

格点变模 $SU(2)$ -Higgs 模型的 解析计算*

刘备书 郑希特

(四川联合大学应用物理系 成都 610065)

1994-12-7 收稿

摘 要

在四维空间对格点 $SU(2)$ -Higgs 模型的序参量 $E_p = \langle \text{tr} U_p \rangle$ 用累积展开计算到四级近似, Higgs 场为基础表示, 发展了定双变分参数的办法, 得到的相图与蒙特卡罗结果有好的符合.

关键词 格点规范, 累积展开, $SU(2)$ -Higgs 模型.

1 引 言

在格点规范理论中, 对 $SU(2)$ 规范场与 Higgs 场的耦合系统的研究一直受到人们的关注. 这是由于对这模型的深入研究有助于对 Higgs 机制和对 Higgs 粒子性质的理解, 而且, 可为在格点上引入其它物质场在方法上提供借鉴.

关于这系统最有趣的问题之一是相变和相变的级别. 当 Higgs 场为变模时, 蒙特卡罗(MC)模拟^[1-3]表明有两个相: 禁闭相和 Higgs 相, 并且在基础表示下对足够小的 Higgs 场的自耦合常数, 这两个相是被相变线所完全分开的, 但是, 相变级别尚不确定. 有些工作认为相变是一级的^[4], 而另外的工作则倾向于是二级^[1]. 同时, 在解析工作方面也作了一些努力以期避免 MC 模拟的局限和获得更多的物理认识, 但 Gerdt 等^[5]只是在 $\beta=0$ 和 $\beta=\infty$ 的极限情形下用有效势进行了近似计算, Damgaard 和 Heller^[4]用平均场技术计算了在基础表示中的变模 Higgs 场的耦合系统的相图, 但是在中间耦合区的相变不能确定.

运用变分-累积展开方法(VCE)^[5]我们曾计算了基础表示下变模 Higgs 场的 $SU(2)$ -Higgs 模型的相图^[6]. 所得到的相图在整个耦合常数的区间都与 MC 结果相近. 但是, 在文献[6]中变分参数的确定采用了二级近似的自由能极小的变分条件, 这条件不能一般地予以论证.

这解析结果可以从两个方向上加以改进: 更仔细地确定变分参数以使展开能更快地收敛和进行高阶计算.

* 国家自然科学基金资助.

对参数进行扫描可以较容易看出在参数取何值时展开能有最好的收敛行为. 迄今只在纯规范模型中提出并实行了单一参量的扫描^[7,8].

在本文中采用累积展开至4级并发展了在SU(2)-Higgs耦合系统对双参数扫描以获得最快收敛的办法. 这样, 得到了迄今最佳的解析计算的相图. 在下一节中描述模型的4级累积展开. 在第三节给出双变分参数的确定办法. 在第四节给出计算出的相图和讨论.

2 模型和累积展开

在四维超立方格子上, SU(2)-Higgs模型(Higgs场在基础表示中)的作用量为^[1,2]

$$S = S_g - \lambda \sum_x (\rho_x^2 - 1)^2 - \sum_x \rho_x^2 + \kappa \sum_{x,\mu} \rho_x \rho_{x+\mu} \text{tr} U_{x,\mu}, \quad (1)$$

$$S_g = \frac{\beta}{4} \sum_P \text{tr} (U_P + U_P^\dagger) = \frac{\beta}{2} \sum_P \text{tr} U_P, \quad (2)$$

这里的符号和 ρ_x 的不变测度同[6]. 引入试探作用量

$$S_0 = J \sum_{x,\mu} \text{tr} U_{x,\mu} - \alpha \sum_x \rho_x, \quad (3)$$

这里 J, α 是待定的两个实参数. 作为系统序参量的元格能量可表示为^[9]

$$E_P = \langle \text{tr} U_P \rangle = \langle \text{tr} U_P \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \text{tr} U_P (S - S_0)^n \rangle_c, \quad (4)$$

这里 $\langle \dots \rangle_0$ 是在作用量为 S_0 的辅助系统中的统计平均, $\langle \dots \rangle_c$ 则是在该系统中的累积平均. 至第 i 级近似, (4)式可改写成下面易于计算的形式^[9]

$$E_P \approx E_{Pi} = E_{P0} + \Delta_i E_P, \quad (5)$$

其中

$$E_{P0} = \langle \text{tr} U_P \rangle_0 \equiv P_0; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i E_P = & \sum_{n=1}^i \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{l=0}^n (-1)^l \sum_{m=0}^l C_l^m \left(J^{l-m} \frac{\partial^{l-m}}{\partial J^{l-m}} \right) \right. \\ & \left. \times \left(\alpha^m \frac{\partial^m}{\partial \alpha^m} \right) \langle \text{tr} U_P S^{n-l} \rangle_c \right\} \equiv \sum_{n=1}^i P_n. \end{aligned} \quad (7)$$

本文计算到 $i=3$. 这相当于做到四级近似, 因为展开中元格的最高幂次为4.

P_n 的开头若干项为:

$$P_1 = \langle \text{tr} U_P \cdot S \rangle_c - J \frac{\partial}{\partial J} \langle \text{tr} U_P \rangle_0, \quad (8)$$

$$P_2 = \langle \text{tr} U_P \cdot S^2 \rangle_c - 2 \left(J \frac{\partial}{\partial J} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \langle \text{tr} U_P \cdot S \rangle_c + J^2 \frac{\partial^2}{\partial J^2} \langle \text{tr} U_P \rangle_0, \quad (9)$$

$$P_3 = \langle \text{tr} U_P \cdot S^3 \rangle_c - 3 \left(J \frac{\partial}{\partial J} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \langle \text{tr} U_P \cdot S^2 \rangle_c \\ + 3 \left(J \frac{\partial}{\partial J} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^2 \langle \text{tr} U_P \cdot S \rangle_c - J^3 \frac{\partial^3}{\partial J^3} \langle \text{tr} U_P \rangle_0. \quad (10)$$

为简化表达式, 采用 [6] 中的图形表示, 于是

$$\langle \text{tr} U_P \rangle_0 = \alpha_{1,i} \gamma_{1,i} \langle D_{1,i} \rangle_c, \quad (11)$$

$$\langle \text{tr} U_P S \rangle_c = \sum_{i=1}^3 \alpha_{2,i} \gamma_{2,i} \langle D_{2,i} \rangle_c, \quad (12)$$

$$\langle \text{tr} U_P S^2 \rangle_c = \sum_{i=1}^{13} \alpha_{3,i} \gamma_{3,i} \langle D_{3,i} \rangle_c, \quad (13)$$

$$\langle \text{tr} U_P S^3 \rangle_c = \sum_{i=1}^{65} \alpha_{4,i} \gamma_{4,i} \langle D_{4,i} \rangle_c, \quad (14)$$

对 $n=1, 2, 3$, $\alpha_{n,i} \gamma_{n,i}$ 和 $\langle D_{n,i} \rangle_0$ 可以在文献 [6] 的表 1 的相应的行中找到, 即 $n=1$, $i=1$; $n=2$, $i=1, 2, 8$ 和 $n=3$, $i=1-5, 13-15, 22-25, 40$ 各行. 为节约篇幅 $n=4$ 的各值不在此列出.

3 参数 J 和 α 的确定

由于取 $E_{P_i}(\beta, \kappa, \lambda, J, \alpha) = \sum_{n=0}^i P_n$ 作为严格的元格能量 $E_P(\beta, \kappa, \lambda)$ 的 i 级近似, 如何确定参数 J 和 α 是关键性的. 一般说, 变分参数是由能量极小条件确定. 但是, 在作逐级近似计算时, 却不能保证每一级近似的能量应该最低, 只一级近似除外, 那里是由于 Jensen 不等式保证了一级变分条件成立. 为找到定 J 和 α 的更好的判据, 我们把“聚点法”^[7] 推广到双参数 J 和 α 的情形, 对 J 和 α 在相当宽的范围扫描以寻找使 E_{P_i} 最快收敛的聚点值 (J^*, α^*) .

只依赖于 J 的 E_{P_0} 可视为辅助系统中的元格能量, 依赖于 $\beta, \kappa, \lambda, J$ 和 α 的 $\Delta_i E_P$ 则是对 E_{P_0} 的 i 级修正, 因此, 对给定的 β, κ 和 λ , 对 J 和 α 的所有可能值扫描, 将得到由 E_{P_i}, J 和 α 三个轴形成的第一象限中的一个扫描曲面 $E_{P_i}(J, \alpha)$, 类似于单参量的情形, 取

$$E_P \cong E_{P_i}(\beta, \kappa, \lambda, J, \alpha) \Big|_{\substack{J=J_i \\ \alpha=\alpha_i}} = E_{P_0}(J) \Big|_{J=J_i}, \quad (15)$$

J_i 和 α_i 是下式的解:

$$|\Delta_i E_P| = 0. \quad (16)$$

如果 (J_i, α_i) 对不同的 i 级都同为 (J^*, α^*) 或是随 i 增大而趋于同一极限值 (J^*, α^*) , 那么, (15) 式就给出了 E_P 的一个很好的近似, 因为对 $E_{P_0}(J_i)$ 一直到 i 级的所有修正都是零. 换言之, E_{P_i} 的至 i 级近似的累积展开序列在 (J_i, α_i) 值处有最佳收敛行为.

以固定 $\beta = 2.0$, $\kappa = 0.23$ 和 $\lambda = 0.1$ 为例说明定 J 和 α 的过程. 从 $\alpha = 1.5$ 开始, 逐步在固定的 α 值下把 J 从 0.01 扫描到 40. 如果对 $\alpha = 1.5$, 在 J 取扫描的任何值时 E_{p_0} 和 E_{p_i} ($i = 1, 2, 3$) 都没有交点, 则取下一个 α 值和重新扫描 J , 这个过程一直继续到当 $\alpha = \alpha_m$ 时, 每一个 E_{p_i} 与 E_{p_0} 都有交点 J_i , 于是, 在 α_m 附近的一个区域里减小 α 改变的步长重新扫描, 如此继续下去, 可以达到一个 E_{p_0} 和 E_{p_i} 的各交点尽可能聚到一块的 (J_i, α_i) 值, 如图 1 所示, 有 $(J_1, \alpha_1) = (16.42, 4.01)$, $(J_2, \alpha_2) = (15.24, 4.01)$ 和 $(J_3, \alpha_3) = (15.25, 4.01)$.

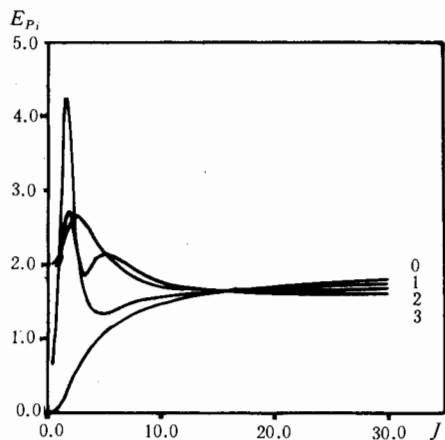


图 1 $E_{p_i}(J)$ 的扫描图

$i = 0 - 3$, $\beta = 2.0$, $\kappa = 0.23$, $\lambda = 0.1$, $\alpha = 4.01$.

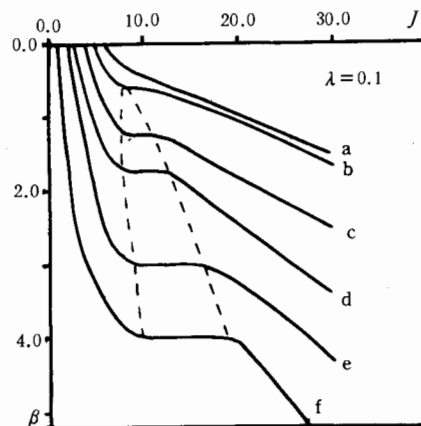


图 2 $\beta = \beta(J_3, \alpha_3)$ 在 β - J 面上投影的 β - J 关系曲线

$\lambda = 0.1$ 和 $\kappa = 0.30$ (a), 0.295 (b), 0.25 (c), 0.23 (d), 0.20 (e), 0.19 (f).

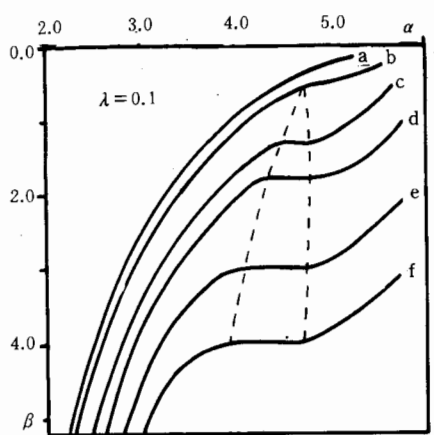


图 3 $\beta = \beta(J_3, \alpha_3)$ 在 β - α 面上投影的 β - α 关系曲线

$\lambda = 0.1$ 和 $\kappa = 0.30$ (a), 0.295 (b), 0.25 (c), 0.23 (d), 0.20 (e), 0.19 (f).

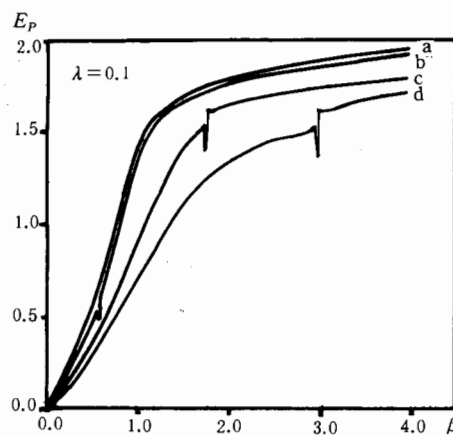


图 4 $E_p(\beta)$ 曲线

$\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.31$ (a), 0.29 (b), 0.23 (c), 0.20 (d)
峰位置: 对 $\kappa = 0.20$, $\beta_t = 3.04$; $\kappa = 0.23$,
 $\beta_t = 2.00$; $\kappa = 0.29$, $\beta_t = 0.58$;
 $\kappa = 0.31$ 峰消失.

由(15)式, 在固定 β , κ , λ 时, $E_{p_0}(J_3)$ 是计算到三阶展开时的最好近似, 因为

$E_{p0}(J_i)(i=1, 2, 3)$ 显示了最好的收敛行为. 对固定的 λ 和 κ , 每一个 β 值对应着自己的一对值(J_3, α_3), 这个关系 $\beta = \beta(J_3, \alpha_3)$ 是 β - J - α 三维空间中一根曲线, 把它向 β - J 和 β - α 面上投影, 可以得到如图2和图3上所示的曲线, 图中各线对 $\lambda=0.1$ 和若干 κ 值给出.

在图2和图3中小于某个 κ 值的 $J(\beta)$ 或是 $\alpha(\beta)$ 含有一段平坦线段, 其端点的连线用虚线表示, 在平坦线段上的每一点斜率 $\frac{\partial J}{\partial \beta}$ 或 $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}$ 几乎为零, 这意味着参数 J, α , 从而 E_p , 在 $\beta = \beta_i$ (平坦段的纵座标)附近对 β 的变化非常敏感, 如图4所示, $E_p(\beta)$ 曲线在 $\beta = \beta_i$ 处有峰值, 对应着 $J(\beta)$ 或 $\alpha(\beta)$ 的平坦线段. 当 κ 增大时, 峰逐渐降低至 κ_c 时消失, 与此同时, 平坦线段逐渐变窄而消失于 κ_c 值, 相应纵轴座标给出 β_c . 图2和图3相似于热力学中的范德瓦尔斯方程的等温线, 水平区段标志出相变的发生. 逐渐减小 β , 相应的一对值(β_i, κ)在 β - κ 平面上正好给出相变线 $\kappa(\beta_i)$, 其端点为(β_c, κ_c).

4 相图和结论

从图4中 $E_p(\beta)$ 的峰以及从图2和图3, 得到相变线和相变的阶. 因为在 λ, κ 固定时, $E_p(\beta)$ 正比于自由能对 β 的一阶导数, $E_p(\beta)$ 表明了自由能的一阶导数连续, 而自由能的二阶导数(比例于 $E_p(\beta)$ 对 β 的一阶导数)在 $\beta = \beta_i$ 峰值处显然是不连续的. 于是可以得到结论: 对给定的 λ 值 $\kappa(\beta_i)$ 在 β - κ 面上给出二级相变线, 其端点(β_c, κ_c)为更高级的相变点. 这样定出的相图以实线画在图5上. 为了和MC结果^[1]比较, 选定了 λ 从0到5的若干值画出. 这些相变线, 尤其是对较小的 λ , 与MC有好的符合, 对 $\lambda=5.0$ 的点划线则取自^[6], 以便比较. 这结果表明累积展开和现在改进了的定双参数的办法的确是成功的.

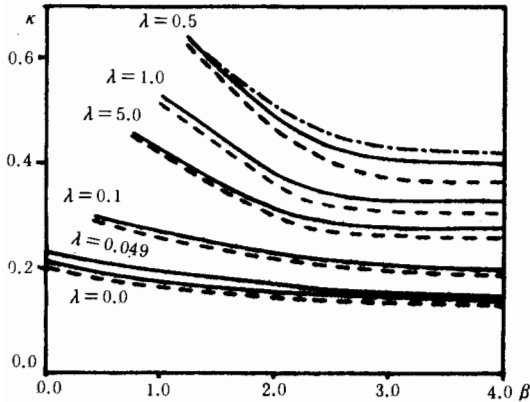


图5 在 κ - β 面上对若干 λ 值的相图
实线为计算结果, 虚线为MC结果^[1]点划线为
[6]所给出.

的, 而对于 $0 \leq \lambda \leq 0.049$, 两个相是截然分开的.

结论是: 用本文定变分参数 J 和 α 的方法, 变分累积展开对 $SU(2)$ -Higgs系统有着良好的收敛行为, 在整个耦合常数区间都有效地工作, 给出了与MC模拟很好符合的二级相变线. 为使结果更进一步精确, 特别是对较大的 λ 值, 则需作更高级的展开.

参 考 文 献

- [1] H. Kuhnelt, C. B. Lang, G. Vones, *Nucl. Phys.*, **B230** [FS10] (1984) 16.
- [2] S. Gupta, V. M. Heller, *Phys. Lett.*, **138B** (1984) 171; J. Jersak, C. B. Lang, T. Neuhaus et al., *Phys. Rev.*, **D32** (1985) 2761; I. Montvay, *Nucl. Phys.*, **B269** (1985) 170; W. Langguth, I. Montvay, P. Weisz, *Nucl. Phys.*, **B277** (1986) 11; W. Langguth, I. Montvay, *Phys. Lett.*, **165B** (1985) 135.
- [3] V. P. Gerdt, A. S. Ilchev, V. K. Mitrjushkin et al., *Nucl. Phys.*, **B265** [FS15] (1986) 145.
- [4] P. H. Damgaard, U. M. Heller, *Phys. Lett.*, **164B** (1985) 121.
- [5] X. T. Zheng, Z. G. Tan, J. Wang, *Nucl. Phys.*, **B287** (1987) 171.
- [6] X. T. Zheng, B. S. Liu, *Int. J. Mod. Phys.*, **A6** (1991) 103.
- [7] W. Kerler, *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) 1906; L. Schulke, *Phys. Lett.*, **B208** (1988) 495.
- [8] W. Keller, T. Metz, *Phys. Rev.*, **D44** (1991) 1263.
- [9] X. T. Zheng, C.-I Tan, *Chinese Phys. Lett.*, **5** (1988) 457; *Phys. Rev.*, **D39** (1989) 623.

Analytical Calculation of Lattice $SU(2)$ -Higgs Model with Varied Length

Liu Beishu Zheng Xite

(Department of Applied Physics, Sichuan Union University, Chengdu 610065)

Received 7 December 1994

Abstract

The order parameter $E_p = \langle \text{tr} U_p \rangle$ of the lattice $SU(2)$ -Higgs model in four dimensions is calculated using the cumulant expansion to the fourth order approximation. The Higgs field is in the fundamental representation. An approach for determining two variational parameters is developed. The phase diagram obtained is in a good agreement with the Monte Carlo result.

Key words lattice gauge, cumulant expansion, $SU(2)$ -Higgs model.