

非 Abelian plasmons 和它的动力论方程*

郑小平 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

摘要 把 QGP 中的涨落波动模式处理成等离子激发元 (plasmon), 从 Yang-Mills 场方程出发, 在线性近似下, 建立起 plasmons 的动力论方程. 这是一个描述 plasmons 数平衡的方程: 一方面是 plasmons 以群速度运动在时空上造成 plasmons 数的改变 (增加或减少); 另一方面是等离子体粒子辐射或吸收的 plasmons 数.

关键词 QGP 动力论 等离子激发元

1 引言

理论上已预言重离子碰撞可产生一种新物质形态, 即夸克胶子等离子体 (QGP). 为了探讨 QGP 的信号, 需要研究 QGP 的性质及相关物理问题. 目前, 研究 QGP 的方法主要有两个方面: 其一是有有限温度场理论; 其二则是动力论理论. 而它们都采用了平均场近似^[1]. 在 QGP 中, 平均场来自于夸克、胶子集体激发的贡献, 表现为它们的分布函数在某一平均值附近的涨落. 这种激发是多自由度的元激发, 称为等离子激发元 (plasmon).

文献 [2] 在有限温度场论的框架下对热标量场的 plasmons 作了研究, 文献 [3] 已涉及到 QGP 中的 plasmon. 这里则希望用动力论理论对更一般性 (包括非平衡态 QGP) 非 Abelian 的 plasmons 进行较深入的讨论. 基本思路是: 既然 plasmons 是各种模式的元激发, 由于涨落的随机性, plasmons 的位相也是随机的, 并且元激发的能量、动量按照各种模式的色散关系而分布, 因而可把 plasmons 看成 QGP 中的一类随机粒子, 当然它们是一种准粒子. 那么 QGP 中平均场所满足的 Yang-Mills 场方程就可改写为类似于动力论方程形式的方程, 即 plasmons 的动力论方程. 利用这一方程就可以用完全动力论的形式去研究 QGP 中粒子与平均场的相互作用, 表现为粒子与 plasmons 的相互作用.

本文第 1 节讨论在线性涨落下 QGP 的动力论方程; 第 2 节从 Yang-Mills 场方程出发, 建立非 Abelian plasmons 的动力论方程, 并讨论 plasmons 和它所满足的动力论方程的意义; 第 3 节几点结论.

1997-01-03 收稿

* 国家自然科学基金资助

2 线性涨落下的 QGP 动力论方程

通常在研究 QGP 中的集体效应时,人们总是采用半经典近似下动力论方程,并且由于要研究的是场和粒子的相互作用,因而可以从 Vlasov 型的动力论方程出发:

$$p^\mu \mathbf{D}_\mu f(x, p) + \frac{g}{2} p^\mu \partial_p^\nu \{F_{\mu\nu}, f(x, p)\} = 0, \quad (1)$$

$$p^\mu \mathbf{D}_\mu \bar{f}(x, p) - \frac{g}{2} p^\mu \partial_p^\nu \{F_{\mu\nu}, \bar{f}(x, p)\} = 0, \quad (2)$$

$$p^\mu \bar{\mathbf{D}}_\mu G(x, p) + \frac{g}{2} p^\mu \partial_p^\nu \{\bar{F}_{\mu\nu}, G(x, p)\} = 0, \quad (3)$$

$F_{\mu\nu}$, $\bar{F}_{\mu\nu}$ 分别是自洽色场在 $SU(3)$ 的基础表示和伴随表示下的色场张量,协变导数 $\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu$, $\bar{\mathbf{D}}_\mu = \partial_\mu + ig \bar{A}_\mu$, 其中, $A_\mu = A_\mu^a \tau^a$, $\bar{A}_\mu = A_\mu^a T^a$, $(T^a)_{bc} = -if_{abc}$, 这里 τ^a , T^a , f_{abc} 分别为 $SU(3)$ 基础表示生成元, 伴随表示生成元以及群结构常数.

在 QGP 中, 粒子密度的涨落同时导致色场的涨落, 把分布函数和色场写为

$$f = f^R + f^T, \quad \bar{f} = \bar{f}^R + \bar{f}^T, \quad G = G^R + G^T,$$

$$A_\mu = A_\mu^R + A_\mu^T, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^R + F_{\mu\nu}^T,$$

其中指标 R 和 T 分别表示量的位相平均部分(称为规则部分)和随机涨落部分. 把它们代入(1)–(3), 然后作位相平均, 并注意 $A_\mu^R = 0$, $F_{\mu\nu}^R = 0$, 得

$$p^\mu \partial_\mu f^R = -igp^\mu \langle [A_\mu^T, f^T] \rangle - \frac{g}{2} p^\mu \langle \{F_{\mu\nu}^T, \partial_p^\nu f^T\} \rangle, \quad (4)$$

$$p^\mu \partial_\mu \bar{f}^R = -igp^\mu \langle [A_\mu^T, \bar{f}^T] \rangle + \frac{g}{2} p^\mu \langle \{F_{\mu\nu}^T, \partial_p^\nu \bar{f}^T\} \rangle, \quad (5)$$

$$p^\mu \partial_\mu G^R = -igp^\mu \langle [\bar{A}_\mu^T, G^T] \rangle - \frac{g}{2} p^\mu \langle \{\bar{F}_{\mu\nu}^T, \partial_p^\nu G^T\} \rangle. \quad (6)$$

直观上看, 方程的左边描述了粒子分布函数规则部分的漂移, 而方程的右边类似碰撞项的作用, 它们实际上是一种反常输运的来源. 这样就把求解原始方程组所描述的粒子在自洽场中运动时的动力论方程问题化成求解有类碰撞项的、规则分布函数漂移的动力论方程组.

进一步用(1)、(2)、(3)分别减去(4)、(5)、(6), 保留 $f^T, \bar{f}^T, G^T, A_\mu^T, F_{\mu\nu}^T$ 到线性项可得一级动力论方程

$$p^\mu \partial_\mu f^T = -igp^\mu [A_\mu^T, f^R] - \frac{g}{2} p^\mu \partial_p^\nu \{F_{\mu\nu}^T, \partial_p^\nu f^R\}, \quad (7)$$

$$p^\mu \partial_\mu \bar{f}^T = -igp^\mu [A_\mu^T, \bar{f}^R] + \frac{g}{2} p^\mu \partial_p^\nu \{F_{\mu\nu}^T, \bar{f}^R\}, \quad (8)$$

$$p^\mu \partial_\mu G^T = -igp^\mu [\bar{A}_\mu^T, G^R] - \frac{g}{2} p^\mu \partial_p^\nu \{\bar{F}_{\mu\nu}^T, G^R\}. \quad (9)$$

3 等离子激发基元

3.1 涨落场方程

这一节将在线性近似下初步确立 QGP plasmons 的概念并建立起它在线性近似下的动力论方程.

由于色场来源于色流的激发,且色流由随机涨落所引起,因而在线性近似下 Yang-Mills 场方程取为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu(T)} = j^{\nu(T)}. \quad (10)$$

记色流^[1]的 Fourier 变换为

$$j_k^{\nu(T)} = -\frac{g}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\nu (N_f (f_k^T - \bar{f}_k^T) + 2i\tau_a f^{abc} G_{bc}^T) \equiv \Pi^{\nu\sigma}(k) / A_\sigma^T. \quad (11)$$

将 Fourier 变换后的 (7)、(8)、(9) 代入上式得 4 维极化张量为

$$\Pi^{\nu\sigma}(k) = \frac{g^2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\nu p^\rho \frac{k_\rho \delta_{\lambda\sigma} - k_\lambda \delta_{\rho\sigma}}{p \cdot k} \partial_p^\lambda (N_f (f^R + \bar{f}^R) + 2NG^R). \quad (12)$$

相应 3 维介电张量为

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{\omega^2} \Pi_{ij}, \quad \omega = k^0. \quad (13)$$

对方程 (10) 作 Fourier 变换, 并取罗仑兹规范条件 $k_\nu A^\nu = 0$, 对色 a 分量得

$$\left(g_{\rho\nu} + \frac{1}{k^2} \Pi_{\rho\nu} \right) A_a^{\nu(T)} = 0. \quad (14)$$

由于所讨论的系统, 不存在稳恒流, 从场方程 (10) 还可得色磁场可用色电场表示出来, 因而在这里只需讨论色电方程. 我们知道电场 $E_a^{j(T)} = k^0 A_a^{j(T)} - k^j A_a^{0(T)}$. 利用 $k^0 \Pi_{00} + k^j \Pi_{0j} = 0$, 进一步运算可得

$$(k^2 \delta_{ij} - \omega^2 \varepsilon_{ij} - k_i k_j) E_a^{j(T)} = 0. \quad (15)$$

记单位色电场极化矢量 e_k^σ , 且 $(e_k^\sigma e_k^{\sigma*}) = 1$. 定义新的介电常数

$$\varepsilon^\sigma(k) \equiv \varepsilon_{ij} e_{k_i}^{\sigma*} e_{k_j}^\sigma + \frac{1}{\omega^2} (k_i e_{k_i}^{\sigma*}) (k_j e_{k_j}^\sigma),$$

σ 取 t 和 l 分别代表横波和纵波, 则

$$(k^2 - \omega^2 \varepsilon^\sigma(k)) E_a^{\sigma(T)} = 0. \quad (16)$$

我们知道色散方程

$$k^2 - \omega^2 \varepsilon^\sigma(k) = 0, \quad (17)$$

有复数解^[4]

$$\omega = \omega^\sigma(k) + i\gamma^\sigma(k), \quad (18)$$

且

$$\gamma^\sigma(k) = - \frac{\omega^2 \text{Im} \varepsilon^\sigma(k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \text{Re} \varepsilon^\sigma(k)} \Bigg|_{\omega = \omega^\sigma}. \quad (19)$$

3.2 Plasmons 的动力论方程

(16)给出的是 QGP 中色场的线性方程,下面转向讨论涨落强度的演化. 根据(16),有

$$(\mathbf{k}^2 - \omega^2 \varepsilon^\sigma(k)) \langle E_a^{\sigma(\Gamma)}(k) E_b^{\sigma(\Gamma)}(k') \rangle = 0. \quad (20)$$

类似地,再取 $E_a^{\sigma(\Gamma)}(k')$ 的方程并乘 $E_b^{\sigma(\Gamma)}(k)$,进而可用下面的方程代替(20)

$$(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 - \omega^2 \varepsilon^\sigma(k) + \omega'^2 \varepsilon^\sigma(k')) \langle E_a^{\sigma(\Gamma)}(k) E_b^{\sigma(\Gamma)}(k') \rangle = 0. \quad (21)$$

对于一个稳定均匀的涨落,场的关联可取[4]

$$I_{ab}^\sigma(k, k') \equiv \langle E_a^{\sigma(\Gamma)}(k) E_b^{\sigma(\Gamma)}(k') \rangle = I_{ab}^\sigma(k) \delta(k + k').$$

但是,由阻尼因子(19)可知,波动模式总是稍有消长, $I_{ab}^\sigma(k, k')$ 对 $k + k'$ 的依赖不是一个严格的 delta 函数,即 $k \neq -k'$, 而是一个有一定宽度 Δk 的脉冲,其中 $|\Delta k / k| \ll 1$, 因为增长或阻尼过程是缓慢的. 定义

$$\kappa = \frac{k - k'}{2}, \quad \Delta k = k + k', \quad I_{ab}^\sigma(k, k') = \tilde{I}_{ab}^\sigma(\kappa, \Delta k),$$

并且考虑 I_{ab} 对 x 的弱依赖关系

$$I_{ab}^\sigma(\kappa, x) = \int \tilde{I}_{ab}^\sigma(\kappa, \Delta k) \exp(i\Delta k x) d\Delta k,$$

注意到

$$\begin{aligned} \int \Delta \omega e^{i\Delta k x} I_{ab}^\sigma(k, \Delta k) d\Delta k &= -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} I_{ab}^\sigma(k, x), \\ \int \Delta k e^{i\Delta k x} I_{ab}^\sigma(k, \Delta k) d\Delta k &= -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} I_{ab}^\sigma(k, x), \end{aligned}$$

用 $\exp(i\Delta k x)$ 乘(20)并对 Δk 积分,类似于文献[4]所作,由于 $|\Delta k / k| \ll 1$, $\kappa = \frac{k - k'}{2} \rightarrow k$, 从

而 $I_{ab}^\sigma(\kappa, x) \rightarrow I_{ab}^\sigma(\omega_k^\sigma, \mathbf{k}, x) \equiv I_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x)$, 这样获得

$$\frac{\partial I_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x)}{\partial t} + v_{gs}^\sigma \frac{\partial I_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x)}{\partial x_i} = 2\gamma^\sigma(k) I_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x), \quad (22)$$

其中

$$v_{gs}^\sigma = \frac{\partial \omega_k^\sigma}{\partial \mathbf{k}}$$

为涨落的群速度.

定义模式 σ 的 plasmons 数 $N_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x)$ 为 $N_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x) = C I_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x)$. 为了确定系数 C , 需要计算介质中场的能量. 但由于 QGP 中场是色相关的,所以在色空间场的能量是 8×8 的矩阵,并且在线性近似下,场方程取 Maxwell 方程的形式,因而能量矩阵为

$$W_{ab} = \int_{-\infty}^t \left(E_a \frac{\partial D_b}{\partial t} + H_a \frac{\partial H_b}{\partial t} \right) dt, \quad (23)$$

其中 D, H 分别为色电感应矢量和色磁场强度,且

$$D_i(k) = \varepsilon_{ij} E_j(k), \quad H(k) = \frac{1}{\omega} [kE(k)].$$

参照文献[5]的做法,可得

$$\langle W_{ab}^\sigma \rangle = \int I_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x) \frac{1}{\omega_k^\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^\sigma(k) \right]_{\omega=\omega_k^\sigma}. \quad (24)$$

根据 plasmons 数的意义, $\langle W_{ab}^\sigma \rangle$ 又可写为

$$\langle W_{ab}^\sigma \rangle = \int \frac{\omega_k^\sigma N_{ab}^\sigma}{(2\pi)^3} d\mathbf{k}. \quad (25)$$

比较 (24), (25) 可得

$$C \equiv \frac{(2\pi)^2}{(\omega_k^\sigma)^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^\sigma(k) \Big|_{\omega=\omega_k^\sigma}.$$

从 (24), (25) 还可看出 plasmons 的能量既包含色场的能量又包含了参与某一特定模式波动运动的等离子体粒子的能量. 现在 (22) 就可改写为

$$\frac{\partial N_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x)}{\partial t} + v_{gi}^\sigma \frac{\partial N_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x)}{\partial x_i} = 2\gamma^\sigma(k) N_{ab}^\sigma(\mathbf{k}, x). \quad (26)$$

这样, 方程的意义就很明显, 它是 plasmons 的动力论方程: 方程左边描述的是由于 plasmons 以某一速度运动使得 plasmons 数在时空上发生改变; 方程右边描述的是某些粒子辐射 ($\gamma(k) > 0$) 或吸收 ($\gamma(k) < 0$) 的 plasmons 数. 说明 plasmons 数的增加对应粒子辐射 plasmons, 而 plasmons 数减少对应 plasmons 的吸收. Plasmons 的动力论方程与夸克、胶子的动力论方程一起构成一个完备的方程组, 以取代夸克、胶子的动力论方程和场方程组成的方程组. 在新方程组中, 场与粒子的相互耦合, 可以看成 plasmon 与粒子的相互作用.

3.3 阻尼因子

根据 (19), 结合 (12), (13) 以及 $\varepsilon^\sigma(k)$ 的定义, 且由于

$$\text{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} = -\pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}),$$

对于纵振荡, 我们有

$$\gamma'(k) = \frac{\pi g^2}{k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon'(k) \Big|_{\omega=\omega'(k)}} \int \delta(\omega'(k) - \mathbf{k}\mathbf{v}) k \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (f^{\text{R}} + \bar{f}^{\text{R}} + 2NG^{\text{R}}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (27)$$

上式中包含的 $\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ 代表的是一个粒子在辐射过程中所满足的守恒律

$$e_{p-k} = e_p - \omega = e_p - k \frac{\partial e_p}{\partial \mathbf{p}} = e_p - \mathbf{k}\mathbf{v}.$$

如果辐射概率记为 $\omega_p(k)$, 则由半经典跃迁理论有

$$\frac{dN_{ab}(k)}{dt} = N_{ab}(k) \int \omega_p(k) k \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (f^{\text{R}} + \bar{f}^{\text{R}} + 2NG^{\text{R}}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (28)$$

利用 (27), 将 (28) 与 (26) 比较, 得到出射粒子辐射的纵 plasmon 的概率为

$$\omega_p(k) = \frac{2\pi g^2}{k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon'(k) \Big|_{\omega=\omega'(k)}}. \quad (29)$$

应该特别强调的是,与电磁等离子体不同,由于 QGP 中胶子是带色的,它们也参与介质的极化,因而(22)、(26)中阻尼因子包括夸克和规范粒子两部分贡献.令 $\varepsilon_q^\sigma(k)$, $\varepsilon_g^\sigma(k)$, $\varepsilon_g^\sigma(k)$ 分别为正、反夸克和胶子气的介电常数,根据(11)、(12)式,在线性条件下可得

$$\varepsilon_{\text{tot}}^\sigma(k) = \varepsilon_q^\sigma(k) \varepsilon_q^\sigma(k) \varepsilon_g^\sigma(k) = \varepsilon_{\text{qq}}^\sigma(k) \varepsilon_g^\sigma(k), \quad (30)$$

$$\text{Im} \varepsilon_{\text{tot}}^\sigma(k) = \text{Im} \varepsilon_{\text{qq}}^\sigma(k) + \text{Im} \varepsilon_g^\sigma(k), \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_{\text{tot}}^\sigma(k) = \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_{\text{qq}}^\sigma(k) + \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_g^\sigma(k). \quad (32)$$

因而进一步按(19)可得总的阻尼因子为

$$\gamma_{\text{tot}}^\sigma(k) = \frac{\gamma_{\text{qq}}^\sigma(k) + \beta \gamma_g^\sigma(k)}{1 + \beta}, \quad (33)$$

其中 $\gamma_{\text{qq}}^\sigma(k)$, $\gamma_g^\sigma(k)$ 分别为夸克和胶子的阻尼因子,

$$\beta = \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_g^\sigma(k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \varepsilon_{\text{qq}}^\sigma(k)}.$$

因子 β 反应的是胶子、夸克对介质极化贡献的量度.当 $\beta < 1$ 时,胶子对极化贡献小,当 $\beta = 0$ 时,就类似电磁等离子体的情形了.现在可把(22)改写为

$$\frac{\partial I_{ab}^\sigma(k, x)}{\partial t} + v_{gi}^\sigma \frac{\partial I_{ab}^\sigma(k, x)}{\partial x_i} = \frac{2\gamma_{\text{qq}}^\sigma(k) + \beta \gamma_g^\sigma(k)}{1 + \beta} I_{ab}^\sigma(k, x). \quad (34)$$

4 结果与讨论

QGP 是一种非 Abelian 等离子体,它包含着强相互作用集体自由度的元激发,在一级近似下,引进 plasmon 的概念,建立了 plasmons 的动力论方程.

Plasmons 包含了色场和参与相应模式运动的粒子的效应,这体现在它的能量不仅包括场能量而且包括极化效应.从一级近似下 plasmons 动力论方程可看出, QGP 中 plasmon 数的改变是由于等离子体粒子辐射或吸收 plasmons 所引起的.

通过对纵 plasmon 阻尼率的计算,我们给出了粒子辐射 plasmon 的概率与介电常数的关系,如果我们已知某种模式的色散关系,就可计算出辐射这一模式 plasmons 的概率.从本文的讨论中,我们还可看出作为等离子体粒子的胶子对 plasmons 亦有贡献,这与电磁等离子体是不同的.

一个由粒子和平均场构成的系统可用粒子与 plasmons 构成的系统代替,即夸克,胶子动力论方程和 Yang-Mills 方程所讨论的系统可用夸克,胶子, plasmons 动力论方程来讨论.在线性近似下,这组动力论方程讨论的是等离子体粒子与 plasmons 的相互作用,即对应粒子与场的相互作用.如果进一步考虑场和分布函数的非线性项,将会发现 plasmons 之间的相互作用被包括进来,它对应着波-波或多波相互作用过程.这就是我们以后将准备讨论的问题.

参 考 文 献

- [1] H. T. Elze, U. Heinz. Phys. Rep., 1989, **183**: 81
- [2] Wang Enke, U. Heinz. Phys. Rev., 1996, **D53**: 899
- [3] Zhang Xiaofei, Li Jiarong. Phys. Rev., 1995, **C52**: 964
- [4] V. N. Tystovich. Theory of Turbulent Plasma, Plenum, New York, 1977
- [5] Li Xiaoqing. Physics of Turbulent Plasma. Beijing: Beijing Normal University Press, 1987

Non-Abelian Plasmons and Their Kinetic Equation

Zheng Xiaoping Li Jiarong

(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan, 430079)

Abstract After the fluctuated modes in QGP are treated as plasmons, the kinetic equation for the plasmons in linear approximation is established starting from Yang-Mills fields equation. The kinetic equation can be considered as the balance equation for the number of plasmons, which indicates the balance of the number variation (growth or damping) in space and time because of their motion with velocities that equal to the wave's group velocity and the emission or absorption of plasmons by plasma particles.

Key words QGP, kinetic theory, Plasmon