而变窄,峰值移向较小的 α_q 值。当平均多重数保持不变时,谱函数 $\langle f(\alpha_q) \rangle$ 随赝快度窗口的减小而变窄,峰值移向较小的 α_q 值。重新标度后的谱函数 $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ 在 $\bar{\alpha}_q \leq 1$ 时具有普适性,即与平均多重数和赝快度窗口的大小近似无关。比较 $\nu = 0 - 1$ 和 $\nu = 1 - 2$ 时的结果表明 G_q 矩在分割代数较小时存在标度行为,这与多粒子产生过程具有自相似级联的性质相符。

由 F_q 矩分析^[9]和由 G_q 矩分析得到的广义维数是不同的,其原因并非十分清楚。很可能是由于分析的区域不同,因为 G_q 矩分析限于 $\delta\eta \geq 1$ 区间而 F_q 矩分析限于 $1 > \delta\eta > 0.1$ 区间。另外实验数据包含统计涨落和动力学涨落, F_q 矩能抑制统计涨落的影响而 G_q 矩则没有。如何消除统计涨落的影响,如何清楚地和定量地确立间歇与多重分形之间的关系是一个尚待解决的问题。在分割代数很小的情况下用 G_q 矩方法分析能否得到多粒子产生过程中的多重分形性质是一个需要探讨的问题。

作者对 CERN NA27 合作组提供 LEBC 泡室照片深表感谢。

参 考 文 献

- [1] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B273**(1986) 703; **B308**(1988) 857.
 [2] P. Lipa and B. Buschbeck, *Phys. Lett.*, **B223**(1989) 465.
 [3] R. C. Hwa, *Phys. Rev.*, **D41**(1990) 1456.
 [4] C. Albajar et al., *Z. Phys. C* **56**(1992) 37; D. Ghosh et al., *Phys. Rev.*, **D46**(1992) 3712; R. K. Shivpuri and V. K. Verma, *Phys. Rev.*, **D47**(1993) 123.
 [5] T. C. Halsey et al., *Phys. Rev.*, **A33**(1986) 1141; T. C. Halsey and M. H. Jensen, *Physica* **D23**(1986) 112; G. Paladin and A. Vulpiani, *Phys. Rep.*, **156**(1987) 147.
 [6] 王韶舜等, 高能物理与核物理, **15**(1991)1057.
 [7] C. B. Chiu and R. C. Hwa, *Phys. Rev.*, **D43**(1991)100.
 [8] C. B. Chiu and R. C. Hwa, *Phys. Rev.*, **D45**(1992) 2276.
 [9] 王韶舜等, 高能物理与核物理, **18**(1994) 970.

Fractal Behavior of Multiparticle Production in pp Collisions at 400GeV/c

Wang Shaoshun Zhang Jie Xiao Chenguo
 Ye Yunxiu Zhong Yu Li Zuhao

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Received on July 27, 1993

Abstract

Using G-moment method, the multifractal analysis has been performed for the experimental data of the pseudorapidity distributions of charged particles produced in pp collisions at 400 GeV/c. While the splitting steps are small, the obtained generalized dimensions D_q are different ($1 > D_0 > D_1 > D_2 \dots$); the spectral functions $f(\alpha_q)$ are smooth, downward concave with a peak at α_0 ; the rescaled spectral functions $\bar{f}(\bar{\alpha}_q)$ possess universality in the region of $\bar{\alpha}_q \leq 1$. These results are consistent with other experiments.

Key words multifractal moment, pseudorapidity distribution, generalized dimension, spectral function, self-similar cascade.