第18卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 3
1994年3月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 1994

# $U(N)\supset SP(N)\supset O(3)$ 的分支律*

王稼军[a,c] 孙洪洲[b,c]

a（北京大学物理系 北京 100871）
b（清华大学物理系 北京 100084）
c（中国科学院理论物理研究所 北京 100080）

1992年8月27日收到

**摘 要**

利用群的直乘分解公式，考虑 $U(N)$ 群的 $[2^a1^b]$ 表示按群链 $U(N)\supset SP(N)\supset O(3)$ 的约化规则，给出了相应的比较简单的分支律递推公式．该公式在用计算机计算分支律时，不受秩和表示维数的限制．为求解这类问题的分支律提供了一种比较简单的算法．在简化同位旋1/2的单 $j$ 费米子体系的母分系数计算中具有十分重要的意义．用同样的方法也可以求出群链 $U(N)\supset O(N)\supset O(3)$ 的分支律．

**关键词** 分支律，不可约表示，群链，母分系数．

## 1 引 言

在讨论同位旋1/2的单 $j$ 费米子体系波函数的分类以及计算相应的母分系数(CFP)时，给出群链

$$U(2N)\supset(U(N)\supset SP(N)\supset O(3))\otimes SU(2) \tag{1.1}$$

的约化规则——分支律是十分重要的．

关于计算分支律问题，以前有过许多卓有成效的研究成果，也有许多不同的求分支律的方法[1-3]，而且已经有一些计算结果发表[4,5]．从原则上讲，用舒尔函数等方法可以解决计算上述群链的分支律问题．但是当表示的秩和维数较高时，分支律的计算工作量很大，而且十分繁复．计算机的广泛应用使分支律的计算得到了发展，然而，由于计算机的舍人误差问题，使分支律的计算依然受到限制．在群链(1.1)中，当 $N$ 较大或相应表示的维数较大时，$U(N)\supset SP(N)\supset O(3)$ 的分支律尚无结果[4,5]．

然而，在实际应用时，往往需要解决这个问题，特别是在计算同位旋1/2的单 $j$ 费米子体系的母分系数时，利用分支律以及孙洪洲等提出的新母分系数递推公式[6,7]，可以使现有计算母分系数的程序[8]大大简化． 因此计算群链(1.1)的全部分支律变得更为重要了．

* 高等学校博士学科点专项科研基金及国家自然科学基金资助．

群链(1.1)中 $U(2N)\supset U(N)$ 的约化是众所周知的，但 $U(N)\supset SP(N)\supset O(3)$ 的约化是非简单可约的．考虑到同位旋 1/2 的 $U(N)$不可约表示的非零空间只能是 $[2^a1^b]$[9]，因此只需要讨论 $U(N)$ 的 $[2^a1^b]$ 表示的约化问题．基于上述考虑，利用全反对称表示的分支律公式[10]以及两个全反对称表示直乘分解公式[11]，在第二节中给出$U(N)\supset SP(N)$的分支律公式和计算实例，第三节中给出了 $SP(N)\supset O(3)$ 的分支律公式以及计算实例． 这两个公式均为解析递推公式，用这两个公式可以简便地计算 $U(N)\supset SP(N)\supset O(3)$的分支律，而且对$N$以及表示的维数没有限制．

## 2 $U(N)\supset SP(N)$的分支律公式

应用李群理论对 $U(N)$ 群可证明两个全反对称表示的直乘分解公式为[11]

$$[1^c]\otimes[1^a]=\begin{cases}[2^a1^{c-a}]+[2^{a-1}1^{c-a+2}]+\cdots+[1^{c+a}], & c\geqslant a, c+a\leqslant N;\\ [2^a1^{c-a}]+[2^{a-1}1^{c-a+2}]+\cdots+[2^{c+a-N}1^{2N-c-a}], & c\geqslant a,\ c+a>N.\end{cases} \tag{2.1}$$

利用上式可得

$$[2^a1^{c-a}]=[1^c]\otimes[1^a]-[1^{c+1}]\otimes[1^{a-1}]. \tag{2.2}$$

而 $SP(N)$ 的两个全反对称表示的直乘分解公式为[11]

$$\begin{aligned}\langle 1^c\rangle\otimes\langle 1^a\rangle &=\sum_{l=0}^{a}\sum_{i=l}^{a}\langle 2^{a-i}1^{c-a+2l}\rangle, c\geqslant a,\ c+a\leqslant N/2\\ &=\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-c}\sum_{i=l}^{a}\langle 2^{a-i}1^{c-a+2l}\rangle, c\geqslant a, c+a>N/2.\end{aligned} \tag{2.3}$$

运用(2.2)、(2.3)以及 $U(N)$ 的全反对称表示分支律公式[10]，并令 $c-a=b$，经计算可得

$$\begin{aligned}[2^a1^b] &=[2^{a-2}1^b]+\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\langle 2^\beta 1^\alpha\rangle,\ a+b\leqslant N/2\\ &=[2^a1^{\bar c-a}]+\sum_{\gamma}\langle 1^{\bar c+1}\rangle\otimes\langle 1^{a-1-\gamma}\rangle,\ a+b>N/2,\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中，$\bar c=N-c$，

$$\alpha=\begin{cases}0,2,\cdots\leqslant c,\ b=\text{even}\\ 1,3,\cdots\leqslant c,\ b=\text{odd}\end{cases}$$

$$\beta_{\min}=\text{MAX}\{0,a-\alpha\},$$

$$\beta_{\max}=\text{MIN}\{a,c-\alpha\},$$

$$\gamma=0,2,4,\cdots,a-1.$$

由上述递推公式，可以计算 $U(N)\supset SP(N)$ 的任意维表示的分支律．利用(2.4)式编写了符号计算程序计算了 $N=4,6,8,\cdots16$ 的分支律．全部结果均用维数公式核对．$N\leqslant 8$ 的分支律与文献[4]中一致．作为例子在表 1 中给出 $U(14)\supset SP(14)$ 的分支律．表中用 $[n\ T]$ 标记 $U(N)$ 群的不可约表示，$n=2a+b$，为费米子数，$T=b/2$ 为同位

旋. 用 $(st)$ 标记 $SP(N)$ 群的不可约表示,其中 $s=2\nu_1+\nu_2$ 为辛弱数, $t=\nu_2/2$ 为约化同位旋. 用公式(2.4)计算分支律比较简便，而且可不受维数限制. 例如对于同位旋 1/2 的费米子体系, $j=15/2$ 时相应的 $U(16)$ 表示中,维数最大的一个是 $[16\ 1](n=16,T=1)$, 其维数为 66,745,536. 该表示约化到 $SP(16)$ 的分支律为

**表1 $U(14)\supset SP(14)$ 的分支律**

$j=13/2$ $b=\text{even}$

| n \ T (s / t) | | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 10 | 8 | 6 | 4 | 8 | 6 | d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | T | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | |
| 0 | 0 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 2 | 0 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | 105 |
| 4 | 0 | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | 1 | | | | | | | 3185 |
| 6 | 0 | | | | | 1 | | 1 | | | | | | 1 | | | | | | | | 41405 |
| 8 | 0 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | | | 273273 |
| 10 | 0 | | | 1 | | 1 | | 1 | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | | | | 1002001 |
| 12 | 0 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 2147145 |
| 14 | 0 | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 2760615 |
| 2 | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | | | | | | 91 |
| 4 | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | | | | | 4095 |
| 6 | 1 | | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | 2 | | | | 1 | | | 63063 |
| 8 | 1 | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | 2 | 1 | | | 1 | 1 | | | 455455 |
| 10 | 1 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 1 | 2 | | 1 | 1756755 |
| 12 | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3864861 |
| 14 | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 5010005 |
| 4 | 2 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | | | 1 | | | 1001 |
| 6 | 2 | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | 25025 |
| 8 | 2 | | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | 2 | | 1 | 1 | 2 | | 1 | 225225 |
| 10 | 2 | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 975975 |
| 12 | 2 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2277275 |
| 14 | 2 | | | 1 | | 1 | | 1 | | | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3006003 |
| 6 | 3 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | | | 1 | | 1 | 3003 |
| 8 | 3 | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 45045 |
| 10 | 3 | | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | 2 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 245245 |
| 12 | 3 | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 637637 |
| 14 | 3 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | | 1 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 869505 |
| 8 | 4 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | | | 1 | | 1 | 3003 |
| 10 | 4 | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | 27027 |
| 12 | 4 | | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | 2 | | | 1 | 2 | | 1 | 85995 |
| 14 | 4 | | | | | 1 | | 1 | | | | | 1 | 2 | 1 | | | 1 | 2 | | 1 | 124215 |
| 10 | 5 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | | | 1 | | | 1001 |
| 12 | 5 | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | | 1 | | | 5005 |
| 14 | 5 | | | | | | 1 | | 1 | | | | | 1 | 2 | | | | 1 | | | 8085 |
| 12 | 6 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | | | | | | 91 |
| 14 | 6 | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | 195 |
| 14 | 7 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 |

续表 1

$j=\frac{13}{2}$ d = odd

| s | | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 9 | 7 | 5 | 7 | d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | T \ t | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 3/2 | 3/2 | 3/2 | 3/2 | 3/2 | 5/2 | 5/2 | 5/2 | 7/2 | |
| 1 | 1/2 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 14 |
| 3 | 1/2 | | | | | | 1 | 1 | | | | | | | | | | 910 |
| 5 | 1/2 | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 | | | | | 19110 |
| 7 | 1/2 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | | | | | 182182 |
| 9 | 1/2 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | 910910 |
| 11 | 1/2 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 2576574 |
| 13 | 1/2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4294290 |
| 3 | 3/2 | | | | | | | 1 | | | | | 1 | | | | | 364 |
| 5 | 3/2 | | | | | | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | | | | | 12012 |
| 7 | 3/2 | | | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 2 | | | 1 | | 140140 |
| 9 | 3/2 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 1 | | 780780 |
| 11 | 3/2 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2342340 |
| 13 | 3/2 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 4008004 |
| 5 | 5/2 | | | | | | | 1 | | | | | 1 | | | 1 | | 2002 |
| 7 | 5/2 | | | | | | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 38610 |
| 9 | 5/2 | | | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 270270 |
| 11 | 5/2 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 910910 |
| 13 | 5/2 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1639638 |
| 7 | 7/2 | | | | | | | 1 | | | | | 1 | | | 1 | 1 | 3432 |
| 9 | 7/2 | | | | | | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 40040 |
| 11 | 7/2 | | | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | 1 | 168168 |
| 13 | 7/2 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | 1 | 331240 |
| 9 | 9/2 | | | | | | | 1 | | | | | 1 | | | 1 | | 2002 |
| 11 | 9/2 | | | | | | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | | | 1 | | 13650 |
| 13 | 9/2 | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 2 | | | 1 | | 31850 |
| 11 | 11/2 | | | | | | | 1 | | | | | 1 | | | | | 364 |
| 13 | 11/2 | | | | | | 1 | 1 | | | | | 1 | | | | | 1260 |
| 13 | 13/2 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 14 |

$$
\begin{aligned}
[16\ 1] \supset & (14\ 0)+(10\ 0)+(6\ 0)+(2\ 0)+(14\ 1)+2(12\ 1)+(10\ 1)+2(8\ 1) \\
& +(6\ 1)+2(4\ 1)+(2\ 1)+(12\ 2)+2(10\ 2)+(8\ 2)+2(6\ 2)+(4\ 2) \\
& +(10\ 3)+2(8\ 3)+(6\ 3)+(8\ 4).
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

## 3 $SP(N)\supset O(3)$ 的分支律公式

利用 $SP(N)$ 的两个全反对称表示的直乘分解公式(2.3)，考虑 $SP(N)$ 的 $\langle 2^{\nu_1}1^{\nu_2}\rangle$ 的约化规律可得

$$
\begin{aligned}
\langle 2^{\nu_1}1^{\nu_2}\rangle = & \langle 1^{\nu_1+\nu_2}\rangle \otimes \langle 1^{\nu_1}\rangle + \langle 1^{\nu_1+\nu_2}\rangle \otimes \langle 1^{\nu_1-2}\rangle \\
& - \langle 1^{\nu_1+\nu_2+1}\rangle \otimes \langle 1^{\nu_1-1}\rangle - \langle 1^{\nu_1+\nu_2-1}\rangle \otimes \langle 1^{\nu_1-1}\rangle.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

**表 2　$SP(14)\supset O(3)$ 的分支律**

$j=13/2$　　　　$s=2\nu_1+\nu_2, t=\nu_2/2$　$\nu_2=$ even

| $s$ \ $J$ | $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | ...... | 49 | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 2 | 0 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 105 |
| 2 | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 90 |
| 4 | 0 | 4 | | 7 | 4 | 10 | 6 | 12 | 8 | 12 | 9 | 12 | 8 | 11 | 7 | 9 | 5 | 7 | 3 | 5 | 2 | 3 | 1 | 2 | | 1 | | | | 3094 |
| 4 | 1 | | 5 | 5 | 10 | 9 | 13 | 12 | 15 | 13 | 15 | 13 | 14 | 11 | 11 | 9 | 9 | 6 | 6 | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | 3900 |
| 4 | 2 | 1 | | 3 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | | 1 | | | | | | | | 910 |
| 6 | 0 | 2 | 28 | 28 | 56 | 54 | 75 | 74 | 91 | 83 | 99 | 88 | 96 | 86 | 90 | 75 | 79 | 64 | 63 | 51 | 49 | 36 | 36 | 25 | 23 | 16 | 15 | ...... | | 37400 |
| 6 | 1 | 17 | 29 | 61 | 71 | 99 | 105 | 128 | 128 | 144 | 138 | 148 | 137 | 140 | 126 | 124 | 108 | 103 | 86 | 80 | 64 | 58 | 44 | 39 | 28 | 24 | 16 | ...... | | 54978 |
| 6 | 2 | 3 | 16 | 22 | 33 | 38 | 48 | 49 | 56 | 56 | 59 | 56 | 57 | 52 | 51 | 45 | 42 | 36 | 33 | 26 | 23 | 18 | 15 | 11 | 9 | 6 | 5 | ...... | | 20020 |
| 6 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | 6 | 4 | 8 | 6 | 7 | 7 | 7 | 5 | 7 | 5 | 5 | 4 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | | 2002 |
| 8 | 0 | 45 | 80 | 166 | 196 | 275 | 295 | 360 | 368 | 418 | 412 | 445 | 425 | 443 | 412 | 415 | 376 | 370 | 326 | 312 | 268 | 251 | 209 | 192 | 154 | 139 | 108 | ...... | | 214200 |
| 8 | 1 | 43 | 162 | 244 | 353 | 422 | 513 | 562 | 630 | 655 | 697 | 697 | 713 | 691 | 684 | 644 | 619 | 567 | 531 | 473 | 432 | 374 | 333 | 280 | 243 | 198 | 167 | ...... | | 334152 |
| 8 | 2 | 29 | 67 | 123 | 156 | 205 | 230 | 268 | 282 | 308 | 310 | 323 | 314 | 315 | 296 | 288 | 263 | 248 | 220 | 202 | 173 | 155 | 129 | 112 | 90 | 76 | 58 | ...... | | 139230 |
| 8 | 3 | 3 | 12 | 18 | 26 | 30 | 37 | 40 | 45 | 45 | 47 | 47 | 47 | 44 | 43 | 39 | 37 | 32 | 29 | 25 | 22 | 18 | 15 | 12 | 10 | 7 | 6 | ...... | | 18018 |
| 10 | 0 | 57 | 235 | 337 | 508 | 595 | 741 | 809 | 922 | 956 | 1040 | 1043 | 1088 | 1064 | 1078 | 1023 | 1014 | 941 | 907 | 825 | 778 | 690 | 640 | 553 | 501 | 424 | 378 | ...... | | 606424 |
| 10 | 1 | 130 | 335 | 585 | 772 | 994 | 1147 | 1327 | 1434 | 1562 | 1617 | 1689 | 1692 | 1711 | 1666 | 1639 | 1556 | 1493 | 1384 | 1298 | 1175 | 1078 | 953 | 855 | 738 | 648 | 545 | ...... | | 928200 |
| 10 | 2 | 41 | 145 | 230 | 319 | 392 | 473 | 522 | 582 | 617 | 648 | 660 | 675 | 660 | 654 | 628 | 600 | 561 | 528 | 479 | 438 | 390 | 346 | 300 | 263 | 219 | 189 | ...... | | 340340 |
| 12 | 0 | 104 | 235 | 429 | 556 | 732 | 829 | 985 | 1052 | 1165 | 1205 | 1280 | 1277 | 1321 | 1286 | 1288 | 1232 | 1206 | 1123 | 1082 | 987 | 927 | 833 | 768 | 671 | 612 | 523 | ...... | | 804440 |
| 12 | 1 | 103 | 342 | 541 | 764 | 938 | 1129 | 1268 | 1417 | 1509 | 1609 | 1654 | 1703 | 1699 | 1701 | 1656 | 1618 | 1539 | 1470 | 1369 | 1281 | 1167 | 1070 | 956 | 859 | 750 | 661 | ...... | | 1021020 |
| 14 | 0 | 28 | 118 | 172 | 256 | 304 | 377 | 414 | 476 | 498 | 544 | 551 | 580 | 574 | 587 | 568 | 566 | 536 | 524 | 486 | 467 | 423 | 399 | 356 | 329 | 288 | 262 | ...... | | 379236 |

续表 2

$\nu_2 = \text{odd}$

| s | t \ J | 1/2 | 3/2 | 5/2 | 7/2 | 9/2 | 11/2 | 13/2 | 15/2 | 17/2 | 19/2 | 21/2 | 23/2 | 25/2 | 27/2 | 29/2 | 31/2 | 33/2 | 35/2 | 37/2 | 39/2 | 41/2 | 43/2 | 45/2 | 47/2 | 49/2 | 51/2 | …… | 97/2 | d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 14 |
| 3 | 1/2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | 896 |
| 3 | 3/2 | | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | | | | | | | | | | 90 |
| 5 | 1/2 | 9 | 17 | 25 | 32 | 39 | 43 | 48 | 50 | 52 | 52 | 51 | 49 | 47 | 43 | 39 | 35 | 31 | 26 | 22 | 18 | 15 | 11 | 9 | 6 | 5 | 3 | …… | | 17850 |
| 5 | 3/2 | 6 | 12 | 17 | 22 | 26 | 29 | 32 | 33 | 34 | 34 | 33 | 32 | 29 | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 | …… | | 10752 |
| 5 | 5/2 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | | 1 | | | | | | 1638 |
| 7 | 1/2 | 53 | 101 | 150 | 196 | 233 | 269 | 298 | 318 | 334 | 344 | 344 | 341 | 333 | 317 | 300 | 280 | 255 | 231 | 207 | 180 | 156 | 134 | 111 | 92 | 75 | 59 | …… | | 152320 |
| 7 | 3/2 | 40 | 80 | 117 | 151 | 182 | 208 | 229 | 245 | 256 | 260 | 262 | 256 | 248 | 235 | 221 | 202 | 185 | 164 | 145 | 125 | 107 | 89 | 74 | 59 | 47 | 36 | …… | | 108290 |
| 7 | 5/2 | 11 | 22 | 32 | 41 | 49 | 56 | 61 | 65 | 67 | 68 | 67 | 65 | 62 | 58 | 53 | 48 | 43 | 37 | 32 | 27 | 22 | 18 | 14 | 11 | 8 | 6 | …… | | 24960 |
| 7 | 7/2 | 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | | | 1430 |
| 9 | 1/2 | 166 | 325 | 482 | 627 | 756 | 874 | 976 | 1053 | 1116 | 1159 | 1180 | 1184 | 1172 | 1140 | 1099 | 1044 | 978 | 907 | 833 | 751 | 673 | 595 | 519 | 447 | 382 | 319 | …… | | 618800 |
| 9 | 3/2 | 128 | 260 | 380 | 491 | 599 | 687 | 761 | 827 | 870 | 897 | 915 | 912 | 895 | 872 | 832 | 784 | 733 | 674 | 610 | 550 | 486 | 423 | 368 | 312 | 261 | 218 | …… | | 452608 |
| 9 | 5/2 | 34 | 67 | 98 | 127 | 154 | 176 | 195 | 209 | 220 | 225 | 227 | 225 | 219 | 210 | 199 | 185 | 171 | 154 | 138 | 121 | 106 | 90 | 76 | 63 | 52 | 41 | …… | | 102102 |
| 11 | 1/2 | 269 | 533 | 785 | 1025 | 1244 | 1441 | 1613 | 1755 | 1869 | 1953 | 2006 | 2030 | 2025 | 1995 | 1941 | 1867 | 1776 | 1669 | 1554 | 1431 | 1303 | 1176 | 1048 | 925 | 808 | 698 | …… | | 1188096 |
| 11 | 3/2 | 177 | 350 | 516 | 672 | 816 | 943 | 1053 | 1144 | 1216 | 1266 | 1296 | 1307 | 1300 | 1274 | 1235 | 1181 | 1118 | 1045 | 966 | 883 | 800 | 714 | 632 | 553 | 478 | 408 | …… | | 729300 |
| 13 | 1/2 | 183 | 353 | 527 | 690 | 834 | 971 | 1091 | 1188 | 1272 | 1336 | 1374 | 1399 | 1408 | 1390 | 1363 | 1323 | 1264 | 1201 | 1130 | 1047 | 966 | 882 | 794 | 711 | 632 | 551 | …… | 1 | 884884 |

进一步利用全反对称表示 $\langle 1^{\nu}\rangle$ 的分支律公式[10]可得

$$\langle 2^{\nu_1}1^{\nu_2}\rangle = \sum_{J=J_{\min}}^{J_{\max}} J^{\chi(2^{\nu_1}1^{\nu_2},J)}, \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}\chi(2^{\nu_1}1^{\nu_2},J) &= \omega(1^{\nu_1+\nu_2},1^{\nu_1},J,j) - \omega(1^{\nu_1+\nu_2+1};1^{\nu_1-1},J,j)\\ &\quad + \omega(1^{\nu_1+\nu_2},1^{\nu_1-2},J,j) - \omega(1^{\nu_1+\nu_2-1},1^{\nu_1-1},J,j)\end{aligned} \tag{3.3}$$

是 $\langle 2^{\nu_1}1^{\nu_2}\rangle$ 约化到 $J$ 的分支律.

$$J_{\min} = \begin{cases}0, & 2\nu_1+\nu_2 = \text{even}\\ 1/2, & 2\nu_1+\nu_2 = \text{odd},\end{cases} \quad \text{为 } J \text{ 的下限},$$

$$J_{\max} = (\nu_1+\nu_2)[N-(\nu_1+\nu_2)]/2 + \nu_1(N-\nu_1)/2 \quad \text{为 } J \text{ 的上限}.$$

$$\omega(1^a,1^b,J,j) = \sum_{J_2=J_{2\min}}^{J_{2\max}} \gamma(b,J_2) \sum_{J_1=|J-J_2|}^{J+J_2} \gamma(a,J_1), \tag{3.4}$$

其中 $\gamma(a,J_1)$ 与 $\gamma(b,J_2)$ 分别是全反对称表示，$\langle 1^a\rangle$与$\langle 1^b\rangle$约化到 $O(3)$ 的分支律[10].

$$J_{2\min} = \begin{cases}0, & b = \text{even}\\ 1/2, & b = \text{odd}\end{cases} \quad \text{为 } J_2 \text{ 的下限},$$

$$J_{2\max} = b(N-b)/2 \quad \text{为 } J_2 \text{ 的上限}.$$

利用(3.2)式可以计算 $SP(N)$ 的 $\langle 2^{\nu_1}1^{\nu_2}\rangle$ 任意维表示约化到 $O(3)$ 的分支律. 我们编了程序计算了 $N=4,6,8\cdots16$ 的分支律，全部结果用维数公式核对过. 表 2 给出了 $j=13/2$ 时 $SP(14)\supset O(3)$ 的分支律. 从表中可见，很多表示的维数很高.

用同样的方法还可以给出 $U(N)\supset O(N)\supset O(3)$ 的分支律公式. 我们用公式计算过 $N=5,7,9$ 的 $[a\ b]$ 表示的分支律，表示的维数不限. 由于篇幅有限不一一例举.

我们用群的直乘分解的办法给出了简单的明显的分支律公式. 它为计算相应群链的分支律提供了一个好的算法，在计算分支律方面前进了一步. 另外，程序计算的结果可以作为母分系数计算的输入，这无疑比将现有的分支律表上的数据逐个敲入计算机来得简单、可靠.

在整个工作过程中，与韩其智教授作了许多有益的讨论，在此，谨向她致谢.

## 参 考 文 献

[1] R.C.King, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **8** (1975) 429.
[2] G.R.E. Black, R.C.King and B.G. Wybourne, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16** (1983) 1555.
[3] F. Gingras and J. Patera, *J. Math. Phys.*, **33** (1992) 1618.
[4] W. G. Mckay, J. Patera, Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras, New York (1981).
[5] M.R. Bremner, R.V. Moody and J. Patera, Tables of Dominat Weight Multiplicities for Representations of Simple Lie Algbras, Drekker, New York (1985).
[6] H.Z.Sun et al., *Commun. Theor. Phys.*, **20** (1993) 329.
[7] H.Z. Sun et al., *Commun. Theor. Phys.*, **11**(1989) 442.
[8] D.Zwart, GENESIS code.
[9] M. Hamermash, Group Theory, Addison-wesloy, London (1962).
[10] 王稼军、孙洪洲，高能物理与核物理，**14**(1990)842.
[11] 韩其智、孙洪洲，群论，北京大学出版社(1985).

# Branching Rules for $U(N)\supset SP(N)\supset O(3)$

Wang Jiajun[a,c] Sun Hongzhou[b,c]
a (*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)
b (*Department of Physics, Tsinghua University, Beijing* 100084)
c (*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing* 100080)
Received on August 27, 1992

Abstract

The branching rules for group chain $U(N)\supset SP(N)\supset O(3)$ of the irreducible representations $[2^a1^b]$ of $U(N)$ are discussed in some detail. Simple analytical recurrent formulae of these branching rules for above group chain are obtained. They are very efficient to simplify the calculations of Fractional Parentage Coefficients. This method can be used to find the branching rules for the group chain $U(N)\supset O(N)\supset O(3)$ too.

**Key Words** Branching rule, Irreducible representation, Group chain, Fractional parentage coefficient.