第19卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 19, No. 6
1995年6月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS June, 1995

纵向阻尼系统

徐建铭[1)]
(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

1994-04-13 收稿

摘 要

讨论了纵向阻尼系统参数和加速器参数及要求的阻尼速度之间的关系，给出决定纵向阻尼系统参数的计算公式.比较了正比阻尼系统和常电压阻尼系统.后者只需要较少的校正功率,便能达到同样的阻尼效果.

关键词 加速器纵向阻尼系统,阻尼速度,正比阻尼系统,常电压阻尼系统.

1 引 言

在环形加速器里,由于注入误差或受不稳定作用的激励,如果束团中心没有位于加速器纵向接受度的中心 E_s 和 φ_s，相对于中心有一偏离量 $\Delta\varphi_0$ 和 $\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0$，则束团中心将围绕 φ_s、E_s 作相干振荡. φ_s 和 E_s 分别是同步相角和同步能量,而 $\Delta\varphi_0$ 和 $\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0$ 由下式表示:

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi_s, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0 = \frac{E_0 - E_s}{E_s}. \tag{2}$$

式中 φ_0 和 E_0 分别是束团中心的起始相角和能量. 即使束团的纵向发射度和加速器纵向接受度相匹配,由于束团中心有偏离量 $\Delta\varphi_0$ 和 $\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0$,以及纵向振荡频散 $\Delta\nu_s$,束团将逐渐稀释. 大约经过 $\frac{1}{\Delta\nu_s}$ 圈以后,束团将分布在一个和加速器匹配的相空间里,它对称于接受度中心 φ_s、E_s,但面积比起始发射度要大. 纵向阻尼系统能阻尼束团相干运动,减少 $\Delta\varphi_0$ 及 $\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0$ 所引起的纵向稀释作用.

加速器里粒子的纵向运动方程是

$$\frac{E_s\beta^2}{h\eta\omega_s^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{ZeV_s}{2\pi}(\sin\varphi - \sin\varphi_s). \tag{3}$$

式中 $\varphi = \varphi_s + \Delta\varphi$ 是粒子的相角, $\beta = \frac{v}{c}$ 是相对论速度, h 是谐波次数, ω_s 是同步粒

1) 通讯地址: 北京2732信箱物理室徐清转交,邮编100080.

子迴旋角频率，Ze 是粒子的电荷，η 如下式所示，

$$\eta = \frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2}, \tag{4}$$

其中 $\gamma = \frac{E_s}{E_0}$ 是相对论能量因子，γ_t 是加速器临界能量的 γ 值．在小振幅近似下，即 $\Delta\varphi \ll 1$，纵向运动方向可近似成下式：

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta\varphi - \left[\frac{h\eta\omega_s^2 ZeV_s}{2\pi E_s\beta^2}\cos\varphi_s\right]\Delta\varphi = 0, \tag{5}$$

和粒子的横向运动方程相仿，都是希尔方程．同样可以采用转换矩阵以及纵向 Twiss 参量来分析和描述纵向运动．束团中心相干运动的振幅比较小，例如 $\Delta\varphi$ 约 1° 左右，$\frac{\Delta E}{E_s}$ 约 10^{-4}．在这种情况下，用上述的小振幅纵向运动方程来描述相干相运动，是一个很好的近似．

为了近似地估计误差 $\Delta\varphi_0$、$\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0$ 可能引起的纵向稀释作用，也采用线性化的纵向运动方程．在这一近似条件下，纵向接受度和匹配的发射度都是相空间椭圆．但实际纵向接受度是"鱼形"的．束团起始发射度的边界方程是

$$S_0^2 = \gamma_1(\Delta\varphi - \Delta\varphi_0)^2 + 2\alpha_1(\Delta\varphi - \Delta\varphi_0)\left[\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right) - \left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0\right] + \beta_1\left[\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right) - \left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0\right]^2. \tag{6}$$

式中 S_0^2 是束团的起始发射度，β_1、α_1 和 γ_1 是当地的纵向 Twiss 参数．扩散后束团将分布在一个匹配的相椭圆里，它包围并外切于上式描述的椭圆，并对称于接受度原点 $\Delta\varphi = 0, \frac{\Delta E}{E_s} = 0$．它的边界方程是：

$$S^2 = \gamma_1\Delta\varphi^2 + 2\alpha_1\Delta\varphi\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right) + \beta_1\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)^2. \tag{7}$$

S^2 是扩散后束团的发射度．S^2 和 S_0^2 的比值称为扩散系数，它的表示式是

$$\frac{S^2}{S_0^2} = \left[1 + \sqrt{\frac{S_{c0}^2}{S_0^2}}\right]^2, \tag{8}$$

式中

$$S_{c0}^2 = \gamma_1\Delta\varphi_0^2 + 2\alpha_1\Delta\varphi_0\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0 + \beta_1\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_0^2. \tag{9}$$

下面将分析纵向阻尼系统的工作情况，思路和分析横向阻尼系统[1]类似．阻尼系统由束团探测装置、信号处理系统、放大器和校正装置组成．束团探测装置探测束团中心的 $\frac{\Delta E}{E_s}$ 或者 $\Delta\varphi$．位于色散函数相同而径向振荡相移为 π 的奇整数倍的两个径向位置探测器的输出讯号之和正比于束团的 $\frac{\Delta E}{E_s}$，且不受径向相干振荡的影响．比较高频加速电压和束团探测器中束团感应讯号，便能测得束团中心的相角 φ，以求得 $\Delta\varphi$．校正装置

可以是产生矩形波加速电场的宽带校正腔或纵向冲击磁体以校正束团的 ΔE. 也可以是产生正弦波，但和主加速腔相位相差 $\pi/2$ 的宽带校正腔，它可以校正束团的 $\Delta\varphi$. 限于篇幅，本文只讨论测量 $\frac{\Delta E}{E_s}$，校正 ΔE 的情况，其他情况，如测量 $\Delta\varphi$，校正 ΔE；或测量 $\Delta\varphi$，校正 $\Delta\varphi$ 等，将在另文中讨论. 究竟选用那种方式，要根据加速器的具体情况决定.

束团探测装置的讯号经处理、放大后传送到安放在另一地点的校正装置，以校正束团的相干振荡. 探测装置和校正装置之间应有适当距离，放大后的讯号也应沿尽可能短的途径输送到校正装置，使得被测束团到达校正装置时，能及时受到校正. 阻尼系统的带宽应能使校正电压的建立时间小于相邻束团间的时间间隔，以保证各个束团能独立地被校正.

和横向阻尼系统相仿，通用的纵向阻尼系统的校正电压正比于探测装置测得的讯号 $\Delta\varphi$ 或 $\frac{\Delta E}{E_s}$，称之为正比阻尼系统. 在常电压阻尼系统中，校正电压维持为常数，测量装置测得的束团中心的参数只用来控制校正电压的符号，使它起阻尼作用. 这一系统同样能起良好的阻尼作用，而所需的校正功率比正比阻尼系统的最大校正功率要小. 这是因为常电压阻尼系统的校正装置一直在最高电压下工作，正比阻尼系统的校正系统在测量讯号小时，则在低电压下工作，为了达到同样的阻尼速度，正比阻尼系统要有较大的工作电压和校正功率容量.

2　正比阻尼系统

用向量 $\Phi_{p,n}$ 代表束团中心在相空间的座标，即

$$\Phi_{p,n}=\begin{pmatrix}\Delta\varphi_{p,n}\\ \left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}\end{pmatrix},\tag{10}$$

下角标“p, n”表示第 n 次通过束团探测装置时的相关参数. 束团第 $n+1$ 次通过探测装置时，向量 $\Phi_{p,n+1}$ 如下式所示：

$$\Phi_{p,n+1}=M_{cp}M_cM_{kc}M_kM_{pk}\Phi_{p,n}=M\Phi_{p,n},\tag{11}$$

式中 M_{cp}、M_{kc}、M_{pk} 分别是从主加速腔到束团探测装置、从束团校正装置到主加速腔和从束团探测装置到校正装置的纵向转换矩阵. M_c 和 M_k 分别是主加速腔和校正装置的转换矩阵. 在加速器上沿粒子迴旋轨道依次安放有探测装置、校正装置和主加速腔. 这些装置的中点之间的中心轨道长度依次为 l_{pk}, l_{kc} 和 l_{cp}，三个长度之和为 L，即加速器中心轨道的总长度. 式中 M 是有阻尼作用时，一圈的总转换矩阵.

束团第 n 次通过校正装置时，校正电压是 $V_{k,n}$. 它正比于 $\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}$，即

$$V_{k,n}=-G\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}.\tag{12}$$

第 n 次通过校正装置后，束团能量的改变量是 δE_n，相角没有变化. 而 δE_n 是

$$\delta E_n = ZeV_{k,n} = -K\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}, \tag{13}$$

式中

$$K = ZeG, \tag{14}$$

由于

$$M_k \Phi_{k,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi_{k,n} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\delta E_n}{E_s} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

所以

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{K}{E_s}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M_{pk}^{-1}. \tag{16}$$

把式(16)代入式(11),便得到有阻尼作用时一圈的转换矩阵M的表示式,

$$M = M_0 + M_{cp}M_cM_{kc}\frac{K}{E_s}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

式中 M_0 是没有阻尼作用时,在束团探测装置处的一圈转换矩阵,它可表示为

$$M_0 = \begin{pmatrix} \cos\mu_0 + \alpha_p \sin\mu_0 & \beta_p \sin\mu_0 \\ -\gamma_p \sin\mu_0 & \cos\mu_0 - \alpha_p \sin\mu_0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

上式中 μ_0 是没有阻尼作用时,一圈的相振荡相移. 它的表示式是

$$\mu_0 = 2\pi\left[\frac{-ZeV_s h\eta}{2\pi E_s \beta^2}\cos\varphi_s\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

μ_0 是一个小量,一般约 10^{-2} 甚至 10^{-3}. β_p、α_p、γ_p 是束团探测装置处的纵向 Twiss 参数。另外,

$$M_{cp}M_cM_{kc} = M_{kp} \tag{20}$$

是从校正装置到探测装置的转换矩阵,它可表示为

$$M_{kp} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\beta_p}{\beta_k}}(\cos\varphi_{kp} + \alpha_k \sin\varphi_{kp}) & \sqrt{\beta_p\beta_k}\sin\varphi_{kp} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\beta_p\beta_k}}[(\alpha_k - \alpha_p)\cos\varphi_{kp} - (1+\alpha_p\alpha_k)\sin\varphi_{kp}] & \sqrt{\dfrac{\beta_k}{\beta_p}}(\cos\varphi_{kp} - \alpha_p \sin\varphi_{kp}) \end{pmatrix} \tag{21}$$

式中 β_k、α_k、γ_k 是在校正装置处的 Twiss 参数,而 φ_{kp} 是从校正装置到探测装置的相移. 把式(18,20,21)代入式(17),便得到有阻尼作用时,一圈的转换矩阵. 它是

$$M = \begin{pmatrix} \cos\mu_0 + \alpha_p \sin\mu_0 & \beta_p \sin\mu_0 - \dfrac{K}{E_s}\sqrt{\beta_p\beta_k}\sin\varphi_{kp} \\ -\gamma_p \sin\mu_0 & \cos\mu_0 - \alpha_p\sin\mu_0 - \dfrac{K}{E_s}\sqrt{\dfrac{\beta_k}{\beta_p}}(\cos\varphi_{kp} - \alpha_p\sin\varphi_{kp}) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

相干振荡的阻尼速度由转换矩阵M的本征值λ决定. λ是下述二次方程的根:

$$\lambda^2 - \left[2\cos\mu_0 - \frac{K}{E_s}\sqrt{\frac{\beta_k}{\beta_p}}(\cos\varphi_{kp} - \alpha_p\sin\varphi_{kp})\right]\lambda + \mathrm{Det}M = 0. \tag{23}$$

而M的行列式 Det$M$ 如下式所示,

$$\mathrm{Det}M = 1 + \sqrt{\frac{\beta_k}{\beta_p}}(\cos\varphi_{pk} + \alpha_p \sin\varphi_{pk})\left(\frac{-K}{E_s}\right), \tag{24}$$

式中 φ_{pk} 是从探测装置到校正装置的相移．并且 $\mu_0 = \varphi_{kp} + \varphi_{pk}$.

下面将推导纵向转换矩阵和加速器参数间的关系，以最后确定 λ．在小振幅近似下，相角误差为 $\Delta\varphi$ 的粒子通过主加速腔后，能量误差 ΔE 改变 δE，相角误差没有变化．δE 为：

$$\delta E = ZeV_s[\sin(\varphi_s + \Delta\varphi) - \sin\varphi_s] \cong ZeV_s\Delta\varphi\cos\varphi_s. \tag{25}$$

所以主加速腔的转换矩阵 M_c 是：

$$M_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{ZeV_s\cos\varphi_s}{E_s} & 1 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

能量相对误差为 $\dfrac{\Delta E}{E_s}$ 的粒子通过长度为 l 的纵向漂移段后，相角误差将改变 $\delta\varphi$，能量误差 $\dfrac{\Delta E}{E_s}$ 没有变化．而

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\frac{l}{\beta c}. \tag{27}$$

已知

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h\eta}{\beta^2}\omega_s\frac{\Delta E}{E_s},$$

于是

$$\delta\varphi = \frac{2\pi h\eta}{\beta^2}\frac{l}{L}\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right). \tag{28}$$

从式(28)便求出长度为 l 的纵向漂移段的转换矩阵 M_1 的表示式，

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2\pi h\eta}{\beta^2}\dfrac{l}{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

因此，

$$M_{pk} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2\pi h\eta}{\beta^2}\dfrac{l_{pk}}{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

而

$$M_{pk} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\beta_k}{\beta_p}}(\cos\varphi_{pk} + \alpha_p\sin\varphi_{pk}) & \sqrt{\beta_p\beta_k}\sin\varphi_{pk} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\beta_p\beta_k}}[(\alpha_p - \alpha_k)\cos\varphi_{pk} - (1 + \alpha_p\alpha_k)\sin\varphi_{pk}] & \sqrt{\dfrac{\beta_p}{\beta_k}}(\cos\varphi_{pk} - \alpha_k\sin\varphi_{pk}) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

所以

$$\sqrt{\frac{\beta_k}{\beta_p}}(\cos\varphi_{pk} + \alpha_p\sin\varphi_{pk}) = 1. \tag{32}$$

另外，利用式(20,26,29)可得到

$$M_{\mathrm{kp}}=\begin{pmatrix}1-\mu_0^2\dfrac{l_{\mathrm{cp}}}{L} & \dfrac{2\pi h\eta}{\beta^2}\left[\dfrac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\left(1-\mu_0^2\dfrac{l_{\mathrm{cp}}}{L}\right)+\dfrac{l_{\mathrm{cp}}}{L}\right]\\ \dfrac{ZeV_s\cos\varphi_s}{E_s} & 1-\mu_0^2\dfrac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\end{pmatrix}, \tag{33}$$

所以

$$\sqrt{\frac{\beta_{\mathrm{k}}}{\beta_{\mathrm{p}}}}(\cos\varphi_{\mathrm{kp}}-\alpha_{\mathrm{p}}\sin\varphi_{\mathrm{kp}})=1-\mu_0^2\frac{l_{\mathrm{kc}}}{L}. \tag{34}$$

把式(24,32,34)代入式(23)，化简为

$$\lambda^2-\left[2\cos\mu_0-\frac{K}{E_s}\left(1-\mu_0^2\frac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\right)\right]\lambda+1-\frac{K}{E_s}=0, \tag{35}$$

如果 $\frac{K_1}{E_s}\leqslant\frac{K}{E_s}\leqslant\frac{K_2}{E_s}$，则式(35)有两个复数根. K_1 和 K_2 是下述方程

$$\left[\cos\mu_0-\frac{K}{2E_s}\left(1-\mu_0^2\frac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\right)\right]^2-1+\frac{K}{E_s}=0 \tag{36}$$

的两个根，它们是

$$\frac{K_1}{E_s}=-2\mu_0-\mu_0^2\left(1+2\frac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\right), \tag{37}$$

$$\frac{K_2}{E_s}=2\mu_0-\mu_0^2\left(1+2\frac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\right). \tag{38}$$

这时

$$\lambda=\cos\mu_0-\frac{K}{2E_s}\left(1-\mu_0^2\frac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\right)\pm\mathrm{i}\sqrt{1-\frac{K}{E_s}-\left[\cos\mu_0-\frac{K}{2E_s}\left(1-\mu_0^2\frac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\right)\right]^2}, \tag{39}$$

或者

$$\lambda=\left(1-\frac{K}{E_s}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pm\mathrm{i}\mu}. \tag{40}$$

所以，阻尼速度是每圈 $\frac{K}{2E_s}$. 式中 μ 是有阻尼作用时，一圈的纵向相移. 它的表示式是

$$\mu=\tan^{-1}\frac{\left\{1-\dfrac{K}{E_s}-\left[\cos\mu_0-\dfrac{K}{2E_s}\left(1-\mu_0^2\dfrac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\cos\mu_0-\dfrac{K}{2E_s}\left(1-\mu_0^2\dfrac{l_{\mathrm{kc}}}{L}\right)}. \tag{41}$$

为了使系统起阻尼作用，K 值应满足

$$0<K\leqslant K_2. \tag{42}$$

如果 $K>K_2$，则 λ 为实数，仍可能起阻尼作用. 但实际情况下，一般满足 $K\leqslant K_2$. 因为

$$\frac{K}{E_s}=\frac{ZeV_{\mathrm{k},n}}{\Delta E_{\mathrm{p},n}} \tag{43}$$

受校正功率的限制，K 值不会太大. 因此相干振荡振幅的变化形式是:

$$\widehat{\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)}_n=\widehat{\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)}_0 e^{-\frac{K}{2E_s}n}. \tag{44}$$

式中 $\widehat{\Delta E_n}$ 和 $\widehat{\Delta E_0}$ 是 ΔE_n 和 ΔE_0 的幅值. 如果要求经过N圈，振荡振幅阻尼到初始值的 e^{-q},则要求

$$\frac{K}{2E_s}N=q, \tag{45}$$

或者

$$ZeV_{k,n}=\frac{2q}{N}\Delta E_{p,n}. \tag{46}$$

起始时 ΔE 最大,要求的校正电压也最高. 所以正比阻尼系统要求的最大校正电压 V_{max} 是

$$V_{max}=\frac{2q}{NZe}\widehat{\Delta E_{p,0}}. \tag{47}$$

3 常电压阻尼系统[2]

束团中心相干振荡的纵向 Courant-Snyder 不变量 A_n^2 可表示为

$$A_n^2=\gamma_k(\Delta\varphi)_{k,n}^2+2\alpha_k(\Delta\varphi)_{k,n}\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{k,n}+\beta_k\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{k,n}^2. \tag{48}$$

式中 A_n^2 是束团第 n 次到达校正装置时的不变量，$\Delta\varphi_{k,n}$ 和 $\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{k,n}$ 是当时束团中心的 $\Delta\varphi$ 及 $\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)$ 值. 通过校正装置后,束团中心的 $\Delta\varphi$ 没有变化，而 $\Delta E_{k,n}$ 改变了 δE_n. 则第 n 次通过校正装置,A_n^2 的改变量是

$$\Delta(A_n^2)=2\left[\alpha_k\Delta\varphi_{k,n}+\beta_k\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{k,n}\right]\frac{\delta E_n}{E_s}+\beta_k\left(\frac{\delta E_n}{E_s}\right)^2. \tag{49}$$

忽略小量 $\frac{\delta E_n}{E_s}$ 的二次项,得到

$$\Delta A_n=\frac{1}{A_n}\left[\alpha_k\Delta\varphi_{k,n}+\beta_k\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{k,n}\right]\frac{\delta E_n}{E_s}. \tag{50}$$

考虑到

$$\Delta\varphi_{k,n}=A_n\sqrt{\beta_k}\sin\theta_{k,n}, \tag{51}$$

$$\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{k,n}=\frac{A_n}{\sqrt{\beta_k}}(-\alpha_k\sin\theta_{k,n}+\cos\theta_{k,n}), \tag{52}$$

于是

$$\Delta A_n=\sqrt{\beta_k}\cos\theta_{k,n}\left(\frac{\delta E_n}{E_s}\right), \tag{53}$$

式中 $\theta_{k,n}$ 是束团第 n 次通过校正装置时相干振荡相角，

$$\theta_{k,n}=n\mu_0+\theta_{k,0}, \tag{54}$$

$\theta_{k,0}$ 是起始相角

利用式(26、29)可求得 M_0 的表示式，

$$M_0=\begin{pmatrix}1-\mu_0^2\dfrac{l_{cp}}{L} & \dfrac{2\pi h\eta}{\beta^2}\left[\dfrac{l_{pc}}{L}\left(1-\mu_0^2\dfrac{l_{cp}}{L}\right)+\dfrac{l_{cp}}{L}\right]\\ \dfrac{ZeV_s\cos\varphi_s}{E_s} & 1-\mu_0^2\dfrac{l_{pc}}{L}\end{pmatrix}. \quad (55)$$

比较式(18)和式(55)得到

$$\frac{\mu_0^2}{L}(l_{pc}-l_{cp})=2\alpha_p\sin\mu_0. \quad (56)$$

如果选择

$$l_{pc}=l_{cp} \quad (57)$$

则 $\alpha_p=0$. 由于 $\left(\dfrac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}=\dfrac{A_n}{\sqrt{\beta_p}}(-\alpha_p\sin\theta_{p,n}+\cos\theta_{p,n})$,所以

$$\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}=\frac{A_n}{\sqrt{\beta_p}}\cos\theta_{p,n}. \quad (58)$$

令校正电压 V_n 为常数 V_0,其符号和 $\left(\dfrac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}$ 相反,以校正 $\left(\dfrac{\Delta E}{E}\right)$, 即

$$V_n=-V_0\frac{\left|\left(\dfrac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}\right|}{\left(\dfrac{\Delta E}{E_s}\right)_{p,n}}=-V_0\frac{|\cos\theta_{p,n}|}{\cos\theta_{p,n}}. \quad (59)$$

于是

$$\delta E_n=-ZeV_0\frac{|\cos\theta_{p,n}|}{\cos\theta_{p,n}}. \quad (60)$$

把上式代入式(53),便得到,

$$\Delta A_n=-Ze\frac{V_0}{E_s}\sqrt{\beta_k}\frac{\cos\theta_{k,n}}{\cos\theta_{p,n}}|\cos\theta_{p,n}|, \quad (61)$$

而

$$\frac{\cos\theta_{k,n}}{\cos\theta_{p,n}}=\frac{\cos(\theta_{p,n}+\varphi_{pk})}{\cos\theta_{p,n}}. \quad (62)$$

由于 $\varphi_{pk}<\mu_0\ll 1$,所以

$$\frac{\cos\theta_{k,n}}{\cos\theta_{p,n}}\simeq 1+\varphi_{p,k}\tan\theta_{p,n}. \quad (63)$$

则

$$\Delta A_n=-\frac{ZeV_0}{E_s}\sqrt{\beta_k}(1+\varphi_{pk}\tan\theta_{p,n})|\cos\theta_{p,n}|. \quad (64)$$

$$A_n=A_0-\sum_n\frac{ZeV_0}{E_s}\sqrt{\beta_k}(1+\varphi_{p,k}\tan\theta_{p,n})|\cos\theta_{p,n}|. \quad (65)$$

如要求经过 N 圈后,相干振荡振幅阻尼到初始值的 e^{-q},则要求

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{ZeV_0}{E_s}\sqrt{\beta_k}(1+\varphi_{pk}\tan\theta_{p,n})|\cos\theta_{p,n}|=A_0(1-e^{-q}), \quad (66)$$

在上式中,$\theta_{p,n}=\theta_{p,0}+(n-1)\mu_0$,其中 $\mu_0\ll 1$. 因此,

$$\sum_{n=1}^{N}(1+\varphi_{p,k}\tan\theta_{p,n})|\cos\theta_{p,n}| = \sum_{n=0}^{N-1}\{|\cos[\theta_{p,0}+(n-1)\mu_0]|\{1 + \varphi_{p,k}\tan[\theta_{p,0}+(n-1)\mu_0]\}. \tag{67}$$

由于 $N \gg 1\left(\text{通常}N\text{为数倍}\dfrac{2\pi}{\mu_0}\right)$,所以

$$\sum_{n=0}^{N-1}|\cos[\theta_{p,0}+(n-1)\mu_0]| \cong N\overline{|\cos\theta|} = N\frac{2}{\pi}, \tag{68}$$

而

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tan[\theta_{p,0}+(n-1)\mu_0]|\cos[\theta_{p,0}+(n-1)\mu_0]| \cong N\overline{\tan\theta|\cos\theta|}, \tag{69}$$

其中

$$\overline{\tan\theta|\cos\theta|} = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin\theta\right\} = 0. \tag{70}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{N}(1+\varphi_{pk}\tan\theta_{p,n})|\cos\theta_{p,n}| \cong N\overline{\cos\theta} \cong N\frac{2}{\pi}. \tag{71}$$

这样,式(66)化为

$$N\frac{2}{\pi}\frac{ZeV_0}{E_s}\sqrt{\beta_k} = A_0(1-e^{-q}). \tag{72}$$

当 $l_{pc}=l_{cp}$,因而 $\alpha_p=0$ 的情况下，$A_0=\widehat{\left(\dfrac{\Delta E}{E_s}\right)}_{p,0}\sqrt{\beta_p}$. 所以

$$\frac{V_0}{E_s} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\beta_p}{\beta_k}}\frac{(1-e^{-q})}{NZe}\widehat{\left(\frac{\Delta E}{E_s}\right)}_{p,0}. \tag{73}$$

从式(30,31)可知当 $\alpha_p=0$ 时，

$$\sqrt{\frac{\beta_k}{\beta_p}}\cos\varphi_{pk} \doteq 1. \tag{74}$$

$\varphi_{pk}<\mu_0\ll 1$. 因此,常电压阻尼系统要求的校正电压 V_0 的表示式是

$$V_0 = \frac{\pi}{2}\frac{(1-e^{-q})}{NZe}\widehat{(\Delta E)}_{p,0}. \tag{75}$$

常电压阻尼系统要求的校正电压 V_0 和正比阻尼系统需要的最大校正电压 V_{max} 的比例关系是

$$\frac{V_0}{V_{max}} = \frac{\pi(1-e^{-q})}{4q}. \tag{76}$$

校正功率正比于校正电压的平方，所以常电压阻尼系统要求的宽带校正功率 P_0 和正比阻尼系统所需要的最大校正功率 P_{max} 之比为，

$$\frac{P_0}{P_{max}} = \left[\frac{\pi(1-e^{-q})}{4q}\right]^2. \tag{77}$$

对应于不同的 q 值的 V_0、V_{max} 和它们的比值及$\frac{P_0}{P_{max}}$列于下表。

q	0.5	1	1.5	2
V_0 (单位用 $\frac{\widehat{\Delta E_0}}{NZe}$)	0.62	0.99	1.22	1.36
V_{max} (单位用 $\frac{\widehat{\Delta E_0}}{NZe}$)	1	2	3	4
$\frac{V_0}{V_{max}}$	0.62	0.5	0.41	0.34
$\frac{P_0}{P_{max}}$	0.38	0.25	0.17	0.12

表中数据表明了采用常电压阻尼系统的优越性，它需要的校正功率远小于正比阻尼系统所需的最大功率。

参 考 文 献

[1] Jianming Xu et al., The Tranverse Damping System for RHIC, BNL Report, BNL-45356, 1991.
[2] Jianming Xu, Study on the Constant Voltage Damping System, *Nucl. Instr. and Meth.*, **A351** (1994)253.

Longitudinal Damping System

Xu Jianming
(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)
Received 13 April 1994

Abstract

The proportional longitudinal damping system and the constant voltage longitudinal damping system are studied. Formulas determining the parameters of damping system are given.

Key words longitudinal damping system of accelerator, damping speed, proportional damping system, constant voltage damping system.