第 18 卷 第 6 期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 6
1994 年 6 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS June, 1994

费米子动力学对称群的玻色子实现

邵 彬
(首都师范大学物理系 北京 100037)

1993 年 4 月 14 日收到

摘 要

将费米子动力学对称模型扩展为包含较高角动量费米子对，一般导致的动力学对称群是 $SO(4i+2)$ 或者 $SP(4k+2)$，本文讨论它们精确的 Dyson 玻色子映像表示以及泡利原理在玻色子映像中的体现问题.

关键词 k-i 基，赝自旋，Dyson 玻色子映像，动力学泡利效应.

1 引 言

将费米子动力学对称模型 (FDSM)[1] 扩展为包含较高角动量费米子对，是利用了核壳层按 k-i 基分类的非唯一性实现的. k, i 分别表示单粒子赝轨道角动量和赝自旋. 选择何种 k-i 分类基可视实际物理问题的需要而定. 例如，k-active 时，k 可取 1,2,3 分别导致 $SP(6)$[1]、$SP(10)$[2] 及 $SP(14)$ 对称性. 归纳起来，一般核壳层正常宇称能级的 k-i 取值分类可导致 $SO(4i+2)$ $\left(i\text{-active},\ i=\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots\right)$ 或者 $SP(4k+2)$ (k-active, $k=1,2,\cdots$) 动力学对称性.

用广义 Dyson 玻色子映射方法 (DBM)[3] 能够精确建立费米子与玻色子体系的映像联系，因此，有助于从微观的角度研究唯象相互作用玻色子模型 (IBM)[4] 的微观机制. $SO(8)$ 模型的 Dyson 映像曾被详细讨论[5,6]，$SP(6)$ 模型 Dyson 映像由 kock 等人求出[7]，将 FDSM 扩展包含 G 对后[2]，文献[8]进一步求出了 $SP(10)$ 模型的玻色子映像表示. 本文目的是在此基础上推广讨论 $SO(4i+2)$ 和 $SP(4k+2)$ 对称群的映像表示以及含 G 对的 $SO(12)\left(i=\frac{5}{2}\right)$ 和含 I 对的 $SP(14)$ ($k=3$) 对称群与 IBM 的对应联系，并且给出 FDSM 扩展形式下动力学泡利效应[9]在精确玻色子映像中的等价性描述.

2 Dyson 玻色子映像

在 FDSM 中，k-i 基与壳模型基矢通过么正变换相联系，在壳模型基底中，扩展后的费米子对算符和相应的多极矩算符形式如下:

$$A_\mu^{\lambda\dagger}=\frac{\sqrt{\Omega}}{2}\sum_{j_1j_2}X_{j_1j_2}^{\lambda}(a_{j_1}^{+}a_{j_2}^{+})_\mu^\lambda, \tag{2.1}$$

$$A_\mu^\lambda=(A_\mu^{\lambda\dagger})^\dagger, \tag{2.2}$$

$$P_\mu^r=\frac{\sqrt{\Omega}}{2}\sum_{j_1j_2}X_{j_1j_2}^{\lambda}(a_{j_1}^{+}\tilde{a}_{j_2})_\mu^\lambda, \tag{2.3}$$

其中 $\Omega=\frac{1}{2}\sum_j(2j+1)=\frac{1}{2}\ (2k+1)\ (2i+1)$, $\tilde{a}_{jm}=(-)^{j-m}a_{j-m}$, $X_{j_1j_2}^{J}=\sqrt{2}$ $\hat{K}\hat{I}\hat{j}_1\hat{j}_2\begin{Bmatrix}k & i & j_1\\ k & i & j_2\\ K & I & J\end{Bmatrix}$, $\hat{j}=\sqrt{2j+1}$, $\{\ \}$为 $9-j$ 符号

对 $SO(4i+2)$ 群 (i-active), $K=0, I=J$,

$$\lambda=0,2,\cdots,2i-1,\quad r=0,1,\cdots,2i, \tag{2.4}$$

对 $SP(4k+2)$ 群 (k-active), $K=J, I=0$.

$$\lambda=0,2,\cdots,2k,\quad r=0,1,\cdots,2k, \tag{2.5}$$

模型哈密顿量为:

$$H^F=\sum_\lambda G_\lambda A^{\lambda\dagger}\cdot\tilde{A}^\lambda+\sum_r b_r P^r\cdot P^r, \tag{2.6}$$

类似 $SP(4k+2)$ Dyson 映像的推导方法[8],可以求出 $SO(4i+2)$ 的 Dyson 映像,二者统一表述如下:

$$\begin{aligned}A_\mu^{\lambda\dagger}\to(A_\mu^{\lambda\dagger})^B=\sqrt{\Omega}\,B_\mu^{\lambda\dagger}-\frac{\hat{x}^2}{\sqrt{\Omega}}\sum_{J_1J_2J_3L}\hat{J}_1\hat{J}_2\hat{J}_3\hat{L}\\ \cdot\begin{Bmatrix}x & x & J_1\\ x & x & J_2\\ J_3 & \lambda & L\end{Bmatrix}[(B^{J_1\dagger}B^{J_2\dagger})^L\tilde{B}^{J_3}]_\mu^\lambda,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$A_\mu^\lambda\to(A_\mu^\lambda)^B=\sqrt{\Omega}\ B_\mu^\lambda \tag{2.8}$$

$$P_\mu^r\to(P_\mu^r)^B=(-)^{r+2x}\hat{x}\sum_{J_1J_2}\hat{J}_1\hat{J}_2\begin{Bmatrix}J_1 & J_2 & r\\ x & x & x\end{Bmatrix}(B^{J_1\dagger}\tilde{B}^{J_2})_\mu^r, \tag{2.9}$$

玻色子映像哈密顿量:

$$\begin{aligned}H^F\to H^B=\sum_\lambda G_\lambda\Omega B^{\lambda\dagger}\cdot\tilde{B}^\lambda-\hat{x}^2\sum_{J_1J_2J_3\lambda L}G_\lambda\hat{J}_1\hat{J}_2\hat{J}_3\hat{\lambda}\begin{Bmatrix}x & x & J_1\\ x & x & J_2\\ J_3 & \lambda & L\end{Bmatrix}\\ \cdot(B^{J_1\dagger}B^{J_2\dagger})^L\cdot(\tilde{B}^{J_3}\tilde{B}^\lambda)^L+\sum_r b_r(P^r)^B\cdot(P^r)^B,\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $J_1, J_2, J_3, \lambda=0,2,\cdots,\ 2x-\frac{1}{2}[1-(-1)^{2x}]$,

$r=1,2,\cdots,2x,\ L=L_1, L_1+2,\cdots,L_2-2, L_2.$

$$L_1 = \max(|J_1 - J_2|, |J_3 - \lambda|),\ L_2 = \min(J_1 + J_2, J_3 + \lambda).$$

其中 i-active 时 $x = i$，k-active 时 $x = k$，$B_m^{l\dagger}$，B_m^l 分别为玻色子产生，湮没算符。

H^B 作为精确的(1+2)体玻色子映像表示，与 H^F 有相同的本征值．其参数直接反映核子对之间的相互作用强度．(2.7—2.10) 式的计算表明，$x = i = \frac{3}{2}$ 给出 $SO(8)$ Dyson 映像[6]；$x = k = 1$ 给出 $SP(6)$ Dyson 映像[7]；$x = k = 2$ 给出 $SP(10)$ 模型的映像[8]．进而，当选取 $x = i = \frac{5}{2}$ 和 $x = k = 3$ 时，可分别给出 $SO(12)$ 和 $SP(14)$ 对称群的 Dyson 映像．

对于含 G 对的 $SO(12)$ 对称群，$G_0 = G_2 = G_4, b_2 = b_4, b_3 = b_5$ 时，存在如下约化

$$\begin{aligned} SO(12) &\supset SU(6)(P_\mu^r, r = 1,2,\cdots,5) \\ &\supset SP(6)(P_\mu^r, r = 1,3,5) \supset SO(3), \end{aligned} \tag{2.11}$$

玻色子映像$(P_\mu^r)^B$ 与文献[10]中计算出来的 sdgIBM $SU(6)$群生成元仅差一常数，它对应 sdgIBM 群链 $SU(15) \supset SU(6) \supset SP(6) \supset SO(3)$ 生成元，其能谱可由 FDSM 微观参数描述．Kota 等人[10]曾将构成 sdgIBM $SU(6)$ 生成元的玻色子视为两个具有角动量 $j = \frac{5}{2}$ 的赝费米子耦合而成，从 FDSM 的 Dyson 映像观点看，该生成元对应 $SO(12)$ 群玻色子映像中的 $(P_\mu^r)^B$，此时 $\vec{J} = \vec{I} = \vec{i} + \vec{i}$，$i = \frac{5}{2}$，上述两个赝费米子可对应 FDSM 中的两个具有赝自旋 $i = \frac{5}{2}$ 的费米子，由于核壳层能够完整地按 k-i 基分类，其物理意义十分明显．

对于 $SP(14)$ 群，包含的最高角动量费米子对为 I 对．并且含有例外群 G_2．I 对的影响通常极小，引入 I 对主要出于动力学对称性的考虑．同时，探索 sdgiIBM[11] 的微观机制也要求相应费米子体系计入 I 对．当 $G_0 = G_2 = G_4 = G_6$，$b_2 = b_4 = b_6$ 时，$SP(14)$ 具有约化：

$$\begin{aligned} SP(14) &\supset SU(7)\ (P_\mu^r, r = 1,2,\cdots,6) \supset SO(7)\ (P_\mu^r, r = 1,3,5) \\ &\supset G_2(P_\mu^r, r = 1,5) \supset SO(3) \end{aligned} \tag{2.12}$$

具体计算 $(P_\mu^r)^B$ 表明，它与文献 [11] 重点讨论的 sdg$i$IBM 群链 $SU(28) \supset SU(7) \supset SO(7) \supset G_2 \supset SO(3)$ 生成元相对应，在[11]中，该生成元表达式是经过计算同位标量因子等一系列复杂过程之后得到的．从微观的角度看，其群生成元微观结构可视为二个具有赝轨道角动量 $k = 3$ 的费米子耦合构成．

一般而言，$SO(4i+2)$ 和 $SP(4k+2)$ 动力学对称群各存在一条可使 H^B 退化为厄米形式的约化路线，沿着此路线，映像 $(P_\mu^r)^B$ 与 IBM 相应生成元精确对应．i-active 时，群链 $SO(4i+2) \supset SU(2i+1) \supset SP(2i+1) \supset SO(3)$ 与 IBM 群链 $SU[i(2i+1)] \supset SU(2i+1) \supset SP(2i+1) \supset SO(3)$ 相对应 $\left(i = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\right)$．$k$-active 时，群链 $SP(4k+2) \supset SU(2k+1) \supset SO(2k+1) \supset SO(3)$ 与 IBM 群链 $SU[(k+1)(2k+1)] \supset SU(2k+1) \supset SO(2k+1) \supset SO(3)$ 相对应，$(k = 1,2,\cdots)$

精确 Dyson 玻色子映像表示实现的物理后果与原费米子体系应具有等价性，它表现为：(1)生成元(2.1—2.3)式与其映像(2.7—2.9)式应有全同的代数对易关系，文献[12]就此命题给出了完整的证明。(2) 泡利原理在玻色子映像中应有等价性描述。以下我们讨论此问题。

3 泡利原理在映像中的体现

FDSM 一个重要特点是存在所谓动力学泡利效应[9]，它是泡利原理在核集体运动中的特殊表现形式。扩展 FDSM 后，由于泡利原理的限制，填充在正常宇称能级的价核子对的数目 N_1 应满足下述条件

$$\text{对 } SO(4i+2) \text{ 群}, \quad N_1 \leqslant 2\Omega/(2i+1),\ i = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots, \tag{3.1}$$

$$\text{对 } SO(4k+2) \text{ 群}, \quad N_1 \leqslant \Omega/(2k+1),\ k = 1, 2, \cdots, \tag{3.2}$$

这一限制条件可视为扩展 FDSM 后的动力学泡利效应，它在精确 Dyson 玻色子映像表示中应有相应的描述。对于 $SO(8)\left(N_1 \leqslant \frac{\Omega}{2}\right)$ 及 $SP(6)(N_1 \leqslant \Omega/3)$ 模型，Dobaczewski 等人[13]利用投影算符技巧证明了其对应描述是 d 玻色子数应分别满足条件 $n_d \leqslant \frac{\Omega}{2}$ 及 $n_d \leqslant \Omega/3$，否则将由于映像中存在伪态而破坏体系间的等价性。扩展 FDSM，可以发现动力学泡利效应在精确映像中能够通过一个系数因子充分体现出来。

对 k-active 情形，设 l 标记费米子对算符的最高角动量，则 $l = 2k$。n_l 为相应玻色子数，$|0)$为玻色子真空态，由(2.7)式退耦可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Omega}}(A_l^{l\dagger})^B(B_l^{l\dagger})^n|0) = \Bigg\{ & (B_l^{l\dagger})^{n+1} - \frac{\hat{k}^2}{\Omega}\sum_{J_1J_2J_3L}\hat{J}_1\hat{J}_2\hat{J}_3\hat{L} \\ & \cdot \begin{Bmatrix} k & k & J_1 \\ k & k & J_2 \\ J_3 & l & L \end{Bmatrix} \sum_{m_1m_2m_3m}\langle J_1m_1J_2m_2|Lm\rangle\langle LmJ_3m_3|ll\rangle \\ & \cdot B_{m_1}^{J_1\dagger}B_{m_2}^{J_2\dagger}\tilde{B}_{m_3}^{J_3}(B_l^{l\dagger})^n\Bigg\}|0), \end{aligned} \tag{3.3}$$

利用关系：

$$\tilde{B}_{m_3}^{J_3}(B_l^{l\dagger})^n|0) = n(-)^{J_3-m_3}\delta_{J_3l}\delta_{m_3,-l}(B_l^{l\dagger})^{n-1}|0), \tag{3.4}$$

注意到 $l \geqslant J_1, J_2, J_3$。$C$-$G$ 系数值 $\langle Lml-l|ll\rangle = \sqrt{\frac{2l+1}{4l+1}}\,\delta_{L,2l}\delta_{m,2l}$ 和 $\langle J_1m_1J_2m_2|2l2l\rangle = \delta_{J_1l}\delta_{m_1l}\delta_{J_2l}\delta_{m_2l}$ 可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Omega}}(A_l^{l\dagger})^B(B_l^{l\dagger})^n|0) &= \left[1 - n\frac{\hat{k}^2}{\Omega}(2l+1)^2\begin{Bmatrix} k & k & l \\ k & k & l \\ l & l & 2l \end{Bmatrix}\right](B_l^{l\dagger})^{n+1}|0) \\ &= \left(1 - n\frac{\hat{k}^2}{\Omega}\right)(B_l^{l\dagger})^{n+1}|0), \end{aligned} \tag{3.5}$$

上式最后一步利用了等式 $(4k+1)^2\begin{Bmatrix} k & k & 2k \\ k & k & 2k \\ 2k & 2k & 4k \end{Bmatrix}=1$．重复运用(3.5)式可得：

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(A_l^{i\dagger})^B\right]^{n_l}|0) &= \left[\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(A_l^{i\dagger})^B\right]^{n_l-1}B_l^{i\dagger}|0) \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(A_l^{i\dagger})^B\right]^{n_l-2}\left(1-\frac{\hat{k}^2}{\Omega}\right)(B_l^{i\dagger})^2|0) = \cdots\cdots \\
&= \left(1-\frac{\hat{k}^2}{\Omega}\right)\left(1-2\frac{\hat{k}^2}{\Omega}\right)\cdots\left[1-(n_l-1)\frac{\hat{k}^2}{\Omega}\right](B_l^{i\dagger})^{n_l}|0) \\
&= \left[\prod_{m=1}^{n_l-1}\frac{\hat{k}^2}{\Omega}\left(\frac{\Omega}{\hat{k}^2}-n_l+m\right)\right](B_l^{i\dagger})^{n_l}|0),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

当 $n_l>\frac{\Omega}{\hat{k}^2}$ 时，$\frac{\Omega}{\hat{k}^2}-n_l$ 为负整数，必存在一个 m 使 $\frac{\Omega}{\hat{k}^2}-n_l+m=0$，因此上述玻色子态自然消失，这表明 $SU(2k+1)$ 最高权态 $(B_l^{i\dagger})^{n_l}|0)$ 受到泡利原理的限制，由降算符相联系的整个不可约表示空间都受到限制．(3.6)式系数 $\prod_{m=1}^{n_l-1}\left(\frac{\Omega}{\hat{k}^2}-n_l+m\right)$ 可视为泡利原理在映像中的体现．若无此因子，当 $n_l>\frac{\Omega}{\hat{k}^2}$ 时，意味着一些玻色子态是非物理的，事实上，在玻色子映像理论中，泡利原理的作用部分或者全部丧失的后果是伴随着伪态出现，等价性则要求除去这些伪态．

i-active 时，$l=2i-1$，泡利限制可同理讨论．因此(3.1)，(3.2)两式在 Dyson 玻色子映像表示中的对应描述为

对 $SO(4i+2)$ 群，　　$n_l\leqslant 2\Omega/(2i+1)$，　　(3.7)

对 $SP(4k+2)$ 群，　　$n_l\leqslant \Omega/(2k+1)$，　　(3.8)

当取 $i=\frac{3}{2}$ 或 $k=1$ 时，可得文献[13]的结论．

4 讨　论

根据 k-i 基分类的非唯一性，含 S、D 对的 FDSM 可相应扩展为 $SO(4i+2)$ 及 $SP(4k+2)$ 动力学对称群，从而与 IBM 对应的群链大大丰富了．但在应用于某些实际物理问题方面有一定的局限性，从群生成元映像中看，包含更高角动量 $(J\geqslant 4)$ 费米子对的 FDSM 不含 $SU(3)$ 子群．从(3.1)，(3.2)式看，随着 i 或 k 的选取值的增大，泡利原理将使能够填充在正常能级的价核子对数目 N_1 减少，填充在核壳层总价核子对数目也相应受到限制，如出现在正常能级 $j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2}$ 壳层的 $SP(14)$ 对称群，$N_1\leqslant\frac{\Omega}{7}=3$，反常能级 $\left(j=\frac{15}{2}\right)$ 假定全部填满 $N_0=8$，则泡利原理要求 $N=N_1+$

$N_0 \leqslant 11$，该壳层半满时价核子对总数可达 14，由此看来，既使反常宇称能级起着"吸收"作用，泡利原理也会限制该模型对那些接近半满壳层原子核的应用。

参 考 文 献

[1] C.L. Wu et al., *Phys. Lett.*, **168B**(1986) 313; *Phys. Rev.*, **C36**(1987)1157.
[2] 潘峰等，高能物理与核物理，**15**(1991)647.
[3] D.Janssen et al., *Nucl. Phys.*, **A224**(1971)93.
[4] F. Iachello and A.Arima, The Interacting Boson Model (Cambridge University Press, 1987).
[5] H.B. Geyer et al., *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987)459.
[6] G.K. Kim et al., *Phys. Rev.*, **C35**(1987)1517.
[7] E.A. de Kock et al., *Phys. Rev.*, **C43**(1991)1177.
[8] 邵彬，高能物理与核物理，**18**(1994)27.
[9] D.H. Feng et al., *Phys. Lett.*, **B205**(1988)156.
[10] V.K.B. Kota et al., *J.Math. Phys.*, **28**(1987)1644.
[11] I.Morrison et al., *J. Math. Phys.*, **32**(1991) 356.
[12] G.K. Kim et al., *Phys. Rev.*, **C37**(1988) 2176.
[13] J. Dobaczewski et al., *Phys. Rev.*, **C44**(1991) 1030.

Boson Realization of the Fermion Dynamical Symmetry Group

Shao Bin

(*Department of Physics, Capital Normal University, Beijing* 100037)

Received on April 14 1993

Abstract

Extending fermion dynamical symmetry model to includ fermion pairs with higher angular momentum can lead to $SO(4i+2)$ or $SP(4k+2)$ dynamical symmetry group, This paper gives a discussion about their representations of the exact Dyson boson image and of the Pauli principle in Dyson boson image.

Key words k-i basis, pseudospin, Dyson boson image, dynamical Pauli effect.