第 18 卷 第 7 期　　高能物理与核物理　　Vol. 18, No. 7
1994 年 7 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　July, 1994

多体关联格林函数动力学 IV. 相对论推广

左　维
（中国科学院近代物理研究所　兰州　730000）
郭　华　　王顺金
（兰州大学现代物理系　兰州　730001）

1993 年 4 月 27 日收到

摘　　要

以 φ^3 模型和 Yukawa 模型为例，利用泛函微分方法，将多体关联格林函数动力学推广到相对论情形，建立起了相对论性多体关联格林函数动力学的理论形式。

关键词　多体关联格林函数，多体关联动力学，相对论，非微扰，截断近似

1　引　　言

多体关联动力学是最近发展起来的处理核多体问题的一种新途径[1]，这种理论形式不同于通常的多体微扰论按相互作用强度的幂次展开，而是按多体关联子结构的等级展开，能够以自然的形式为描述多体系统提供一种系统的非微扰近似方案。自从密度矩阵形式的多体关联动力学建立以来[2]，已经在核物理中取得了相当成功的应用[3-5]。在文献[6]中，多体关联动力学又被推广到格林函数理论，建立起了非相对论性多体关联格林函数动力学的理论形式，并讨论了其运动方程的等时极限和低阶截断近似。本文以 φ^3 模型和 Yukawa 模型为例，利用泛函微分技术[8]将多体关联格林函数动力学推广到相对论性情形，建立起相对论性多体关联格林函数动力学的运动方程，这对于相对论性量子统计的发展和相对论性重离子碰撞的研究都具有较重要的意义。

2　标量 φ^3 模型

标量 φ^3 模型的拉氏密度为[7,8]

$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x)-\frac{1}{2}m^2\varphi^2(x)+\frac{\lambda}{3!}\varphi^3(x), \tag{2.1}$$

其中 λ 为耦合常数，x 为四维时空坐标。引进多点格林函数及多点连接格林函数的生成泛函 $Z(j)$ 和 $W(j)$，

$$Z(j) = \exp[W(j)] = \left\langle T\left\{\exp\left[i\int dx j(x)\varphi(x)\right]\right\}\right\rangle, \tag{2.2}$$

这里T是编时算子，$j(x)$为$\varphi(x)$的时空依赖的c数外源。φ^3模型的n点格林函数及其相应的连接格林函数可通过生成泛函对外源的变分定义为

$$g^{(n)}(x_1, x_2\cdots x_n) = [A(x_1, x_2\cdots x_n)Z(j)]_{j=0}$$
$$= \langle T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)]\rangle, \tag{2.3}$$
$$g^{(n)c}(x_1, x_2\cdots x_n) = [A(x_1, x_2\cdots x_n)W(j)]_{j=0}, \tag{2.4}$$

其中变分算子 $A(x_1, x_2\cdots x_n)$ 定义为

$$A(x_1, x_2\cdots x_n) = \frac{\delta^{(n)}}{i\delta j(x_n)\cdots i\delta j(x_2)i\delta j(x_1)}. \tag{2.5}$$

可以证明,连接格林函数就是关联格林函数[9]，即多点格林函数与多点连接格林函数由下面非线性变换相联系:

$$g^{(n)}(x_1\cdots x_n) = g^{(n)c}(x_1\cdots x_n)$$
$$+ P_{(x_2\cdots x_n)}\sum_{k=1}^{n-1} g^{(k)c}(x_1\cdots x_k)g^{(n-k)}(x_{k+1}\cdots x_n), \tag{2.6}$$

其中$P_{(\cdots)}$表示对所有包含在括号$(\cdots)$中的时空变量x_i和x_j施行置换运算，重复的项目应当去掉。根据作用量原理,有

$$\left\{\frac{\delta I}{\delta\varphi(x_1)}\left(\frac{\delta}{i\delta j}\right) + j(x_1)\right\} Z(j) = 0, \quad I(\varphi) \equiv \int dx\mathscr{L}(\varphi(x)). \tag{2.7}$$

利用定义式(2.2),可以得到

$$(\Box_1 + m^2)\frac{\delta W}{i\delta j(x_1)} = j(x_1) + \int dy V(x_1, y)\left[\frac{\delta^2 W}{i\delta j(y)i\delta j(x_1)} + \frac{\delta W}{i\delta j(y)}\frac{\delta W}{i\delta j(x_1)}\right], \tag{2.8}$$

其中 $\Box_1 = \partial^\mu_{x_1}\partial^{x_1}_\mu$, $V(x_1, y) \equiv \frac{\lambda}{2}\delta(x_1, y)$. 用 $A(x_2, \cdots x_n)$从左端作用于(2.8)式两边，然后取$j = 0$,经过一些推演,得到φ^3模型的相对论性关联格林函数动力学的运动方程组

$$(\Box_1 + m^2)g^{(n)c}(x_1\cdots x_n) = -i\delta(x_1, x_n)\delta_{n,2} + \int dx_{n+1}\left\{V(x_1, x_{n+1})\right.$$
$$\times\left[g^{(n+1)c}(x_1\cdots x_{n+1}) + P_{(x_2\cdots x_n)}\right.$$
$$\left.\left.\cdot\sum_{k=1}^{n} g^{(k)c}(x_1\cdots x_k)g^{(n+1-k)c}(x_{k+1}\cdots x_{n+1})\right]\right\}_L,$$
$$(n = 1, 2, \cdots), \tag{2.9}$$

其中下标L表示连接项(连接项的定义与文献[2,6]中相同).这一方程组系列的最明显特点在于它提供了一个按关联等级截断的非微扰近似方案。为说明这一点，下面写出最低阶（$g^{(n)c} = 0$，如果 $n \geqslant 3$）截断近似,这一截断导致所谓的 Pairing 近似

$$i(\Box_1 + m^2)g^{(2)c}(x_1, x_2) = \delta(x_1, x_2) + \int dy\Pi(x_1, y)ig^{(2)c}(y, x_2), \tag{2.10}$$

其中 $\Pi(x_1, y) = \lambda\delta(x_1, y)\langle\varphi(x_1)\rangle = \lambda\delta(x_1, y)g^{(1)c}(x_1)$.

3 Yukawa 模型

上节讨论了标量 φ^3 模型的关联动力学，本节将推导 Yukawa 模型的关联动力学方程组。Yukawa 模型的拉氏密度为

$$\mathscr{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi(x) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) - m^2\varphi^2(x)) + g\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x), \tag{3.1}$$

其中 $\psi(x)$ 为 Dirac 费米场,可以代表核子场、重子场等; $\varphi(x)$ 为玻色场,可以代表介子场。 g 是相互作用耦合常数。通过引进各种场量的外源，可以定义格林函数及其关联格林函数的生成泛函

$$Z(j;\eta,\bar{\eta}) = \left\langle T\left\{\exp\left[i\int dx(j(x)\varphi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x))\right]\right\}\right\rangle, \tag{3.2}$$

$$W(j;\eta,\bar{\eta}) = \ln Z(j;\eta,\bar{\eta}), \tag{3.3}$$

其中 $j(x)$ 为 c 数,是 $\varphi(x)$ 的外源; $\bar{\eta},\eta$ 分别是 $\psi,\bar{\psi}$ 的外源, η 与 $\bar{\eta}$ 为 Grassmann 函数[8]。为书写简明,定义下列变分算子:

$$A(\xi_1\cdots\xi_n) = \frac{\delta^n}{i\delta j(\xi_n)\cdots i\delta j(\xi_1)}, \tag{3.4}$$

$$B(x_1\cdots x_m;x_1'\cdots x_m') = \frac{\delta^{2m}}{i\delta\bar{\eta}(x_1)\cdots i\delta\bar{\eta}(x_m)(-i\delta\eta(x_m'))\cdots(-i\delta\eta(x_1'))}, \tag{3.5}$$

这里 ξ_i 和 x_i 分别用来表示玻色场和费米场的四维时空变量。利用生成泛函 Z 和W,系统的 n 点 m 体玻色-费米混合格林函数及其相应的关联格林函数可定义为

$$G^{(m,n)}(x_1\cdots x_m;x_1'\cdots x_m'|\xi_1\cdots\xi_n) = [B(x_1\cdots x_m;x_1'\cdots x_m')A(\xi_1\cdots\xi_n)Z(j;\eta,\bar{\eta})]_{j\eta\bar{\eta}=0}, \tag{3.6}$$

$$G^{(m,n)c}(x_1\cdots x_m;x_1'\cdots x_m'|\xi_1\cdots\xi_n) = [B(x_1\cdots x_m;x_1'\cdots x_m')A(\xi_1\cdots\xi_n)W(j;\eta,\bar{\eta})]_{j\eta\bar{\eta}=0}. \tag{3.7}$$

对于只包含玻色场或只包含费米场的纯格林函数已作为特例包括在上面定义中，即当 $n=0$ 时，(3.6)与(3.7)只含费米场， 记为 $G^{(m,0)} = G_f^m$, $G^{(m,0)c} = G_f^{(m)c}$; 而当 $m=0$ 时,这两式只含玻色场,记为 $G^{(0,n)} = G_b^n$, $G^{(0,n)c} = G_b^{(n)c}$。下面推导关联格林函数满足的运动方程。根据作用量对 φ 场的变分不变性,并利用定义式(3.3),有

$$(\Box_{\xi_1} + m^2)\frac{\delta W}{i\delta j(\xi_1)} = j(\xi_1) + \int dx_{m+1}dx_{m+1}'\Gamma_0(x_{m+1},x_{m+1}';\xi_1) \times\left\{\frac{\delta W}{i\delta\bar{\eta}(x_{m+1})}\frac{\delta W}{-i\delta\eta(x_{m+1}')} + \frac{\delta^2 W}{i\delta\bar{\eta}(x_{m+1})(-i\delta\eta(x_{m+1}'))}\right\}, \tag{3.8}$$

其中零阶顶点函数定义为 $\Gamma_0(x,x';\xi) = -g\delta(\xi,x)\delta(x,x')$。用 $B(x_1\cdots x_m;x_1'\cdots x_m')A(\xi_2\cdots\xi_n)$ 作用于(3.8)式两端,然后取 $j,\eta,\bar{\eta}=0$，利用归纳法，可推得关联格林函数所满足的一组运动方程

$$(\Box_{\xi_1} + m^2)G^{(m,n)c}(x_1\cdots x_m;x_1'\cdots x_m'|\xi_1\cdots\xi_n)$$

$$= -i\delta(\xi_1,\xi_n)\delta_{n,2}+\int dx_{m+1}dx'_{m+1}\Gamma_0(x_{m+1},x'_{m+1};\xi_1)\Big\{G^{(m+1,n-1)c}(x_1\cdots x_{m+1};x'_1\cdots x'_{m+1}|\xi_2\cdots\xi_n)$$

$$-Ap_{\{x'_1\cdots x'_m\}}Sp_{\{x_1\cdots x_m;x'_1\cdots x'_m\}}P_{(\xi_2\cdots\xi_n)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}G^{(k,l-1)c}(x_1\cdots x_{k-1},x_{m+1};x'_1\cdots x'_k|\xi_2\cdots\xi_l)$$

$$\times G^{(m-k+1,n-l)c}(x_{k+1}\cdots x_m,x_k;x'_{k+1}\cdots x'_{m+1}|\xi_{l+1}\cdots\xi_n)\Big\}_L, \tag{3.9}$$

其中费米子等时格林函数按 $G(x;x)=G(x;x^+)$ 来定义. $Sp_{\{\cdots;\cdots\}}$ 表示对出现在括号 $\{\cdots;\cdots\}$ 中的费米子时空坐标对 $\{x_i;x'_i\}$ 和 $\{x_j;x'_j\}$ 的完全对称化运算, $Ap_{\{\cdots\}}$ 表示对出现在括号 $\{\cdots\}$ 中的费米子时空坐标 x'_i 和 x'_j 的完全反对称化运算. 施行 $ApSpP$ 运算时, 重复的项目应当去掉[2,9]. 根据作用量对 Φ 的变分不变性, 用类似方法, 可以得到 $G^{(m,n)c}$ 满足的另一组运动方程

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu-M)G^{(m,n)c}(x_1\cdots x_m;x'_1\cdots x'_m|\xi_1\cdots\xi_n)=i\delta(x_1,x'_m)\delta_{m,1}$$

$$+\int dx'_{m+1}d\xi_{n+1}\Gamma_0(x_1,x'_{m+1};\xi_{n+1})\{G^{(m,n+1)c}(x_1\cdots x_m;x'_1\cdots x'_m|\xi_1\cdots\xi_{n+1})$$

$$+Ap_{\{x'_1\cdots x'_m\}}Sp_{\{x_2\cdots x_m;x'_2\cdots x'_m\}}P_{(\xi_1\cdots\xi_n)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{n}G^{(k,l)c}(x_1\cdots x_k;x'_1\cdots x'_k|\xi_1\cdots\xi_l)$$

$$\times G^{(m-k,n+1-l)c}(x_{k+1}\cdots x_m;x'_{k+1}\cdots x'_m|\xi_{l+1}\cdots\xi_{n+1})\}_L. \tag{3.10}$$

(3.9)和(3.10)式构成了 Yukawa 模型的关联格林函数动力学基本方程组,这一方程组描述相对论系统中关联随时间演化的动力学过程以及各级关联间相互耦合、相互作用的关系.

在本节最后, 将这里得到的运动方程与非相对论费米系统的多体关联格林函数运动方程的形式作一比较. 为此,引入玻色场的自由格林函数

$$iG^0_b(\xi_1-\xi_2)=(\Box_{\xi_1}+m^2)^{-1}\delta(\xi_1,\xi_2). \tag{3.11}$$

在(3.9)中,取 $n=1$, 并利用(3.11)式,可求得 $G^{(m,1)c}$ 的积分形式. 在方程(3.10)中,取 $n=0$, 利用 $G^{(m,1)c}$ 的积分形式,将其中的玻色场量消去,则得到费米子关联格林函数的运动方程

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu-M)[i^{(-m)}G_f^{(m)c}]=\delta(x_1,x'_m)\delta_{m,1}$$

$$-i\left\{\int dx_{m+1}v(x_1,x_{m+1})\underset{(m+1)}{AS}\sum_{k>l>q}\sum\sum[i^{(-k)}G_f^{(k)c}][i^{(-l)}G_f^{(l)c}][i^{(-q)}G_f^{(q)c}]\delta_{k+l+q,m+1}\right\}_L, \tag{3.12}$$

其中 AS 与文献[2,6]中的定义相同,四维势 $v(x_1,x_{m+1})$ 定义为

$$v(x_1,x_{m+1})=-ig^2G^0_b(x_1-x_{m+1}). \tag{3.13}$$

显然,方程(3.12)与非相对论情形[6]有类似的形式. 值得注意的是,在相对论情形下,四维势 $v(x_1,x_{m+1})$ 已不再是时间的定域函数(即不再是时间的 δ 函数),这反映了相互作用的传播需要时间,而非瞬时作用.

4 讨论与展望

本文讨论了 φ^3 模型及 Yukawa 模型的关联动力学方法, 并推导了这两个模型的关

联动力学方程组．显然，文中所用方法可以直接推广到更为复杂的拉氏量．多体关联动力学这一方法有其独特的特点：（1）它本身具有非微扰特性，即每一级截断近似都导致一组非微扰的方程组；（2）对各种多体系统，关联的分离从某种意义上说，具有普适性，即由生成泛函间的关系 $W = \ln Z$ 表示；（3）多体关联的演化由系统的拉氏量（或哈密顿量）决定．本文将多体关联动力学推广到相对论的 φ^3 模型和 Yukawa 模型，为从关联截断这一系统的非微扰途径处理相对论性多体问题创造了条件．关于这一理论形式在相对论量子多体问题以及相对论性重离子碰撞中的应用，还需要进一步做大量的工作．

参 考 文 献

[1] 王顺金、左维，兰州大学学报，**27**(辑刊)(1991)74.
[2] Wang Shunjin and W. Cassing, *Ann. Phys.*, **159**(1985) 328.
[3] W. Cassing, K. Niita and Wang Shunjin, *Z. Phys.*, **A331**(1988) 439; Wang Shunjin and W. Cassing, *Nucl. Phys.*, **A495**(1989) 371c; W. Cassing and U. Mosel, *Progr. in Part.* and *Nucl. Phys.*, **25**(1990)235.
[4] B.A. Li and W. Bauer, *Phys. Lett.*, **B254**(1991)335.
[5] M. Tohyama and M. Gong, *Z. Phys.*, **A332**(1989)269; M. Tohyama, *Phys. Rev.*, **C36**(1987) 187; **C38**(1988)553; M. Gong, M. Tohyama and J. Randrup, *Z. Phys.*, **A335**(1990)331.
[6] 左 维、王顺金，高能物理与核物理，**16**(1992)840，1050；**17**(1993)179.
[7] Sai-Ping Li and L. Mclerran, *Nucl. Phys.*, **B214**(1983)417.
[8] C. Itzykson and J.B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill Inc., 1980; J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Clarendon Press, Oxford, 1989.
P.J. Siemens et al., *Ann. Phys.*, **209** (1991) 251.
[9] 左 维，格林函数形式的关联动力学，兰州大学博士论文，1992.

Dynamics of Many-Body Correlation Green's Functions IV. Relativistic Generalization

Zuo Wei

(Institute of Modern Physics, Academia Sinica, Lanzhou 730000)

Guo Hua Wang Shunjin

(Lanzhou University Lanzhou 730001)

Received on April 27, 1993

Abstract

By using the generating-functional technique, the dynamics of many body correlation green's functions is generalized to the relativistic case and two sets of equations for the correlation green's functions are derived respectively for the scalar φ^3-model and the Yukawa model, which are non-perturbative in nature and provide physically transparent truncations with respect to the order of correlations.

Key words many-body correlation Green's function, many bodv correlation dynamics, relativistic, non-perturbative, truncation approximation.