

Vlasov 方程的数值求解*

黄文会 王光伟

(清华大学工程物理系 北京 100084)

摘要 研究环形加速器中的纵向微波不稳定性,发展了 Vlasov 方程在 (J, ϕ) 坐标下用正交多项式展开的数值计算程序,并把它用于对微波不稳定性的初步研究.

关键词 微波不稳定性 Vlasov 方程 模耦合 相干振荡

1 引言

环形加速器中的纵向微波不稳定性已被发现近 30 年了^[1],但它的发生机制以及基本规律仍然是加速器理论中几个尚未完全理解的问题之一.它主要表现为当束团中的粒子数超过某一阈值后,束长和能散随粒子数的增加而增长.微波不稳定性的发生是由于束团与真空管道阻抗的高频部分相互作用的结果,它导致束团拉伸和能散增大,这降低了对撞机的对撞亮度,减少了束团的寿命和物理实验的能量分辨能力,对加速器的性能有着严重的影响.

早在 70 年代 Sacherer 就提出了基于 Vlasov 方程的纵向微波不稳定性的模耦合理论^[2]. A. Chao 提出的基于模耦合理论的 Scaling law 比较成功地解释了 SPEAR 阈值以上束团拉伸规律^[3],其后,许多电子储存环都观察到了束团增长的 Scaling 现象.例如我国的 BEPC 确定的 Scaling law 是 $\sigma_z(\text{cm}) = 0.404 \times (I(\text{mA}) \alpha_p / E(\text{GeV}) v_s^2)^{1/28}$ ^[4],其中 σ_z 、 I 、 α_p 、 E 和 v_s 分别为束团长度、流强、动量压缩因子、能量和同步振荡波数.1990 年,KEK 加速器物理学家 Yokoya 和 Oide 提出势阱扰动对微波不稳定性的影响是不可忽略的^[5],把此领域的研究推进了一步.近来方守贤院士提出了在电子环型加速器中采用负动量压缩因子的磁聚焦结构为降低束团拉伸效应提供了新的思路^[6].

在研究电子束不稳定性问题中,描述包含量子激发和辐射阻尼的多粒子纵向运动方程是 Fokker-Planck 方程,如果不稳定性增长率远大于辐射阻尼,方程简化为 Vlasov 方程,它是研究相干束流不稳定性的理论基础,求解这个方程发现其物理内涵以便去研究微波不稳定性的机制和克服的方法,就成为本领域极其重要的研究课题.考虑了势阱扰动的影响,KEK 的 Yokoya 和 Oide^[5]以及 A. Chao 指导的博士生 B. Chen^[7]在求解方程方面作了优秀的

1998-10-21 收稿

* 国家自然科学基金资助项目

工作,并根据计算结果对微波不稳定性理论和实验提出了一些解释.但是,上述程序都在取得成功的背后,也存在着不足^[8].为了解决这些不足和研究微波不稳定性,编写了在作用量-方位角坐标 (J, ϕ) 下,用正交多项式构成的完备系展开分布函数来数值求解 Vlasov 方程的程序,并对微波不稳定性进行了初步研究.

本文首先介绍了研究微波不稳定性理论基础 Fokker-Planck 方程与 Vlasov 方程,推导了 Vlasov 方程的正交多项式展开形式与数值解法;然后给出了程序的检验结果;最后对微波不稳定性发生过程进行了研究.

2 Vlasov 方程的求解与阻尼项的处理

2.1 Vlasov 方程在 (J, ϕ) 坐标下的展开

环形电子加速器中纵向运动方程为

$$\begin{aligned} p_{N+1} &= p_N + \frac{e\hat{V}}{E_0\sigma_\delta} \sin\left(\omega_{\text{RF}} q_N \frac{\sigma_z}{c} + \varphi_s\right) - \frac{eU_0}{E_0\sigma_\delta} - \frac{2T_0}{\tau_s} p_N + R_N(s) - \frac{e^2}{E_0\sigma_\delta} V(q_N), \\ q_{N+1} &= q_N - T_0\omega_s p_{N+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

这里 p 、 q 和 s 分别是粒子的能散 $(E_0 - E) / E_0\sigma_\delta$, 位置偏移 z / σ_z 和同步振荡相位 $t\omega_s$, σ_δ 为能散, τ_s 为辐射阻尼时间常数, 下标 N 表示是第 N 圈的量, R_N 为量子激发项, 满足 $\langle R(s) R(s') \rangle = 2D\delta(s - s')$, $D = \sqrt{T_0 / \tau_s}$, $\delta(s)$ 为脉冲函数, $V(q_N)$ 是尾势, 由纵向粒子密度 $\rho(q)$ 和尾场函数 $W(q)$ 决定,

$$V(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q') W(q' - q) dq'. \quad (2)$$

方程(1)描述了单粒子在相空间的运动轨迹,是典型的 Langevin 方程.其对应的粒子分布函数 $\psi(p, q, s)$ 满足的方程称为 Fokker-Planck 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} + p \frac{\partial \psi}{\partial q} - q \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{cr_0 N}{\gamma C\omega_s \sigma_\delta} \frac{\partial \psi}{\partial p} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q' - q) \rho(q') dq' = \\ \frac{2}{\tau_s \omega_s} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} + p\psi \right), \end{aligned} \quad (3)$$

方程右边项反映了辐射阻尼和量子激发.当研究的系统的不稳定增长率远大于辐射阻尼时,就可以忽略这项的作用,方程变为 Vlasov 方程,它也可以直接从相空间守恒导出.下面着眼于 Vlasov 方程的求解,

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} + p \frac{\partial \psi}{\partial q} - q \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{cr_0 N}{\gamma C\omega_s \sigma_\delta} \frac{\partial \psi}{\partial p} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q' - q) \rho(q') dq' = 0. \quad (4)$$

方程(4)对应的单粒子哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} - \int_0^q V(q') dq'. \quad (5)$$

在作用量-方位角坐标 (J, ϕ) 下, Vlasov 方程展开的形式比较简单,振荡模式的定义也

比较清晰, 实践证明采用 (J, ϕ) 坐标也有较好的收敛性, 因此在 (J, ϕ) 坐标下求解 Vlasov 方程. 考虑由于扰动, 束流内激发起一个频率为 μ 的小的相干振荡

$$\psi(J, \phi, s) = \psi_0(J) + \psi_1(J, \phi) \cdot e^{-i\mu s} . \quad (6)$$

其中 ψ_0 为束流静态分布, ψ_1 为扰动分布, $\psi_0 \gg \psi_1$. 将 $\psi(J, \phi, s)$ 代入 Vlasov 方程并忽略 ψ_1 的高阶项, 就得到 ψ_0 与 ψ_1 满足的方程

$$p \frac{\partial \psi_0}{\partial q} - q \frac{\partial \psi_0}{\partial p} - \frac{cr_0 N}{\gamma C \omega_s \sigma_s} \frac{\partial \psi_0}{\partial p} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q' - q) \rho(q') dq' = 0 , \quad (7)$$

$$-i\mu \psi_1 - \omega(J) \frac{d\psi_1}{d\phi} - p V_1(q) \psi_0'(J) = 0 . \quad (8)$$

上述方程是非线性偏微分方程, 很难用解析方法求解, 只能利用计算机进行数值求来解.

为了研究 ψ_1 的稳定性即确定束团不稳定性阈值, 首先要找到 Vlasov 方程的静态解 $\psi_0(p, q)$. 对于电子, 静态解在 p 方向的分布必须是高斯分布, 所以有

$$\psi_0(p, q) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-p^2/2) \rho_0(q) . \quad (9)$$

同时 $\psi_0(p, q)$ 必须是哈密顿量的函数, 由 (5) 可得

$$\rho_0(q) = A \exp \left\{ -\frac{q^2}{2} - k \int_q^{+\infty} \int_{q'}^{+\infty} \rho_0(q'') W(q'' - q') dq'' dq' \right\}, \quad k = \frac{Ne}{2\pi v_s \sigma_b} \frac{e}{E_0} , \quad (10)$$

即 Haissinsky 方程. 从方程 (10) 可以看到, 方程右边所需要的只是 $\rho_0(q')$, $q' > q$ 的值. 因此可以从 $+\infty$ 向 $-\infty$ 计算 (其中 $\rho_0(+\infty) \rightarrow 0$), 经过反复迭代, 最终得到稳定的静态分布 ρ_0 .

要在 (J, ϕ) 坐标系下求解 ψ_1 所满足方程 (8), 需要得到从 (p, q) 坐标到 (J, ϕ) 坐标的变换表. 二者的关系为

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad \phi = \omega(J) \int dq / p . \quad (11)$$

其中, $\omega(J)$ 是单粒子同步振荡频率. 当不考虑尾场时, (11) 式为 $q = -\sqrt{2J} \cos\phi$, $p = \sqrt{2J} \sin\phi$. 而考虑尾场后, 很难得到分析表达式, 只能得到数值解.

然后将 ψ_1 在 (J, ϕ) 坐标下采用三角函数 $\{\sin m\phi, \cos m\phi\}$ 和 Laguerre 多项式 $L_n^m(J)$ 构成的二维完备基上作展开,

$$\psi_1 = \sum_{mn} \omega(J) e^{-J/2} |g'(H(J))|^{1/2} J^{m/2} L_n^m(J) m \{C_{mn} \cos m\phi + S_{mn} \sin m\phi\} . \quad (12)$$

其中 $g'(H(J)) = \partial g(H(J)) / \partial H$, $g(H(J))$ 是以 $H(J)$ 为变量的束流分布函数. 将方程 (12) 代入方程 (8), 经过一些数学处理可以得到可以得到 C_{mn} 所满足的方程

$$-\mu^2 C_{m' n'} = - \sum_{m'' n''} M_{m' n' m'' n''} C_{m'' n''} ,$$

$$M_{m' n' m'' n''} = \delta_{m' n' m'' n''} \omega_{n' n''}^{m' m''} + \frac{k}{\pi} \iiint \int dJ d\phi dJ' d\phi' \omega(J) |g' [H(J)]|^{\frac{1}{2}} e^{-J/2} J^{\frac{m'}{2}} L_{n'}^{m'}(J) m' \cos m' \phi \omega(J') |g' [H(J')]|^{\frac{1}{2}} e^{-J'/2} J'^{\frac{m''}{2}} L_{n''}^{m''}(J') m'' \cos m'' \phi' \times F[q'(J', \phi') - q(J, \phi)]. \quad (13)$$

$$\text{其中, } \omega_{n' n''}^{m' m''} = \int dJ \omega^2(J) e^{-J} J^m L_n^m(J) L_{n'}^{m'}(J), \quad \frac{\partial F(q)}{\partial q} = W(q).$$

这样就把线性化 Vlasov 方程 (8) 离散化为无穷维的矩阵方程, 在有限阶截断的基础上, 用计算机进行数值求解. 如果矩阵特征值出现虚部, 那么意味着 ψ_1 的振幅将以指数增长, 束团出现不稳定性.

2.2 辐射阻尼项的处理

以 Vlasov 方程为基础研究束团的不稳定性时, 没有考虑辐射项即 $\hat{R}\psi = \frac{2}{\tau_s \omega_s} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} + p\psi \right)$. 可以采用扰动方法来研究辐射效应, 假设 $\psi_1^{(\alpha)}$ 为求解 Vlasov 方程得到的本征函数, 那么在 (J, ϕ) 坐标下有

$$\hat{R}\psi_1^{(\alpha)} = \frac{2}{\tau_s \omega_s} \frac{\partial}{\partial J} \left[J \left(\psi_1^{(\alpha)} + \frac{1}{\omega(J)} \frac{\partial \psi_1^{(\alpha)}}{\partial J} \right) \right] \approx \lambda_\alpha \frac{2}{\tau_s \omega_s} \psi_1^{(\alpha)}. \quad (14)$$

上式中忽略了辐射项引起的本征函数的变化, 若忽略辐射项产生的频率移动, 将 (12) 式代入 (14) 得

$$\lambda_\alpha = \sum_{n n'} \left\{ (C_{nn'} C_{nn'}^* + S_{nn'} S_{nn'}^*) \int_0^\infty dJ e^{-J} J^m \left[L_{n'}^m(J) L_{n+1}^m(J) (n+1) \left(\frac{1}{\omega^2(J)} \frac{\partial \omega(J)}{\partial J} \right) + L_n^m(J) L_n^m(J) \left(\frac{1}{4\omega(J)} - \frac{\omega(J)}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2(J)} \frac{\partial \omega(J)}{\partial J} - \frac{1}{\omega^3(J)} \left(\frac{\partial \omega(J)}{\partial J} \right)^2 + \frac{1}{\omega^2(J)} \frac{\partial^2 \omega(J)}{\partial J^2} \right) J + \left(-n - \frac{m}{2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2(J)} \frac{\partial \omega(J)}{\partial J} \right) + \left(-n - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\omega(J)} + \frac{m^2}{4} \frac{1}{J\omega(J)} \right] \right\}. \quad (15)$$

利用上式处理阻尼项, 可以更准确地确定不稳定性的阈值.

3 程序检验

在前述公式的基础上, 采用 C++ 语言编写了求解 Vlasov 方程的程序 MCA (Mode Coupling Analysis). 首先采用纯电阻阻抗对程序进行了检验.

3.1 静态解的检验

对纯电阻尾场 $W(q) = R\delta(q)$, Haissinsky 方程 (10) 有解析解

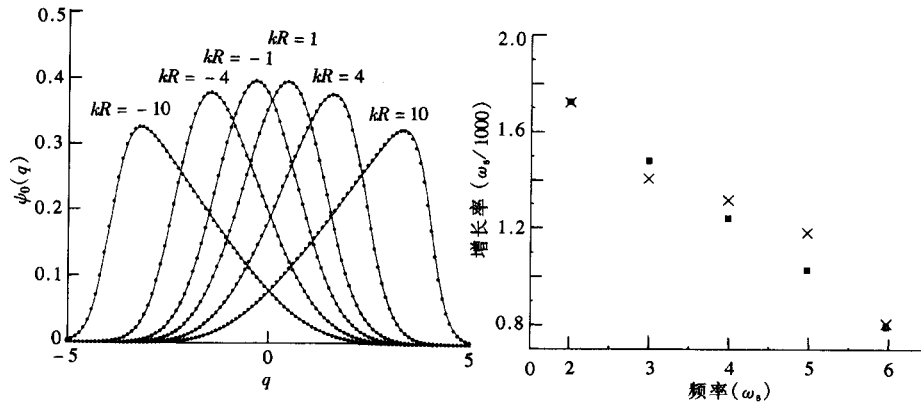


图1 纯电阻下静态分布计算结果与理论解 图2 MAC与POT计算的不稳定性模式与增长率($kR=1$)
——计算值,.....理论值. ■ 程序POT, +程序MAC.

$$\rho(q) = \frac{\sqrt{2/\pi} \exp(-q^2/2)}{kR [\coth(kR/2) - \operatorname{erf}(q/\sqrt{2})]} \quad (16)$$

图 1 给出了理论解与程序计算出的数值解的比较, 结果显示两者符合得很好.

3.2 不稳定模式及增长率的比较

图 2 给出了纯电阻阻抗下, 程序 MCA 和 Oide 的程序 POT 计算得到的不稳定模式的频率与增长率, 其中忽略了可能是数值误差的增长率小于 8×10^{-4} 的模式. 可以看到, 两个程序的计算结果是基本一致的.

4 模耦合观点分析微波不稳定性

在发展了程序的基础上, 把它应用于纵向微波不稳定性的机制和行为的分析探讨. 在以下的分析计算中以 BEPC 为例, 具体的阻抗模型和参数分别列在表 1^[9]和表 2.

表1 BEPC阻抗几个主要模式的参数

N	f_i / GHz	$(R/Q)/\Omega$	Q_i	N	f_i / GHz	$(R/Q)/\Omega$	Q_i
1	0.165	197.9	5.10	5	3.440	1058.0	2.80
2	1.770	2826.0	9.00	6	4.700	330.0	37.00
3	1.580	1816.0	1.25	7	5.250	290.0	40.00
4	2.050	370.0	9.50	8	6.750	590.0	4.50

表2 模拟计算中所用的BEPC的参数

能量	E / GeV	2.015	同步振荡频率	f_s / Hz	3.96×10^4
高频电压幅值	V_{Rf} / MeV	2.0	谐波数	H	160
回旋周期	T_0 / s	8.019×10^{-7}	轨道曲率半径	R_b / m	10.345
回旋频率	f_0 / Hz	1.2576×10^6	每圈辐射损失	U_0 / keV	141.0
高频频率	f_{Rf} / Hz	2.012×10^8	动量压缩因子	α	4.0×10^{-2}

首先考察图 3(a), MCA 计算出的相干振荡模式谱: 在流强为零时, 振荡模式为分立的谱线, 频率(Ω)为同步振荡的整数倍, 此时不同径向模是简并的; 随着流强的增加, 简并的

径向模式开始劈裂, 形成一个连续的窄带, 频移逐渐增大. 到达 $\sim 8\text{mA}$ 时, 角向模 $m = 1$ 内的两个径向模发生耦合, 频率出现虚部, 意味着该模式振幅按指数增长. 而由测量数据得到的流强阈值公式^[4] $I_{\text{th}} = 13.18\alpha_p^{1.8} E_s^{3.8} v_s^{-0.8}$ 计算, 阈值流强为 9.15mA , 两者基本符合. 图 4 把 $m = 1$ 角向模式谱及这个不稳定性模式的增长率放大画了出来, 这可以更清楚地看到模耦合的过程. 此时的不稳定性是由 $m = 1$ 的角向模内的不同径向模耦合导致的, 是一种比较弱的不稳定性, 相空间的密度分布主要是由势阱扰动决定的. 因此如图 3(b) 所显示的那样, 在这个流强范围不稳定性模式的增长率 α 比较小. 随着流强继续增加, 由图 3 可以看到, 在 25mA 时, 又出现了 $m = 2$ 和 $m = 3$ 的角向模发生耦合, 这是较强的不稳定性, 此时模式耦合十分复杂, 既有不同径向模的耦合, 也有不同角向模的耦合, 其增长率也远大于不稳定性发生时两个径向模耦合的增长率, 这与粒子跟踪的结果也是一致的^[10].

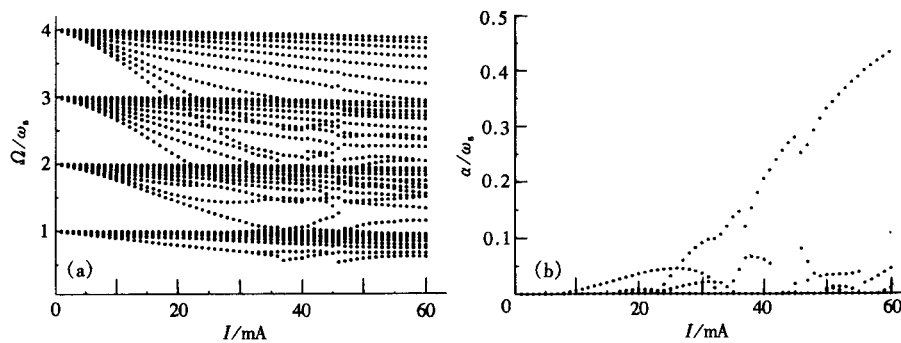
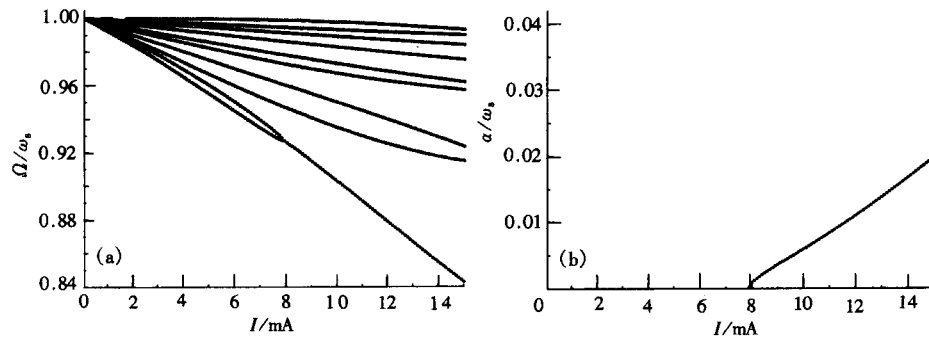


图3 MCA计算的模式谱

(a) 相干振荡频率; (b) 相干振荡增长率.

图4 $m=1$ 的两个径向模式耦合示意图

(a) 相干振荡频率; (b) 相干振荡增长率.

5 总结与讨论

B. Chen 的程序基于 Fokker-Planck 方程, 采用 (z, p_z) 坐标, 在 Hermite 多项式组成的正交基上展开分布函数, 其优点是易于处理辐射项, 但模式的物理意义不清晰, 收敛有时不好. Yokoya 和 Oide 的程序基于 Vlasov 方程, 采用 (J, ϕ) 坐标, ϕ 方向采用三角函数, J 方向用阶跃函数展开分布函数, 其优点是模式物理意义清晰, 表达式简洁, 收敛快, 但当 J 方向展

开的阶数较高时可能会产生耦合模式与非耦合模式的混淆^[8],而且计算辐射阻尼项存在困难. 鉴于此,编写了在 (J, ϕ) 坐标下用 Laguerre 多项式与三角函数构成的完备正交函数上展开分布函数来数值求解 Vlasov 方程. 计算结果表明:采用 (J, ϕ) 坐标,可以保证较快的收敛和具有明显物理意义的模式;采用了 Laguerre 多项式展开,每一个多项式都代表束团的集团运动,不会引起上述混淆,而且多项式的连续性也使辐射阻尼项的处理较为容易,可以更准确地确定不稳定性的阈值,这与预期的是一致的.

作者感谢方守贤老师对本工作的有益指导和讨论.

参 考 文 献

- 1 Chao A. Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerator. New York: Wiley, 1993
- 2 Sacherer F. IEEE Trans. Nucl. Science NS-24,1977, (3):1393
- 3 Chao A, Gareyte J. Part. Accel., 1990, 25:229
- 4 Qin Q et al. Proc. of the Workshop on Beam Instabilities in Storage Ring. Hefei, 1994, 72—77
- 5 Oide K, Yokoya K. KEK-Preprint 90-10, 1990; Oide K. KEK Preprint 94-138, 1994
- 6 Fang S X et al. KEK Proceedings, 95-7, 1995, 115-128
- 7 Chen B. The Longitudinal Collective Instabilities of Nonlinear Hamiltonian Systems in a Circular Accelerator (Ph. D Dissertation). Univ. of Texas, Austin; 1994, 10
- 8 Baartman R, D'yachkov M. Proc. IEEE Part. Accel. Conf. Dallas: 1995
- 9 Wang Guangwei. Measuring the Longitudinal Impedance of Components in the BEPC Storage Ring, Ph. D. Thesis (in Chinese). Beijing: IHEP. 1989
(王光伟. BEPC 储存环纵向阻抗的测量(博士论文). 北京:高能所. 1989)
- 10 Hhuang Wenhui. Proceedings of the sixth Particle Accelerator Physics Symposium (in Chinese). 1997, 223—227
(黄文会. 第六届全国加速器物理学术交流会论文集. 1997, 223—227)

Numerical Solution for Vlasov Equation *

Huang Wenhui Wang Guangwei

(Department of Engineer Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract The Vlasov equation is solved by expansion in terms of generalized Laguerre polynomials. Some studies on microwave instability are done based on the code and some results are obtained.

Key words microwave instability, Vlasov equation, mode coupling, coherent oscillation

Received 21 October 1998

* Project Supported by National Natural Science Foundation of China