

α 模型的改进和 Levy 指数的解析计算*

林海¹⁾ 张阳 刘连寿

(华中师范大学粒子物理研究所, 武昌 430070)

1994年1月13日收到

摘 要

为了用 Levy 稳定性理论研究高能碰撞多重产生中的间歇行为, 除了采用蒙特卡罗模拟外, 有必要找到一种能对 Levy 指数作解析计算的方法. 为此, 改进了随机级联 α 模型, 使其中基元分割几率 ω 的表达式是线性的. 用这一模型, 解析地计算了 Levy 指数, 得到了与理论预言相一致的结果; 并推出了 ω 的任意阶矩的解析表达式. 为了将这一模型和原有的 α 模型进行比较, 用两种模型分别做 MC 模拟, 计算了间歇指数, 证明两种模型都是实用的、可靠的模型.

关键词 高能碰撞, 间歇, 分形, Levy 稳定性, 随机级联模型.

1 引 言

在 高能碰撞多重产生的间歇与分形的研究中, 用 Levy 稳定性理论对间歇现象进行分类^[1]是近年来一种很有新意的方 法. 大家知道, 在中心极限定理近似下得到的不同阶间歇指数 φ_q 之间的关系^[2]

$$\frac{\varphi_q}{\varphi_2} = \frac{q(q-1)}{2} \quad (1)$$

只是一个很粗略的近似^[3]. 当动力学起伏较大时, 由于基元分割几率 ω 的几率分布宽, $P(\omega)$ 的方差大, 中心极限定理出现很大的偏离, 故(1)式对一般情况不成立. Ph. Brax 和 R. Peschanski^[4] 利用统计学中的 Levy 稳定性理论^[5]分析了这一问题. 应用随机级联 α 模型, 设分割代数 ν , 令 ν 个随机变量的和 $\zeta = \sum_{i=1}^{\nu} \ln \omega_i$; 在 ν 大时有稳定的分布, 推出了 φ_q 之间的关系

$$\frac{\varphi_q}{\varphi_2} = \frac{q^\mu - q}{2^\mu - 2}, \quad (2)$$

或

$$\frac{d_q}{d_2} = \frac{1}{q-1} \frac{q^\mu - q}{2^\mu - 2}, \quad (3)$$

* 国家自然科学基金资助.

1) 永久通信处: 山西省雁北师范学院物理系, 037000

其中, $d_q = \varphi_q / (q - 1)$ 是分形维数. μ 是一个连续变化的参量, 称为 Levy 指数, 它表征 ζ 的几率分布 $P(\zeta)$ 当 ω_i 的方差不同时不同极限行为. 它的变化范围是 $0 \leq \mu \leq 2$. 从随机级联 α 模型来讲, 通过 Levy 指数 μ 的大小可以了解基元分割几率 ω_i 的起伏情况. $\mu = 0$ 对应于 ω_i 的起伏最大, 多重分形退化为简单分形; 而当 $\mu = 2$ 时, ω_i 的起伏很小, 回到了中心极限定理.

Levy 指数 μ 是表征随机级联性质的一个重要参量. 实验测量结果^[1], 在多数情况下都满足 $0 \leq \mu \leq 2$, 然而 NA22 的三维结果却有 $\mu > 2$ ^[1], 不符合由 Levy 稳定性作出的预言.

为了从理论上研究 Levy 指数, 除了蒙特卡洛模拟外, 有必要对它进行解析计算, 通过解析计算可以更直接地看出 Levy 指数 μ 与基元分割几率 ω 之间的关系. 然而, 这在原有的随机级联 α 模型^[6,7]中难以做到. 本文提出了一种新的 α 模型, 利用这一模型, 得到了 ω 的各阶矩的解析表达式并由此求出了 Levy 指数 μ . 计算结果与理论预言^[4]一致. 与此同时, 为了将这一模型和原有的 α 模型进行比较, 用两种模型分别做 MC 模拟, 计算了间歇指数. 适当调整模型参数 α , 得到了相互一致的计算结果. 这表明, 两种模型都能有效地描述间歇行为. 由于改进后的 α 模型能对许多问题做解析计算, 所以更便于用来进行理论分析.

2 α 模型的改进及 ω 各阶矩的解析表达式

α 模型作为一种产生间歇的数学模型, 在研究间歇时常常被人们采用. 从基本思想讲, 它是一种随机级联分割的模型^[6]. 以一维为例, 它将某一动力学变量(例如快度)的一个给定的区间 Δy 分成 λ 个子区间. 假设一个粒子一定出现在区间 Δy 中, 那么这个粒子出现在各个子区间中的几率 $p^{(1)}(i = 1, 2, \dots, \lambda)$ 就是这一模型中基元分割的几率 $\omega_i^{(1)}$. 上标(1)表示分割的第一代. 接下去, 再将每个子区间又分为 λ 个更小的子区间. 在第 $m(m = 1, 2, \dots, M, M = \lambda^2)$ 个子区间中的几率是

$$p_m^{(2)} = \omega_{i_1}^{(1)} \omega_{i_2}^{(2)}, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, \lambda, \quad (4)$$

其中 $\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}$ 分别为第一代和第二代分割时的基元分割几率. 这样继续进行下去, 一直到第 ν 代, 第 m 个小间隔中的几率是

$$p_m^{(\nu)} = \prod_{k=1}^{\nu} \omega_{i_k}^{(k)}, \quad i_k = 1, 2, \dots, \lambda, \quad (5)$$

其中 $\omega_{i_k}^{(k)}$ 是分割到第 k 代时的基元分割几率.

在较早的随机级联模型^[8]中, 分割数 $\lambda = 2$, 基元分割的几率 ω 只取两个值, 每个值以一定的几率出现. 其不足之处是在每步的分割中几率不守恒, 即不满足归一化

$$\sum_{m=1}^M p_m = 1.$$

文献[6]对此作了改进, 将基元分割的几率改为

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(1 + \alpha r), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(1 - \alpha r). \quad (6)$$

α 为模型参量,取值在 0 到 1 之间. 它反映了基元分割几率 ω 起伏的大小. r 为 $[-1, 1]$ 之间的均匀随机数. 这样就解决了几率不守恒的问题.

(6) 式只对 $\lambda = 2$ 的情况适用. 进一步的研究表明, 间歇存在于高维而不是一维^[9], 因而必须考虑 $\lambda > 2$. 为此, 在文献[7]中采用了

$$\omega_i = \frac{1 + \alpha r_i}{\lambda + \alpha \sum_{j=1}^{\lambda} r_j} \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda) \quad (7)$$

的形式, 从而能推广到 $\lambda > 2$ 的情形. 这个模型是一个较完善的模型, 基元分割几率 ω_i 取值在 0 到 1 之间, 对于分割的各个子间隔是平权的, 而且每代分割的几率是归一的. 但是, 由于 ω_i 的表达式的非线性性质, 在很大程度上限制了做解析运算的可能性.

为了能适用于 $\lambda > 2$ 的一般情况而又保持基元分割几率的线性性质, 令

$$\omega_i = \frac{1 + \frac{\alpha \left(\lambda r_i - \sum_{j=1}^{\lambda} r_j \right)}{2(\lambda - 1)}}{\lambda} \quad i = 1, 2, \dots, \lambda, \quad (8)$$

其中, 模型参数 α 和原来一样, 取值在 0 到 1 之间; $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$ 是取 -1 到 1 之间的均匀分布随机数. λ 可取任意大于 1 的整数值. 以 $\lambda = 3$ 为例

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1 + \alpha \frac{[2r_1 - r_2 - r_3]}{4}}{3}, & \omega_2 &= \frac{1 + \alpha \frac{[2r_2 - r_3 - r_1]}{4}}{3} \\ \omega_3 &= \frac{1 + \alpha \frac{[2r_3 - r_1 - r_2]}{4}}{3}. \end{aligned} \quad (9)$$

λ 个 ω 都是平权的, 具有相同的由归一化产生的关联, 最小的可能取值是 0, 最大的可能取值是 $2/\lambda$.

在随机级联过程的研究中, ω 的各阶矩是一个很重要的量. 下面我们由(8)式出发, 计算 ω 的各阶矩.

当 $\lambda = 2$ 时, 由(8)式得 ω 的 q 阶矩

$$\langle \omega^q \rangle_2 = \frac{1}{2^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{[1 + \alpha(r_1 - r_2)/2]^q}{2^q} dr_1 dr_2, \quad (10)$$

其中, 积分号外的因子 $1/2^2$, 是由于 r_1, r_2 在 -1 到 1 之间均匀随机取值, 两者的几率密度都是 $1/2$. 计算结果为

$$\langle \omega^q \rangle_2 = \frac{1}{2^{2^q}} \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{q! \alpha^{2k}}{(2k)! (q-2k)! 2^{2k} (2k+1)(2k+2)}. \quad (11)$$

在(10)式和(11)式中平均号 $\langle \rangle$ 的下标 2 表示 λ 的值. $[q/2]$ 中的方括号表示求和上限为不大于 $q/2$ 的整数.

当 $\lambda = 3, 4$ 时, 同样得到

$$\begin{aligned} \langle \omega^q \rangle_3 &= \frac{1}{2^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{[1 + \alpha(2r_1 - r_2 - r_3)/4]^q}{3^q} dr_1 dr_2 dr_3 \\ &= \frac{1}{2^3 3^q} \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{q! \alpha^{2k}}{(2k)! (q-2k)!} \frac{2(4^{2k+3}) - 4(2^{2k+3})}{4^{2k}(2k+1)(2k+2)(2k+3)2}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle \omega^q \rangle_4 &= \frac{1}{2^4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{[1 + \alpha(3r_1 - r_2 - r_3 - r_4)/6]^q}{4^q} dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 \\ &= \frac{1}{2^4 4^q} \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{q! \alpha^{2k}}{(2k)! (q-2k)!} \frac{2(6^{2k+4}) - 6(4^{2k+4}) + 6(2^{2k+4})}{6^{2k}(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)3}. \end{aligned} \quad (13)$$

对于一般情况有

$$\begin{aligned} \langle \omega^q \rangle_\lambda &= \frac{1}{2^\lambda} \underbrace{\int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1}_{\lambda} \frac{[1 + \alpha(\lambda r_1 - \sum_{j=1}^{\lambda} r_j)/2(\lambda-1)]^q}{\lambda^q} \prod_{j=1}^{\lambda} dr_j \\ &= \frac{1}{2^\lambda \lambda^q} \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{q! \alpha^{2k}}{(2k)! (q-2k)!} \frac{2 \sum_{m=1}^{\lambda-1} (-1)^{m+1} (2\lambda-2m)^{2k+\lambda} C_{\lambda-1}^{m-1}}{(2\lambda-2)^{2k} (2k+1)(2k+2) \cdots (2k+\lambda)(\lambda-1)^{\lambda}} \end{aligned} \quad (14)$$

3 Levy 指数的解析计算

下面用解析方法计算(2)式中的 Levy 指数 μ 的值。由 C 矩的定义^[8]:

$$\langle C_q \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int P(p_1, p_2, \dots, p_M) (M p_m^{(v)})^q dp_1 \cdots dp_M, \quad (15)$$

其中 $p_m^{(v)}$ 为分割到第 v 代时第 m 个小窗口中的几率, $M = \lambda^v$, 结合(5)式并注意到不同代的基元几率独立地按几率分布(8)式取值, 可得

$$\langle C_q \rangle = M^q \langle \omega^q \rangle_\lambda. \quad (16)$$

将(16)式取对数可得

$$\ln \langle C_q \rangle = \left(q + \frac{\ln \langle \omega^q \rangle_\lambda}{\ln \lambda} \right) \ln M, \quad (17)$$

从而得到间歇指数的表达式

$$\varphi_q = q + \ln \langle \omega^q \rangle_\lambda / \ln \lambda. \quad (18)$$

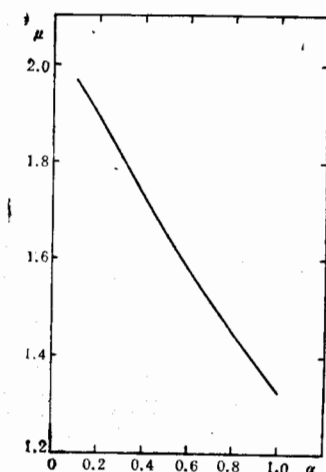
再由(14)式可计算出对各种 q 和 λ 的 φ_q 值。

将一组 φ_q 值与(2)式比较, 可以确定一个 Levy 指数 μ 的值。取 $q = 2, 3, \dots, 40$, 构造误差函数

$$f(\mu) = \sum_{i=2}^{40} \left(\frac{\varphi_i - \frac{i^\mu - i}{2^\mu - 2}}{\varphi_2} \right)^2, \quad (19)$$

表1 对于不同 α, λ 的 Levy 指数 μ

	$\alpha = 0.1$	0.3	0.5	0.8	1
$\lambda = 2$	1.956	1.766	1.580	1.352	1.222
3	1.967	1.811	1.651	1.446	1.326
4	1.968	1.817	1.665	1.468	1.353
5	1.969	1.817	1.666	1.474	1.361
6	1.968	1.816	1.665	1.472	1.361
7	1.968	1.814	1.663	1.470	1.359
8	1.968	1.813	1.662	1.468	1.360

图1 $\lambda = 3$ 时的 α - μ 曲线

λ 取其它值时的曲线基本上与 $\lambda = 3$ 时的曲线重合。

求其极小值, 拟合出 μ 。对于不同的 α 与 λ 计算结果见表 1。 α - μ 曲线见图 1。

由图 1 可以看出, μ 对于 α 的依赖性很强。随着 α 的减小, μ 的值明显地增大, 最大不超过 2。模型参数 α 取值越小, 相当于动力学起伏越弱, Levy 指数越接近于 2。这说明当动力学起伏较小时, 中心极限定理近似地适用。当 α 增大时, 动力学起伏变大, 对中心极限定理出现严重的偏离。这些结果符合于文献[4]的预言。

由表 1 可以看出, Levy 指数 μ 对于 λ 的依赖性不明显。这表明, Levy 指数与基元分割数 λ 的取值关系不大。

这是可以理解的。对于有严格标度行为的 α 模型而言, $\zeta = \sum_{i=1}^v \ln \omega_i$ 的极限行为只与 ω_i 本身的起伏的大小有关, 而与基元分割数 λ 的大小无关。这就导致了 μ 与 λ 的无关性。

4 两种模型对间歇指数的 MC 模拟

为了将改进后的模型和原来的模型进行比较, 我们分别用(7)式和(8)式作为基元分

表2 取不同基元几率分布的 α 模型的间歇指数 φ

	以(7)式为基元几率分布			以(8)式为基元几率分布		
	$\alpha = 0.33$	0.7	1	0.447	0.7	1
$q = 2$	0.0223	0.103	0.231	0.0225	0.053	0.106
3	0.065	0.287	0.593	0.065	0.152	0.289
4	0.128	0.534	1.049	0.128	0.289	0.528
5	0.208	0.831	1.576	0.207	0.458	0.811

布的几率,对于 $\lambda = 3$ 的情况,做一万个事件的 MC 模拟,计算间歇指数 φ_q 。结果如表 2。

从两种模型的对比来看,基元分布(8)式的起伏比(7)式的起伏要小,所以在两种模型取相同的 α 值时,对应的间歇指数并不一致。但是,在新模型中取较大的 α 值时可以得到与旧模型中取较小 α 值相同的间歇指数。这表明两种模型可以同样好地用来描述间歇现象。

由表 2 可以看到,用这一类模型所能得到的间歇指数有上限。当 $\lambda = 3$ 时,两种模型所能得到的最大间歇指数(对应于 $\alpha = 1$) 分别为:

$$\varphi_2^{\max} = 0.23, \varphi_3^{\max} = 0.59, \varphi_4^{\max} = 1.05, \varphi_5^{\max} = 1.58, \text{ (以(7)式为基元几率)}$$

$$\varphi_2^{\max} = 0.106, \varphi_3^{\max} = 0.289, \varphi_4^{\max} = 0.53, \varphi_5^{\max} = 0.81, \text{ (以(8)式为基元几率)}$$

由于实验测量到的间歇指数^[10]远低于上述值,这一限制并不影响这两个模型在高能多重产生中的应用。

5 结 论

在这篇文章中,我们对 α 模型作了改进,提出了一种新的模型。其特点是:

1. 基元分割几率的表达式是线性的,且能适用于 $\lambda > 2$ 的情形;
2. 每代基元分割几率满足归一化,各个基元几率有平权性质,它们之间由归一化产生的关联也是平权的;
3. 便于作解析计算,可以导出基元几率的各阶矩 $\langle \omega^q \rangle$, 进而得到 Levy 稳定性指数 μ 的值。

由新的 α 模型出发,用解析的方法对 Levy 指数进行了研究,得到的结论是:

1. Levy 指数不大于 2。当动力学起伏很小时,近似服从中心极限定理, Levy 指数等于 2。
2. 随着动力学起伏的增加, Levy 指数逐渐减小。动力学起伏越大,对中心极限定理的偏离越大;
3. Levy 指数不明显依赖于基元分割数 λ_0 。

可以期望,利用本文提出的模型,能有助于通过解析计算澄清间歇现象研究中的其它一些问题。

正如引言中指出的,三维实验中出现了 $\mu > 2$ 的情形^[6],不符合 Levy 稳定性的要求。这可能意味着,在高维相空间中有不同于自相似级联的行为^[7]。对这一有兴趣的问题的研究正在进行中。

参 考 文 献

- [1] E.A. De Wolf, I.M. Dremin and W. Kittel, Scaling Laws for Density Correlations and Fluctuations in Multiparticle Dynamics. HEN-326(1993), IHE-93.01, FIAN/TD-09/93.
- [2] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B308**(1988)857.
- [3] J.M. Alberty and A. Bialas, *Z. Phys.*, **C50**(1991)315.
- [4] Ph. Brax and R. Peschanski, *Phys. Lett.*, **B253**(1991)225.
- [5] J.P. Bouchaud and A. Georges, *Phys. Rep.*, **195**(1990)127; B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Addison Wesley, Reading, MA, 1954).
- [6] 吴元芳、张昆实、刘连寿,科学通报, **36**(1991)21.
- [7] Wu. Yuanfang and Liu lianshou, *Phys. Rev. Lett.*, **70**(1993)3197.
- [8] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B273** (1986) 703.
- [9] W. Ochs, *Phys. Lett.*, **B247**(1990)101.
- [10] N. Schmitz, in Proc. XXI Int. Symp. on Multiparticle Dynamics, Wuhan, China, 1991, Eds. Y.F. Wu and L.S. Liu (World Scientific, Singapore 1992) p. 377.

The Refinement of α Model and the Analytical Calculation of Levy Exponent

Lin Hai Zhang Yang Liu Lianshou

(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

Received on January 13, 1994

Abstract

In order to investigate the intermittency behaviour in high energy collisions using the Levy stability theory, it is necessary to develop a method for the analytical calculation of Levy exponent. In view of this, the random cascading α model is refined to make the expression of the probability ω of elementary division linear. Using this model, the Levy exponent is calculated analytically. The results are consistent with the theoretical prediction. The analytical expression for the moments of ω is obtained. In order to compare the present model with the original one, the MC simulation is done for both models, and the intermittency indices are calculated, showing that both models are practical and reliable.

Key words high energy collision, intermittency, fractal, Levy stability, random cascading model.