

快度中心区强子物质输运系数和 粘滞流体演化*

张晓飞 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

1992年7月20日收到

摘 要

用 Chapman-Enskog 方法计算了相对论性重离子碰撞快度中心区产生的 π 介子物质的输运系数,并建立了相应的粘滞流体力学方程,进而讨论了粘滞对 π 介子物质演化过程的影响。结果表明,粘滞将减缓快度中心区 π 介子物质的冷却速度。

关键词 输运系数,粘滞流体,Chapman-Enskog 方法。

1 引 言

相对论性重离子碰撞的软过程可以产生高温高密物质,在温度足够高时是夸克胶子等离子体,在温度低于退禁闭相变温度时是强子物质,人们对高温高密物质在热力学平衡态时的性质已作了较深入的研究^[1]。但近几年来人们逐渐认识到,没有理由假设碰撞后产生的高温高密物质能立即达到局域平衡,非平衡输运过程也应该是很重要的^[2,3]。在这篇工作中,要讨论的是相对论性重离子碰撞中生成于快度中心区的强子物质的输运问题。

研究非平衡输运过程的主要任务之一就是计算其输运系数。关于强子物质的输运系数已有若干工作,有作者用 Kubo 方法计算了高温胶子相和低温胶子球相的输运系数^[4],以及用弛豫时间近似讨论了 π 介子物质的输运系数^[5]。在这篇工作中比较严格地在相对论动力学框架下,运用 Chapman-Enskog 方法^[6]求得了快度中心区 π 介子物质的输运系数,并建立了相应的粘滞流体力学方程,分析了有关物理量的演化图象。

2 输 运 系 数

相对论性重离子碰撞过程中产生于快度中心区的强子物质主要是由 π 介子组成的。处于非平衡态的 π 介子物质内存在着温度、压强、流体四速度等物理量的梯度,即存在着

* 国家自然科学基金资助。

热力学力。这必然导致能量动量等热力学量的输运,这主要是热流和粘滞压力张量。

目前,热力学能较好处理的是当系统偏离平衡态不很远时的情况。这时,热力学流和热力学力间的线性关系是很好的近似,输运系数是二者的比值。按定义,热力学力可表示为

$$X = -\nabla^\mu u_\mu, \quad (2.1)$$

$$X_q^\mu = \nabla^\mu \log T - T \nabla^\mu \log P, \quad (2.2)$$

$$\hat{X}^{\mu\nu} = \left(\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\sigma\tau} \right) \nabla^\sigma u^\tau, \quad (2.3)$$

其中 T, P 和 u 分别是温度、压强和流体力学四速度,且

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu, \quad (2.4)$$

$$\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad (2.5)$$

热力学流则可表示为系统单粒子分布函数的矩,为此需从有相互作用的标量场的一般拉氏量出发,推得 π 介子物质的单粒子分布函数满足的 Boltzman 方程,即

$$p^\mu u_\mu Df = -p^\mu \nabla_\mu f + C[f, f], \quad (2.6)$$

其中定义

$$\partial^\mu = u^\mu D + \nabla^\mu, \quad (2.7)$$

$$D = u^\nu \partial_\nu, \quad (2.8)$$

且

$$C[f, f] = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p'}{p'^0} \frac{d^3 p'_1}{p'_1{}^0} (f' f'_1 - f f_1) \\ \times W(p', p'_1 | p, p_1), \quad (2.9)$$

$W(p', p'_1 | p, p_1)$ 为跃迁几率。

若按照 Chapman-Enskog 方法把分布函数在局域平衡附近展开

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \dots, \quad (2.10)$$

$$Df = \epsilon (Df)^{(1)} + \epsilon^2 (Df)^{(2)} + \dots. \quad (2.11)$$

则代入方程(2.6)可得迭代方程

$$0 = C[f^{(0)}, f^{(0)}],$$

$$p^\mu u_\mu (Df)^{(r)} = -p^\mu \nabla_\mu f^{(r-1)} + \sum_{s=0}^r C[f^{(s)}, f^{(r-s)}]. \quad (2.12)$$

其中 $f^{(0)}$ 为局域平衡时的分布函数,即

$$f^{(0)}(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp\left(\frac{\mu(x) - p^\mu u_\mu(x)}{T(x)}\right). \quad (2.13)$$

从迭代方程出发得到的解显然是热力学量 $T(x), p(x), u(x)$ 和化学势 $\mu(x)$ 以及它们的梯度的函数。因而对于一级近似,若令

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = f^{(0)}(1 + \phi), \quad (2.14)$$

则 ϕ 可表示为热力学力的线性组合

$$\phi = AX - B_\mu X_q^\mu + C^{\mu\nu} \hat{X}_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

按定义,热流 I_q^μ 和粘滞压力张量 $\Pi^{\mu\nu}$ 可分别用一级近似的单粒子分布函数的矩表示

$$I_q^\mu = \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu (p^\nu u_\nu - \hbar) f^{(0)} \phi, \quad (2.16)$$

\hbar 为单粒子的焓.

$$\Pi^{\mu\nu} = \hat{\Pi}^{\mu\nu} - \Pi \Delta^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p}{p^0} \left(\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu - \frac{1}{3} \Delta_{\sigma\tau} \Delta^{\mu\nu} \right) p^\sigma p^\tau f^{(0)} \phi, \quad (2.18)$$

$$\Pi = -\frac{1}{3} \int \frac{d^3p}{p^0} \Delta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu f^{(0)} \phi. \quad (2.19)$$

考虑到(2.15)–(2.19),最终可得到热力学力和热力学流的关系为

$$I_q^\mu = \lambda \left(\nabla^\mu T - \frac{T}{\hbar n} \nabla^\mu p \right), \quad (2.20)$$

$$\lambda = \frac{-3[\gamma/(\gamma-1)]^2}{[\tau \Pi_\mu, \tau \Pi_\mu^-] \sigma(T)}, \quad (2.21)$$

λ 即为热传导系数;

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu} = 2\eta \overset{\circ}{\nabla}^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

$$\eta = \frac{10T\hbar^2}{\sigma(T) [\overset{\circ}{\Pi}^\mu \overset{\circ}{\Pi}^\nu, \overset{\circ}{\Pi}_\mu \overset{\circ}{\Pi}_\nu]}, \quad (2.23)$$

η 即为切向粘滞系数;

$$\Pi = -\eta_\nu \nabla^\mu u_\mu, \quad (2.24)$$

$$\eta_\nu = \frac{[(5-3\gamma)\hbar - 3\gamma]^2}{\sigma(T) [\tau^2, \tau^2]}, \quad (2.25)$$

η_ν 即为体积粘滞系数. 其中, $\tau = p^\mu u_\mu / T$, $\Pi^\mu = p^\mu / T$, $Z = T/m$, $\hbar = m \frac{K_3(z)}{K_2(z)}$, $\frac{\gamma}{\gamma-1} = z^2 - 5\hbar - \hbar^2$, K_1, K_2 是第二类变形贝塞尔函数. 并且定义了

$$\Pi^\mu = \Delta_\nu^\mu \Pi^\nu, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Pi}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\Delta_\sigma^\mu \Delta_\tau^\nu + \Delta_\sigma^\nu \Delta_\tau^\mu) \Pi^\sigma \Pi^\tau \\ &\quad - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\sigma\tau} \Pi^\sigma \Pi^\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

表达式中 $\sigma(T)$ 是特征散射截面,它是在热能为 kT 时的二体散射截面,并且忽略了三种 π 介子的差别. 用 σ 模型的相互作用拉氏量密度 $\mathcal{L}_1 = \frac{\lambda}{4} \phi^4$, 取 $\lambda = 8$, 在树图近似下得到, $\sigma(T) = \left(\frac{\lambda}{4} \times 4! \right)^2 / (16 \times (2\pi)^2 T^2)$.

计算输运系数最关键的步骤是计算式(2.21), (2.23), (2.25)分母中的碰撞括号, 其一

般表达式为

$$[F, G] = \frac{1}{2T^6 [4\pi Z^2 K_2(Z)]^2 \sigma(T)} \int \frac{d^3 p d^3 p_1 d^3 p' d^3 p'_1}{p^0 p_1^0 p'^0 p_1'^0} \times e^{-\epsilon - \tau_1} (F + F_1 - F' - F'_1) GW(p', p'_1 | p, p_1). \quad (2.28)$$

碰撞括号含有十二重积分, 它的计算比较复杂, 可通过下式化为二重积分:

$$J^{(a, b, d, e, f)} = \frac{\pi(d+e-1)! (2Z)^{2(a+f+2)}}{[Z^2 K_2(Z)]^2} \times \int_1^\infty dy y^{2a-(d+e)+1} (y^2-1)^{\frac{d+c}{2}+f+1} \sigma^{(d, e, f)}(2Zy) \times \sum_{h=0}^{[b/2]} (-1)^h (2h-1)! \binom{b}{2h} (2Zy)^{\frac{d+c}{2}+b-h+1} K_{\frac{d+e}{2}+b-h+1}(2Zy), \quad (2.29)$$

$$\sigma^{(d, e, f)}(2Zy) = \frac{1}{4\sigma(T)} \int_{-1}^1 dx \left[1 - (d+e+1) \sum_{g=0}^{\min(d, e)} (2g+1) K(d, e, g) x^g p_g(x) \right] \sigma(2my, x), \quad (2.30)$$

其中

$$p = 2my, \quad p^\mu = p^\mu + p_1^\mu, \quad p = \sqrt{p^\mu p_\mu}. \quad (2.31)$$

若再利用贝塞尔函数的性质

$$K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} K_n(x). \quad (2.32)$$

计算积分(2.28)式, 则最后得到

$$\eta_\nu = \frac{[(5-3\gamma)h - 3\gamma]^2 Z^4 K_2(Z)}{8\pi\sigma(T)[(Z^2-2)K_2(2Z) + Z^3 K_3(2Z)]}, \quad (2.33)$$

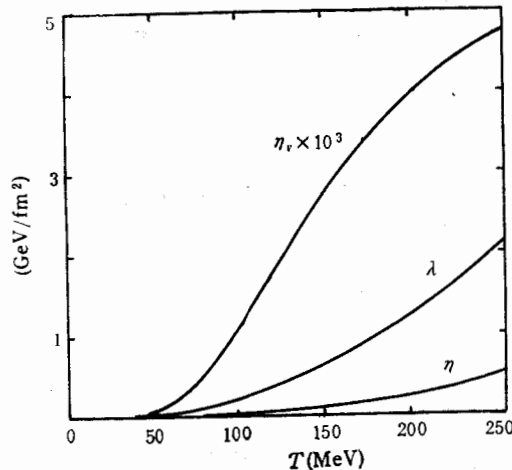


图 1

$$\lambda = \frac{3Z^4 K_2^2(Z) [\gamma/(\gamma-1)]^2}{8\pi\sigma(T) [(Z^2-2)K_2(2Z) + Z^3 K_3(2Z)]}, \quad (2.34)$$

$$\eta = \frac{15Z^4 K_3^2(Z) \hbar^2}{8\pi\sigma(T) [K_3(2Z)(Z+3Z^3) + (2Z^2-2)K_2(2Z)]}. \quad (2.35)$$

显然,这些运输系数都是温度的函数,图1给出了具体数值结果。

计算结果表明,体积粘滞系数分别和热传导系数、切向粘滞系数相比都很小。我们得到的运输系数的量级和文献[4],[5]是一致的,大小在二者之间。

3 粘滞流体力学

和 Boltzman 方程相应的能量动量守恒方程和粒子数守恒的方程被称为流体力学方程。如果要认识在输运过程中物理量的演化,则更方便的是从流体力学方程出发。在这一节中,将建立在 Chapman-Enskog 一级近似下的粘滞流体力学方程,并讨论快度区温度和熵的演化。

对于快度中心区,相应的流体力学方程是能量动量守恒方程,即

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.1)$$

其中能量动量张量可表示为分布函数的二次矩

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu p^\nu f(x, p). \quad (3.2)$$

并且若采用 Landau-Lifshitz 流体四速度的定义

$$u^\mu = T^{\mu\nu} u_\nu / u_\rho T^{\rho\sigma} u_\sigma, \quad (3.3)$$

则 $T^{\mu\nu}$ 可表示为

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu - P \Delta^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

其中 ϵ 为单粒子能量, n 为粒子数密度, $\Pi^{\mu\nu}$ 是前面讨论过的粘滞压力张量。

用 u^ν 缩并(3.1)式得到

$$D\epsilon n = -hn \nabla_\mu u^\mu + \Pi^{\mu\nu} \nabla_\nu u_\mu, \quad (3.5)$$

其中 $\epsilon = \epsilon n$, $hn = \epsilon + P$ 。

利用(2.24)得到

$$D\epsilon n = -(\epsilon + P) \nabla_\mu u^\mu + \eta_\nu \nabla^\mu u_\mu \Delta^{\mu\nu} \nabla_\nu u_\mu + 2\eta \frac{\circ}{\nabla^\mu u^\nu \nabla_\nu u_\mu}, \quad (3.6)$$

按 Bjorken 快度中心区的假设^[7]有

$$u^\mu = x^\mu / \tau, \quad u^\mu \partial_\mu = \frac{d}{d\tau}. \quad (3.7)$$

τ 为固有时。

注意到(2.5)和(2.8)式后,(3.6)式变形为

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -(\epsilon + P)/\tau + \left(\frac{4}{3}\eta + \eta_\nu\right)/\tau^2, \quad (3.8)$$

这便是 Chapman-Enskog 一级近似下相应于快度中心区强子物质的粘滞流体力学方

程。

仅有流体力学方程是不完备的, 它必须和一定的状态方程联立才能求解。这里要知道的只是 ε 和 P 的关系, 即平衡态时二者的关系^[6]

$$P = nT, \quad (3.9)$$

$$e = mK_3(Z)/K_2(Z) - T, \quad (3.10)$$

$$n = 4\pi m^2 T \exp(\mu/T)/(2\pi)^3. \quad (3.11)$$

这里 K_2, K_3 为第二类贝塞尔函数。在零质量极限下它们转化为通常的理想流体的状态方程, 即 $P = \frac{1}{3} \varepsilon$ 。

利用流体力学方程和物态方程原则上可以讨论任何热力学量的演化过程。对于快度中心区高温高密的强子物质, 人们特别关心的是温度演化, 为此把(3.9—3.11)代入(3.8)式得

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{[1/(\gamma - 1) + e^2/T^2]} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \eta_\nu \right) / n\tau^2 - (e + T)/\tau \right]. \quad (3.12)$$

给定一定的初始条件便可求得方程(3.12)的数值解, 从而给出热密物质的温度演化过程, 我们在下一节将具体讨论这一问题。

熵增是非平衡耗散过程的重要特征, 而且熵也是系统自由度激发的表征, 它和实验观测未态的粒子多重数密切相关, 因而讨论熵产生是重要的。

在非平衡过程中, 熵不再守恒, 为讨论熵的演化, 定义

$$\sigma = \partial^\mu S_\mu, \quad (3.13)$$

其中 S_μ 是熵流, 显然系统处于平衡态时 $\sigma = 0$ 。

对于非平衡态, 把(2.14)式代入熵流以下定义式

$$S^\mu = \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu f(x, p) [\log f(x, p) - 1], \quad (3.14)$$

得到

$$\sigma = \frac{1}{T} \Pi^{\mu\nu} \nabla_\mu u_\nu + \frac{1}{\varepsilon + p} I_q^\mu \nabla_\mu \frac{\mu}{T}. \quad (3.15)$$

再利用(3.7)式后, 有

$$\frac{dS}{d\tau} = \left(\frac{4}{3} \eta + \eta_\nu \right) / (\tau^2 T) - S/\tau. \quad (3.16)$$

下一节, 我们也将一定的初始条件下, 求解方程(3.16), 从而讨论熵增。

4 粘滞效应

粘滞流体力学方程(3.12)和熵增方程(3.16)反映了粘滞性对系统演化过程的影响。以下将具体讨论方程(3.12)和(3.16)的数值解, 并和理想流体的相应结果比较, 以便清楚地看出粘滞效应。

首先, 我们讨论求解方程的初始条件。由于 Chapman-Enskog 方法讨论的是偏离局

域平衡不很远的情况,所以作为一般性估计,相应的初始温度的最大值应取接近退禁闭的临界温度,通常取 $T_c = 200\text{MeV}$. 这是因为若超过这个温度,系统则不是处于强子相,而是处于夸克、胶子等离子体相.

对于初始时刻 τ_0 的选取,正如文献[4]指出,它应满足

$$\tau_0 > \frac{4}{3} \eta / (\varepsilon + P). \quad (4.1)$$

一般来说,系统要经过一个 $\tau_0 \approx 1/\sigma n$ 的演化时间才能过渡到近局域平衡,我们按第一节讨论取 $\sigma(200\text{MeV}) \approx 2.6\text{fm}^2$, 根据(3.11)式,计算得到粒子数密度 $n(200\text{MeV}) \approx 0.1\text{fm}^{-3}$, 所以不妨取 $\tau_1 \approx 4.5\text{fm}$. 显然它满足(4.1)式.

利用上述初始条件和方程(3.12),便可得到系统温度的演化图像(图2). 曲线 b 和 c 表示了方程(2.14)的数值解,曲线 a 是相应条件下理想流体的解. 方程中的运输系数采用了第一节中得到的结果. 图中 140MeV 是流体碎裂到单个 π 介子时的温度^[9]. b 和 c 的差别是所取 π 介子物质的化学势不同. 曲线 c 相应于化学势 $\mu = 0$, 曲线 b 相应于 $\mu = 0.73T$. 这样处理在于文献[9]指出相对论性重离子碰撞产生的 π 介子物质可能有非零的化学势,例如 $T = 165\text{MeV}$, $\mu = 120\text{MeV}$.

比较图 2 中的曲线 a、b、c, 可以看出由于粘滞的存在,快速中心区的 π 介子物质的冷却速度减缓了. 比较曲线 b、c 还可以看出,当 π 介子化学势取非零值时,减缓压低. 显然,可以认为,从初始温度演化到碎裂温度 ($T_F \approx 140\text{MeV}$) 所经历的时间是热密物质的寿命. 因而,粘滞使 π 介子物质冷却速度减缓,也就意味着相对论性重离子碰撞产生的有粘滞性的热密物质的寿命比理想流体热密物质寿命长.

在给出方程(3.16)的数值解时,除需知道已确定的初始温度外,还需知道相应的初始时刻的熵,这可由下面热力学关系式确定

$$S = \frac{1}{T} (ne - \mu n) + n. \quad (4.2)$$

可见化学势不同,初始时刻的熵值不同. 由式(3.10),(3.11)和(4.2)得到 $\mu = 0$ 时, $S_0 =$

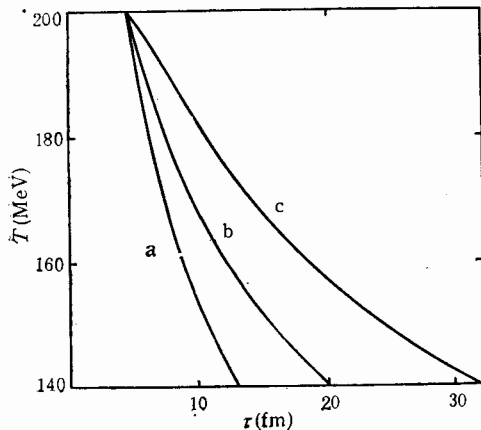


图 2

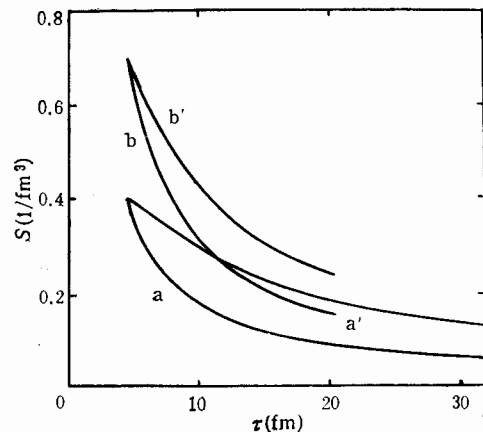


图 3

0.4; $\mu = 0.73T$ 时, $S_0 = 0.7$.

图 3 中 b 和 b' 皆是方程(3.16)的解, 前者对应于 $\mu = 0$, 后者对应于 $\mu = 0.73T$. a 和 a' 是相应初值下理想流体的结果.

从图中数据计算可得到, 在粘滞流体碎裂时, 粘滞流体的熵和同一时刻理想流体熵之比分别为: $\mu = 0$ 时, $S_b/S_a \approx 2$; $\mu = 0.73T$ 时, $S_{b'}/S_{a'} \approx 1.5$. 粘滞流体和理想流体同一时刻的熵差反映了熵增, 从而可见粘滞引起的熵增是比较重要的.

5 小 结

本文计算了相对论重离子碰撞生成的强子物质的输运系数, 进而得到在 Chapman-Enskog 一级近似下的粘滞流体力学方程和熵增方程. 运用 Bjorken 快度中心区的平台假设和相应的初始条件, 我们求得了方程的数值解, 并发现, 由于粘滞效应, 快度中心区 π 介子物质的冷却速度减缓了; 同时, 由不可逆过程引起的熵增是比较重要的.

参 考 文 献

- [1] 李家荣, 夸克物质理论导论, 湖南教育出版社, 1989.
- [2] Rudolph C. Hwa, ed., "QUARK-GLOUON PLASMA", World Scientific, 1990.
- [3] S. V. Ilyin, A. D. Panferov and YU. M. Sinyukov, *Phys. Lett.*, **B227**(1989) 455.
- [4] R. Horsley, and W. Schoenmaker, *Nucl. Phys.*, **B280**(1987) 716.
- [5] S. Gavin, *Nucl. Phys.*, **A435**(1985) 826.
- [6] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen, and Ch. G. van Weert, "Relativistic kinetic Theory", North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [7] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.*, **D27**(1983) 140.
- [8] L. D. Landau, Collected Papers of L. D. Landau 1965, p596, 665.
- [9] M. Kataja and P. V. Ruuskanen, *Phys. Lett.*, **B243**(1990) 181.

Transport Coefficients and Viscous Hydrodynamical Evolution of Hadron Matter in the Central Rapidity Region

Zhang Xiaofei Li Jiarong

(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

Received on July 20, 1992

Abstract

By using the Chapman-Enskog method, we calculate the transport coefficients of hadron matter in the central rapidity region for relativistic heavy-ion collisions, and establish the corresponding viscous hydrodynamical equation. The numerical solution of the equation shows that viscous effects slow down the cooling of pion matter in the central rapidity region.

Key Words Transport Coefficients, Viscous hydrodynamic Chapman-Enskog Method.