第23卷 第11期 高能物理与核物理 Vol.23, No.11
1999 年11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1999

用超对称性和形不变性方法求解环形振子的能谱和波函数*

王德云 黄博文

(首都师范大学物理系 北京 100037)

摘要 运用超对称性和形不变性方法计算环形振子的能量本征值和本征波函数. 所得到的能谱公式与用费曼路径积分方法得到的严格解完全一致.

关键词 超对称性 环形振子 形不变性

1 引言

若一个三维谐振子再被环状的平方反比势环绕,称其为环形振子(Ring-Shaped Oscillator),简称为RSO. 由于这种势具有很重要的特性,对这一物理模型的求解,在量子理论的研究中有一定的意义. 因此,有关RSO的问题引起人们的关注[1,2].

近些年来,超对称性在量子力学中的应用,使物理学工作者产生了广泛的兴趣. 对于一些可严格求解的势,知道了量子系统的超势后,便可确定相应的超对称伙伴势;然后利用形状不变性条件,通过代数的方法便很容易求解系统的能量本征值和本征波函数.

运用这种方法求解RSO问题可以避开文献[2]中复杂的泛函积分的计算,而所得到的精确能谱的表示式确与文献[2]完全一致;并能比较容易地求出本征波函数.

文章的第二部分简要地回顾超对称量子力学的代数性质;第三部分求解RSO的能量本征值和本征波函数.

2 超对称量子力学

在超对称量子力学中,伙伴Hamilton量为[3]

$$H_- = A^+ A = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_-(x), \quad H_+ = AA^+ = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_+(x) \ . \tag{1}$$

其中 $$V_-(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x), \quad V_+(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \tag{2}$$

1998-09-14收稿, 1998-12-23收修改稿

* 北京市自然科学基金资助项目

$W(x)$表示超势，$W'(x)=\dfrac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}$；$V_-(x)$和$V_+(x)$为超对称伙伴势．算符$A$和$A^+$利用超势$W(x)$表示则为：$A=\dfrac{\hbar}{\sqrt{2m}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+W(x)$，$A^+=-\dfrac{\hbar}{\sqrt{2m}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+W(x)$．　(3)

取 Hamilton 量H_-的基态波函数形式为$\psi_0^{(-)}$，它与超势$W(x)$之间的关系为

$$\psi_0^{(-)}(x)=C\exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int^x W(x)\mathrm{d}x\right). \tag{4}$$

式中C为归一化常数．如果$\psi_0^{(-)}$是可归一化的，那么超对称是不破缺的；否则，超对称为破缺的．

在超对称非破缺的情况下，Hamilton 量H_-和H_+第n级本征波函数分别为$\psi_n^{(-)}(x)$和$\psi_n^{(+)}(x)$，它们与相应的本征值$E_n^{(-)}$和$E_n^{(+)}$($n=0, 1, 2, \cdots$)具有如下的特殊性质：

$$E_0^{(-)}=0, \tag{5}$$

$$E_n^{(+)}=E_{(n+1)}^{(-)}. \tag{6}$$

$$\psi_{n+1}^{(-)}=[E_n^{(+)}]^{-1/2}A^+\psi_n^{(+)}, \tag{7}$$

$$\psi_n^{(+)}=[E_{n+1}^{(-)}]^{-1/2}A\psi_{n+1}^{(-)}. \tag{8}$$

如果超对称伙伴势V_-和V_+满足关系　$V_+(x;\ a_0)=V_-(x;\ a_1)+R(a_1)$，　(9)

则称V_-与V_+具有形状不变性．其中a_0是一组参数，a_1是a_0的函数，即$a_1=f(a_0)$．余项$R(a_1)$与x无关．具有形状不变性的势容易求出系统的能量本征值．

3　RSO 的能量本征值和本征波函数

为了计算简便，取$\hbar=2m=1$．在球坐标系中，RSO 的势和波函数的形式分别取作

$$V(r,\theta)=\frac{1}{4}\omega^2r^2+b\frac{\csc^2\theta}{r^2}, \tag{10}$$

$$\psi(r,\theta,\ \varphi)=\frac{R(r)}{r}\cdot\frac{H(\theta)}{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}\cdot K(\theta). \tag{11}$$

其中b为正的常数．将(10)和(11)两式代入 Schrödinger 方程中，即

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+(E-V)\psi=0, \tag{12}$$

便得到$R(r)$、$H(\theta)$、$K(\varphi)$分别满足的方程　$\dfrac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2K(\varphi)=0$，　(13a)

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\theta^2}-\left[\left(b+m^2-\frac{1}{4}\right)\csc^2\theta\right]H(\theta)+l^2H(\theta)=0, \tag{13b}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}-\left[\frac{1}{4}\omega^2r^2+\left(l^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}\right]R(r)+ER(r)=0. \tag{13c}$$

方程(13a)的本征波函数为 $K_m(\varphi)=\exp(\mathrm{i}m\varphi)$. (14)

其余的两个方程，运用量子力学超对称性和形状不变性的方法进行求解.

(1) 方程(13b)的本征值和本征函数

求解(13b)式,相当于求解 Hamilton 算子

$$\hat{\mathscr{H}}(\theta)=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}+\left[b+m^2-\frac{1}{4}\right]\csc^2\theta \tag{15}$$

的本征值和本征函数问题. 令: $(b+m^2)^{1/2}=\nu(m)$, $B=\frac{1}{2}+\nu(m)$ ，则(15)式化为

$$\mathscr{H}(\theta)=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}+B(B-1)\csc^2\theta . \tag{16}$$

由于 $B>0$,超势取作 $W(\theta;B)=-B\cot\theta$, 相应的伙伴势为

$$V_-(\theta;B)=-B^2+(B-1)B\csc^2\theta,\quad V_+(\theta;B)=-B^2+(B+1)B\csc^2\theta . \tag{17}$$

显然,V_- 与 V_+ 满足形状不变性关系

$$V_+(\theta;B)=V_-(\theta;B+1)+(B+1)^2-B^2=V_-(\theta;B+1)+R(B+1), \tag{18}$$

其中 $R(B+1)=(B+1)^2-B^2$. (19)

于是便可确定出 $V_-(\theta;B)$ 的本征值为 $E_s^{(1)}=(B+s)^2-B^2$. (20)

这样,(18)式的本征值,即(13b)中的 $l^2=(B+s)^2$, 从而有 $l=\frac{1}{2}+\nu+s$. (21)

假设函数 $H(\theta)$ 的形式取作 $H(\theta)=(2\sin^2\theta)^{\frac{B}{2}}Y(\theta)$, (22)

将其代入方程 $\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\theta^2}-(B-1)B\csc^2\theta H(\theta)+(B+s)^2H(\theta)=0$ (23)

中,便得到 $Y(\theta)$ 所满足的方程 $\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}\theta^2}+2B\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\theta}+s(s+2B)Y\theta=0.$ (24)

作变量代换 $x=\sin^2\theta$, 方程(24)化为超几何方程形式,即

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2}+\left[B+\frac{1}{2}-(B+1)x\right]\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{4}s(s+2B)Y(\theta)=0. \tag{25}$$

$Y(\theta)$的形式为 $Y(\theta)=\mathrm{F}\left(\nu+\frac{s}{2}+\frac{1}{2},\ -\frac{s}{2},\ \nu+1;\ \sin^2\theta\right)$. (26)

那么 RSO 系统关于θ的本征函数为

$$H(\theta)=(2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\mathrm{F}\left(\nu+\frac{s}{2}+\frac{1}{2},\ -\frac{s}{2},\ \nu+1;\ \sin^2\theta\right). \tag{27}$$

(2) 方程(13c)的本征值和本征函数[4]

同样，(13c)式的求解相当于求 Hamilaton 算子

$$\mathscr{H}(r) = -\frac{d^2}{dr^2} + \left[\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{1}{r^2}\left(l^2 - \frac{1}{4}\right)\right] \tag{28}$$

的本征值和本征函数问题．选取超势的形式为 $W(r) = \frac{1}{2}\omega r - \frac{1}{r}\left(l + \frac{1}{2}\right)$, (29)

相应的伙伴势有

$$V_- = \frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{1}{r^2}\left(l - \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2}\right) - (l+1)\omega,$$

$$V_+ = \frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{1}{r^2}\left(l + \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{3}{2}\right) - l\omega. \tag{30}$$

V_- 与 V_+ 为一对形不变势，满足关系式　$V_+(r;\ a_0) = V_-(r;\ a_1) + R(a_1)$, (31)

其中　　$a_0 = l,\quad a_1 = a_0 + 1 = l + 1$, 因而有　$R(a_1) = 2\omega$.

为了求得(28)式的能量本征值，可构造 Hamilton 级数

$$H^{(s)}(r;a_s) = -\frac{d^2}{dr^2} + V_-(r;\ a_s) + \sum_{k=1}^{s} R(a_k),\quad s = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{32}$$

仿照(30)式的方法构造

$$H^{(s+1)}(r,a_{s+1}) = -\frac{d^2}{dr^2} + V_-(r;\ a_{s+1}) + \sum_{k=1}^{s+1} R(a_k) =$$

$$-\frac{d^2}{dr^2} + V_+(r;\ a_s) + \sum_{k=1}^{s} R(a_k). \tag{33}$$

比较(32)式和(33)式，不难看出 $H^{(s)}$ 与 $H^{(s+1)}$ 为一对伙伴 Hamilton 量，具有形状不变关系

$$V_+(r;\ a_s) = V_-(r;\ a_{s+1}) + R(a_{s+1}). \tag{34}$$

于是，便可确定出 $V_-(r;a_s)$ 作用下基态的能量本征值为

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s} R(a_k) = 2s\omega\ . \tag{35}$$

利用 Hamilton 量级数之间的关系，便可确定出 Hamilton 量

$$H_- = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4}\omega r^2 + \left(l - \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{r^2} - (l+1)\omega \tag{36}$$

的能量本征值为　$E_n^{(-)} = 2n\omega$. (37)

对比(28)式和(36)式，Hamilton 算子(28)式的能量本征值是

$$E_n = (2n + 1 + l)\omega. \tag{38}$$

函数 $P(r)$ 的形式取作　$R(r) = \left(\frac{1}{2}\omega r^2\right)^{\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)} \exp\left(-\frac{1}{4}\omega r^2\right) L(r)$, (39)

将其代入(13c)式中,便得到 $L(r)$ 满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}r^2}+2\left[\frac{1}{r}\left(l+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\omega r\right]\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}+2n\omega L=0. \tag{40}$$

令 $z=\frac{1}{2}\omega r^2$, 则(40)式化为 $z\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}z^2}+(l+1-z)\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z}+nL=0.$ (41)

方程(41)便是 Laguerre 多项式所满足的微分方程,因此有 $L(r)=\mathrm{L}_n^l(z).$ (42)

于是得到 $R(r)=z^{\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}z\right)\mathrm{L}_n^l(z)$. (43)

综合上述计算的结果,将(21)式代入(38)式,得到了 RSO 系统的能谱为

$$E_n=\left(2n+v+s+\frac{3}{2}\right)\omega\ . \tag{44}$$

与文献 [2] 中获得的能谱表示式完全一致.

另外,由公式(14)、(27)、(43)便得到了 RSO 系统的本征波函数为

$$\psi(r,\theta,\varphi)=z^{\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}z\right)\mathrm{L}_n^l(z)\cdot\exp(im\varphi)\cdot$$

$$(\sin\theta)^v\,\mathrm{F}\left(v+\frac{s}{2}+\frac{1}{2},\ -\frac{s}{2},\ v+1;\ \sin^2\theta\right). \tag{45}$$

参 考 文 献

1 Quesne C. J. Phys., 1988, **A21**:3093

2 Victoria M. et al Phys Lett., 1989, **A134**(7):395

3 Cooper F, Khare A, Sukhatme U. Phys. Rep., 1995, **251**:309

4 Dutt R, Khare A, Sukhatme U. Am. J. Phys., 1988, **56**:166

Solve for Energy Spectrum and Function of Ring-Shaped Oscillator by Using Supersymmetry and Shape Invariance*

Wang Deyun Huang Bowen

(*Physics Department Capital Normal University, Beijing* 100037)

Abstract This article solved energy eigenvalues and eigenfunction of Ring-shaped oscillator by using supersymmetry and shape invariance method. The present energy spectrum formulas are consistent with the exact solutions obtained with the Feynman path integral method

Key words supersymmetry, ring-shaped oscillator, shape invariance

Received 14 September 1998, Revised 23 December 1998

* Supported by Beijing Municipal Natural Sciences Foundation