第21卷 第5期 高能物理与核物理 Vol.21, No.5
1997 年5月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS May, 1997

J/ψ 衰变过程的矩分析和两种坐标系的比较*

沈齐兴[1] 晁明郁宏[1]

(中国科学院高能物理研究所，北京 100039)

1996-05-10 收稿

摘 要

讨论了实验室坐标系和螺旋度坐标系中不极化电子-正电子对撞产生 J/ψ 粒子的密度矩阵，指出，产生的 J/ψ 粒子只有螺旋度 ±1的分量对过程有贡献的结论是有条件的，且仅适用于实验室坐标系；在两种坐标系中应用矩分析方法时，将得到相同数目的矩，而且矩的表达式之间存在一个十分简单的关系式.

关键词 J/ψ 衰变，矩分析，螺旋度.

1 引 言

由于不极化电子-正电子对撞能产生大量高质量的 J/ψ 粒子，而 J/ψ 粒子主要是通过强子衰变和辐射衰变过程衰变成普通的 $q\bar{q}$ 介子和非 $q\bar{q}$ 介子(胶子球和混杂态等). 因此，在 J/ψ 粒子发现后的二十多年中，J/ψ 粒子衰变的研究一直是粒子物理学界的一个十分活跃的研究领域. 例如，在 J/ψ 辐射衰变过程中已发现了三个胶子球的候选态：$\iota/\eta(1440)$[1]，$\theta/f_J(1710)$[2] 和 $\xi(2230)$[3]；Mark III[4] 和 DM2[5] 已通过对过程 J/$\psi \to (\phi, \omega, \rho)+(\eta, \eta')$ 的研究定量地得到了 η, η'的各种 $q\bar{q}$ 成分和混合角. BES 组[6] 用矩分析方法通过对过程 J/$\psi \to \gamma+(\pi\pi, K\bar{K}, \eta\eta')$ 的研究发现在 $\theta(1710)$ 能区除了明显的 2^{++} 分量外，在高质量端有 0^{++} 分量成分，这个发现和 Mark III 对过程 J/$\psi \to \gamma+4\pi$ 数据重新分析后的结论是一致的[7].

为了确定

$$e^+ + e^- \to J/\psi \to V + X, \tag{1}$$

(本文中 V 代表矢量粒子，P 代表赝标粒子) X 继续衰变成各种终态这些过程中中间态 X 的自旋，宇称和螺旋度振幅比，推广的矩分析方法[8] 是其中比较好的一种分析方法，

* 国家自然科学基金和中国科学院基金资助.

1) 中国科学院理论物理研究所客座研究人员.

因为它可以在事例数较少的情况下通过对多个矩的测量独立地确定中间态的自旋，宇称和相应过程的螺旋度振幅比，而这些量是确定粒子性质的重要信息.

为了从理论上给出矩的具体表达式，通常可以采用两种坐标系，一种称为螺旋度坐标系，另一种称为实验室坐标系. 本文在讨论两种坐标系中的密度矩阵的基础上，指出，不极化电子－正电子对撞产生的 J /ψ 粒子仅仅螺旋度为 ±1 的分量有贡献的结论是有条件的，且仅适用于实验室坐标系；进一步的研究表明，在两种坐标系中应用矩分析方法将得到相同数目的矩，而且矩的表达式之间存在一个十分简单的关系式.

2　两种坐标系中的密度矩阵

首先讨论过程(1)，其中粒子 X 衰变成两个赝标粒子的情形. 此时，过程的角分布为

$$W(\theta_V,\ \theta,\ \phi) \propto \sum_{\lambda_V,\lambda_J,\lambda'_J,\ \lambda_X,\lambda'_X;\ r,r'} \langle \Psi_{\lambda_J}|T_3|e_r^+ e_{r'}^-\rangle\langle \Psi_{\lambda'_J}|T_3|e_r^+ e_{r'}^-\rangle^* \langle V_{\lambda_V} X_{\lambda_X}|T_2|\Psi_{\lambda_J}\rangle\langle V_{\lambda_V} X_{\lambda'_X}|T_2|\Psi_{\lambda'_J}\rangle^* \langle P\overline{P}|T_1|X_{\lambda_X}\rangle\langle P\overline{P}|T_1|X_{\lambda'_X}\rangle^*, \tag{2}$$

其中 θ、ϕ 是 X 静止系中赝标介子 P 的极角和方位角，λ_a 为相应粒子 a 的螺旋度，r 和 r' 分别为正负电子的极化指标.

螺旋度坐标系是 e^+e^- 的质心系，并选矢量粒子 V 的方向为 z 轴方向. 正负电子束在(x,z)平面内，y 轴平行于 $\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{p}_+$ ($\boldsymbol{p}_+$ 为正电子动量). 在这个坐标系中有[9]

$$\langle V_{\lambda_V}X_{\lambda_X}|T_2|\Psi_{\lambda_J}\rangle \propto A_{\lambda_V,\lambda_X},$$

并有螺旋度守恒关系：

$$\lambda_J = \lambda_V - \lambda_X. \tag{3}$$

不极化电子－正电子对撞产生 J /ψ 粒子的密度矩阵定义为：

$$I_{\lambda_J,\lambda'_J}(\theta_V) \propto \frac{1}{4}\sum_{r,r'}\langle \Psi_{\lambda_J}|T_3|e_r^+ e_{r'}^-\rangle\langle \Psi_{\lambda'_J}|T_3|e_r^+ e_{r'}^-\rangle^*. \tag{4}$$

因为：

$$\langle \Psi_{\lambda_J}|T_3|e_r^+ e_{r'}^-\rangle \propto e_\mu^{\lambda_J *}\overline{v}_r(p_+)\gamma^\mu u_{r'}(p_-), \tag{5}$$

其中 $p_\pm$ 分别是正负电子的四动量. $e_\mu^{\lambda_J}$ 是 J /ψ 粒子的极化矢量. 由于 $m_e / |\boldsymbol{p}_\pm| \approx 3.3\times10^{-4}$，因此，在忽略电子质量的条件下在螺旋度坐标系中可以得到密度矩阵的如下表达式：

$$I_{1,1}(\theta_V) = I_{-1,-1}(\theta_V) \propto p^2(1+\cos^2\theta_V);$$

$$I_{1,0}(\theta_V) = I_{0,1}(\theta_V) = -I_{0,-1}(\theta_V) = -I_{-1,0}(\theta_V) \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\ p^2\sin 2\theta_V;$$

$$I_{1,-1}(\theta_V) = I_{-1,1}(\theta_V) \propto p^2\sin^2\theta_V;$$

$$I_{0,0}(\theta_V)\propto 2p^2\sin^2\theta_V, \tag{6}$$

其中 $p^2=|\boldsymbol{p}_\pm|^2$, θ_V 为 $\boldsymbol{p}_V$ 和 $\boldsymbol{p}_+$ 之夹角. 因此在螺旋度坐标系中有角分布:

$$W^H(\theta_V,\theta,\phi)\propto\sum_{\lambda_X,\lambda'_X,\lambda_V} I_{\lambda_J,\lambda'_J}(\theta_V)A_{\lambda_V,\lambda_X}A_{\lambda_V,\lambda'_X}{}^*D^{J_X}_{\lambda_X,0}{}^*(\phi,\theta,-\phi)D^{J_X}_{\lambda'_X,0}(\phi,\theta,-\phi), \tag{7}$$

其中 λ_J 满足条件(3), 同样, $\lambda'_J=\lambda_V-\lambda'_X$.

实验室坐标系也是 e^+e^- 的质心系, 但选取 $\boldsymbol{p}_+$ 方向为 z 轴方向(所以这是一个固定坐标系), $\boldsymbol{p}_V$ 在(x,z)平面内. 这时密度矩阵(4)与 θ_V 无关, 在忽略电子质量的情况下简化为:

$$I_{\lambda_J,\lambda'_J}\propto 2p^2\delta_{\lambda_J,\lambda'_J}\delta_{\lambda_J,\pm1}, \tag{8}$$

而矩阵元

$$\langle V_{\lambda_V}X_{\lambda_X}|T_2|\Psi_{\lambda_J}\rangle\propto A_{\lambda_V,\lambda_X}D^1_{\lambda_J,\lambda_V-\lambda_X}{}^*(0,\theta_V,0), \tag{9}$$

所以, 实验室系中的角分布为

$$W^E(\theta_V,\theta,\phi)\propto\sum_{\lambda_X,\lambda'_X,\lambda_J,\lambda'_J,\lambda_V} I_{\lambda_J,\lambda'_J}A_{\lambda_V,\lambda_X}A_{\lambda_V,\lambda'_X}{}^*D^1_{\lambda_J,\lambda_V-\lambda_X}{}^*(0,\theta_V,0)$$

$$D^1_{\lambda'_J,\lambda_V-\lambda'_X}(0,\theta_V,0)D^{J_X}_{\lambda_X,0}{}^*(\phi,\theta,-\phi)D^{J_X}_{\lambda'_X,0}(\phi,\theta,-\phi), \tag{10}$$

由于(8), 这里的 λ_J, λ'_J 只取两个分量 ±1, 而条件(3)不成立.

上面的计算表明, 在不极化电子-正电子对撞产生 J/ψ 粒子, J/ψ 粒子继续衰变的过程中, 只有 J/ψ 的螺旋度为 ±1 的分量有贡献[10], 这是在忽略电子质量的情况下才成立, 且仅适用于实验室坐标系.

3 两种坐标系中矩表达式之间的关系

对于过程(1), 且 X 继续衰变成两个赝标介子的情况, 矩被定义为:

$$M(jlm)=\int d\theta_V\sin\theta_V d\theta\sin\theta d\phi W(\theta_V,\theta,\phi)D^j_{0,-m}(0,\theta_V,0)D^l_{m,0}(\phi,\theta,-\phi), \tag{11}$$

利用 D 函数的积分关系式, 在实验室系中矩可表为:

$$M^E(jlm)\propto 2p^2\sum_{\lambda_J=\pm1,\lambda_V,\lambda_X,\lambda'_X}A_{\lambda_V,\lambda_X}A_{\lambda_V,\lambda'_X}{}^*\int d\theta_V\sin\theta_V$$

$$\times D^1_{\lambda_J,\lambda_V-\lambda_X}{}^*(0,\theta_V,0)D^1_{\lambda_J,\lambda_V-\lambda'_X}(0,\theta_V,0)D^j_{0,-m}(0,\theta_V,0)$$

$$\times C^{J_X\lambda_X}_{J_X\lambda'_X lm}C^{J_X0}_{J_X0l0}, \tag{12}$$

其中 $C^{jm}_{j_1,m_1,j_2,m_2}$ 为 C-G 系数.

我们发现, 螺旋度坐标系中的密度矩阵表达式(6)可以统一写成如下的简单形式:

$$I_{\rho,\rho'}(\theta_V)\propto 2p^2\sum_{\sigma=\pm1}d^1_{\rho,\sigma}(\theta_V)d^1_{\rho',\sigma}(\theta_V), \tag{13}$$

因此螺旋度坐标系中的矩可以写成：

$$M^{\mathrm{H}}(jlm) \propto 2p^2 \sum_{\lambda_{\mathrm{V}},\lambda_{\mathrm{X}},\lambda'_{\mathrm{X}}} A_{\lambda_{\mathrm{V}},\lambda_{\mathrm{X}}} A_{\lambda_{\mathrm{V}},\lambda'_{\mathrm{X}}}{}^* \sum_{\sigma=\pm 1} \int \mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}} \sin\theta_{\mathrm{V}} \times \mathrm{D}^1_{\lambda_{\mathrm{V}}-\lambda_{\mathrm{X}},\sigma}{}^*(0,\theta_{\mathrm{V}},0)\,\mathrm{D}^1_{\lambda_{\mathrm{V}}-\lambda'_{\mathrm{X}},\sigma}(0,\theta_{\mathrm{V}},0)\,\mathrm{D}^j_{0,-m}(0,\theta_{\mathrm{V}},0) \times C^{J_{\mathrm{X}}\lambda_{\mathrm{X}}}_{j_{\mathrm{X}}\lambda'_{\mathrm{X}}lm} C^{J_{\mathrm{X}}0}_{J_{\mathrm{X}}0l0}$$

$$= (-1)^m 2p^2 \sum_{\sigma=\pm 1,\lambda_{\mathrm{V}},\lambda_{\mathrm{X}},\lambda'_{\mathrm{X}}} A_{\lambda_{\mathrm{V}},\lambda_{\mathrm{X}}} A_{\lambda_{\mathrm{V}},\lambda'_{\mathrm{X}}}{}^* \int \mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}} \sin\theta_{\mathrm{V}} \times \mathrm{D}^1_{\sigma,\lambda_{\mathrm{V}}-\lambda_{\mathrm{X}}}{}^*(0,\theta_{\mathrm{V}},0)\,\mathrm{D}^1_{\sigma,\lambda_{\mathrm{V}}-\lambda'_{\mathrm{X}}}(0,\theta_{\mathrm{V}},0)\,\mathrm{D}^j_{0,-m}(0,\theta_{\mathrm{V}},0) \times C^{J_{\mathrm{X}}\lambda_{\mathrm{X}}}_{j_{\mathrm{X}}\lambda'_{\mathrm{X}}lm} C^{J_{\mathrm{X}}0}_{J_{\mathrm{X}}0l0},$$

从而得到了两种坐标系中矩之间的关系：

$$M^{\mathrm{H}}(jlm) = (-1)^m M^{\mathrm{E}}(jlm). \tag{14}$$

对于和胶子球候选态 $\iota/\eta(1440)$ 有关的过程 $\mathrm{J}/\psi \to \gamma+\mathrm{X}$，$\mathrm{X}\to 3\mathrm{P}$[11]，等式(14)同样成立. 对于较为复杂而又有兴趣的 J/ψ 衰变过程，例如 J/ψ 的三级二体衰变过程[12]：$\mathrm{J}/\psi \to \mathrm{V}+\mathrm{X}$，$\mathrm{X}\to\mathrm{P}+\mathrm{Y}$，$\mathrm{Y}\to 2\mathrm{P}$ 和以辐射衰变过程[13]：$\mathrm{J}/\psi\to\gamma+\mathrm{X}$，$\mathrm{X}\to\gamma+\mathrm{V}$，$\mathrm{V}\to 2\mathrm{P}$（或 3P），只要将矩统一地定义为：

$$M(jlmin) = \int \mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}} \sin\theta_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}\theta \sin\theta\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta_1 \sin\theta_1\, \mathrm{d}\phi_1 \times W(\theta_{\mathrm{V}},\theta,\phi,\theta_1,\phi_1)\,\mathrm{D}^j_{0,-m}(0,\theta_{\mathrm{V}},0)\,\mathrm{D}^l_{m,n}(\Omega)\,\mathrm{D}^i_{n,0}(\Omega_1), \tag{15}$$

则两个坐标系中矩的表达式之间有类似的关系：

$$M^{\mathrm{H}}(jlmin) = (-1)^m M^{\mathrm{E}}(jlmin). \tag{16}$$

对于更复杂的 J/ψ 衰变过程[14]：$\mathrm{J}/\psi \to \mathrm{V}_1+\mathrm{X}$，$\mathrm{X}\to\mathrm{V}_2+\mathrm{V}_3$，$\mathrm{V}_2(\mathrm{V}_3)\to 2\mathrm{P}$ 或 3P，只要将矩统一地定义为：

$$M(jlml_2m_2l_3m_3) = \int \mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}} \sin\theta_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}\theta \sin\theta\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta_2 \sin\theta_2\, \mathrm{d}\phi_2 \times \mathrm{d}\theta_3 \sin\theta_3\, \mathrm{d}\phi_3\, W(\theta_{\mathrm{V}},\theta,\phi,\theta_2,\phi_2,\theta_3,\phi_3)\,\mathrm{D}^j_{0,-m}(0,\theta_{\mathrm{V}},0) \times \mathrm{D}^j_{0,-m}(0,\theta_{\mathrm{V}},0)\,\mathrm{D}^l_{m,m_2,-m_3}(\Omega)\,\mathrm{D}^{l_2}_{m_2,0}(\Omega_2)\,\mathrm{D}^{l_3}_{m_3,0}(\Omega_3), \tag{17}$$

则两种坐标系中矩的表达式之间仍有类似的关系式：

$$M^{\mathrm{H}}(jlml_2m_2l_3m_3) = (-1)^m M^{\mathrm{E}}(jlml_2m_2l_3m_3). \tag{18}$$

因此，从上面的讨论可以得到结论：在螺旋度坐标系和实验室坐标系中，独立的非恒为零的矩的数目完全一样，而且矩表达式之间存在(14)，(16)或(18)式给出的简单关系.

参考文献

[1] D. L. Scharre *et al.*, *Phys. Lett.*, **97B** (1980) 329.
[2] C. Edwards *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 458.
[3] R. M. Baltrusaitis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986) 107; J. Z. Bai *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1996) 3502.
[4] D. Coffman *et al.*, *Phys. Rev.*, **D38**(1988) 2695.
[5] J. Jousset *et al.*, *Phys. Rev.*, **D41** (1990) 1389.
[6] Yu Hong *et al.*, BIHEP-TH-92-48(1992); J. Z. Bai *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1996) 3959.
[7] D. V. Bugg *et al.*, *Phys. Lett.*, **B353**(1995) 378.
[8] 郁　宏，高能物理与核物理，**13**(1989) 87.
[9] S. U. Chung, *Phys. Rev.*, **169** (1968) 1342.
[10] D. H. Perkins, Introduction to High Energy Physics, 1987, p.377—378.
[11] Qixing Shen, Hong Yu, Jilong Zhang, *Phys. Rev.*, **D48**(1993) 2129.
[12] Qixing Shen, Hong Yu, Lin Zhang, *Phys. Rev.*, **D52**(1995) 2825.
[13] 沈齐兴，郁　宏，高能物理与核物理，**16**(1992) 704.
[14] 沈齐兴，郁　宏，高能物理与核物理，**17**(1993) 503.

Moment Analysis of J/ψ Decay Processes and Comparison of Results in Two Frames

Shen Qixing　　Chao Ming　　Yu Hong

(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

Received 10 May 1996

Abstract

The density matrices of J/ψ produced in the non-polarized e^+-e^- collisions in both experimental laboratory and helicity frame are discussed. The results show that the conclusion for only J/ψ with the helicity ± 1 having contributions to the procss is correct only in the experimental laboratory frame under some conditions. The number of the moments is the same and there is a simple relation between the moments in the two frames.

Key words　J/ψ decay, moment analysis, helicity.