

# (2 + 1) 维 $SU(3)0^{++}$ 胶球波函数

惠 萍

(广东教育学院物理系 广州 510303)

**摘要** 采用截断本征方程的方法,选择连接图作为独立图,计算(2 + 1)维  $SU(3)$  胶球波函数,其  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  表现出较好的标度行为.

**关键词** 真空波函数 胶球质量 胶球波函数

## 1 引言

二十多年来,微扰 QCD 描述高能强相互作用取得很大成功,但它只适用于小距离高能物理现象,当讨论长距离低能物理现象如强子质量谱、胶子和夸克禁闭、胶球质量、真空结构等时,微扰方法就无能为力了,所以必须发展一种非微扰方法. QCD 用于描写低能现象已为大家所接受,文献 [1, 2] 在 Greensite 截断本征方程方法<sup>[3,4]</sup>的基础上,发展了一种按连续极限截断本征方程的方法研究格点规范场,用此方法计算格点规范场(2 + 1)维  $SU(2)$  真空波函数、胶球质量和胶球波函数都取得成功<sup>[1,2,5-9]</sup>. 文献 [10, 11] 计算的 2 + 1 维  $SU(3)$  真空波函数及  $0^{++}$  胶球质量也取得较为满意的结果. 利用保持连续格点极限的本征方程截断法计算(2 + 1)维  $SU(3)0^{++}$  胶球波函数,得到的  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  具有较好的标度行为.

## 2 真空波函数和胶球波函数

真空波函数和胶球波函数的长波展开为:

$$\psi_0(U) = N \exp \left[ -\frac{\mu_0}{e^2} \int d^2x \text{Tr} F^2 - \frac{\mu_2}{e^6} \int d^2x \text{Tr} (DF)^2 + \dots \right], \quad (1)$$

$$F(U) = -\frac{\mu_0^F}{e^2} \int d^2x \text{Tr} F^2 - \frac{\mu_2^F}{e^6} \int d^2x \text{Tr} (DF)^2 + \dots. \quad (2)$$

其中  $F$  为规范场张量,  $D$  为协变微分,  $\mu_0$ 、 $\mu_2$  和  $\mu_0^F$ 、 $\mu_2^F$  分别为真空波函数及胶球波函数的展开系数.

Keut-Susskind 哈密顿量为:

$$\hat{H} = \frac{g^2}{2a} \left[ \sum_l E_l^2 - \frac{2}{g^4} \sum_p (\text{Tr} U_p^+ + \text{Tr} U_p) \right] \quad (3)$$

其中  $\text{Tr} U_p = \text{Tr} U_1 U_2 U_3 U_4$ ,  $g$  为无量纲耦合常数,  $e$  为不变荷, 它们之间的关系为  $g = ae^2$

真空波函数为:

$$|\Omega\rangle = e^{R(U)} |0\rangle, \quad (4)$$

$R(U)$  由 wilson 圈组成, 态  $|0\rangle$  定义为:

$$E_i^a |0\rangle = 0,$$

由  $\hat{H}|\Omega\rangle = \varepsilon|\Omega\rangle$  推得  $\hat{H}$  的本征方程为:

$$\sum_i \{ [E_i^a, [E_i^a, R]] + [E_i^a, R][E_i^a, R] \} - \frac{2}{g^4} \sum_p (\text{Tr} U_p + \text{Tr} U_p^+) = \frac{2a}{g^2} \varepsilon_0.$$

$\varepsilon_0$  为真空能量,  $R$  由独立的相连图组成, 按圈图的阶对  $R$  作展开:

$$R = \sum_i R_i,$$

本征方程保持正确连续极限到三级近似:

$$\begin{aligned} \sum_i \{ [E_i^a, [E_i^a, R_1 + R_2 + R_3]] + [E_i^a, R_1][E_i^a, R_1] + 2[E_i^a, R_1][E_i^a, R_2] \} - \\ \frac{2}{g^4} \sum_p (\text{Tr} U_p + \text{Tr} U_p^+) = \frac{2a}{g} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中取  $R_1$  为:

$$R_1 = c_0 [ \square + \square ] = c_0 ( \square + \text{h.c.} ). \quad (6)$$

由  $[E_i^a, R_1][E_i^a, R_1]$  产生 6 个二阶独立图:

$$\begin{aligned} R_2 = c_1 ( \square \square + \text{h.c.} ) + c_3 ( \square \square ) + c_4 ( \square \square + \text{h.c.} ) + c_5 ( \square \square + \text{h.c.} ) + \\ c_6 ( \square \square + \text{h.c.} ) + c_7 ( \square \square + \text{h.c.} ). \end{aligned} \quad (7)$$

由  $[E_i^a, R_1][E_i^a, R_2]$  产生 29 个独立三阶图:

$$\begin{aligned} R_3 = a_0 ( \square \square \square ) + a_4 ( \square \square \square ) + a_5 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + a_6 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + a_7 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + \\ a_8 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + b_3 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + b_4 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + b_5 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + \\ b_6 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + b_7 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + b_8 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + b_9 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + \\ d_0 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + d_1 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + d_2 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + d_3 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + \\ d_4 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + d_5 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + d_6 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + d_7 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + \\ d_8 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + d_9 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + e_0 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + e_1 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + \\ e_2 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + e_3 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + e_4 ( \square \square \square + \text{h.c.} ) + e_5 ( \square \square \square + \text{h.c.} ). \end{aligned} \quad (8)$$

在计算过程中把那些不独立的图利用么模条件:

$$U_{ij} U_{kl} U_{mn} \varepsilon_{jln} = \varepsilon_{ikm}, \quad (9)$$

代换掉, 以便得到独立方程, 其中  $U$  为任意群元. (9) 式这个条件可以写成:

$$2(U^+)_{ij} = 2(U^2)_{ij} - 2U_{ij} \text{Tr} U + [(\text{Tr} U)^2 - \text{Tr}(U^2)]\delta_{ij}, \quad (10)$$

$$\text{或 } 2\delta_{ij} = 2(U^3)_{ij} - 2(U^2)_{ij} \text{Tr} U + [(\text{Tr} U)^2 - \text{Tr}(U^2)]U_{ij}. \quad (11)$$

由 (10) 式可得:

$$2 \square = \square + \square,$$

$$\square\square = \square\square + \square + \square\square, \quad (12)$$

$$\square\square = \square + \square\square + \square\square.$$

由 (11) 式得:

$$6 = \square + \square + \square. \quad (13)$$

(7) 式和 (8) 式这些图就是用 (12)、(13) 式这些么模条件取连接图为独立图代换而来的, 例如在 (12) (13) 式中分别选  $\square$ 、 $\square\square$ 、 $\square\square$ 、 $\square\square$  为独立图. 三阶以下的图一共 36 个, 将 (6)、(7)、(8) 式代入方程 (5) 可得到 36 个独立方程, 同时计算  $R = R_1 + R_2 + R_3$  代入 (4) 式并与 (1) 式比较得真空波函数的  $\mu_0 \mu_2$  表达式 (见附录). 从 36 个方程中解出  $c_0, c_2, c_3 \dots e_5$ , 算出  $\mu_0 \mu_2$  的结果.

胶球波函数表示为:

$$|\psi_0\rangle = (F(U) - \langle F(U) \rangle_0) e^{R(U)} |0\rangle, \quad (14)$$

$\langle F(U) \rangle_0$  为真空平均值.  $F(U)$  由独立圈图组成,  $F = \sum_i F_i$  的三阶展开式为:  $F = F_1 + F_2 + F_3$ .  $F_1, F_2$  和  $F_3$  表达式同 (6)、(7)、(8) 式的形式相同, 系数分别是  $f_0, f_1, f_3 \dots e_{05}$ .  $F$  的三阶本征方程为:

$$\sum_l \{ [E_l^a, [E_l^a, F_1 + F_2 + F_3]] + 2([E_l^a, R_1][E_l^a, F_1] + [E_l^a, R_1][E_l^a, F_2] + [E_l^a, R_2][E_l^a, F_1]) \} = \frac{2a}{g^2} \Delta m F, \quad (15)$$

其中  $\Delta m$  为胶球质量隙,  $\frac{a}{g^2} \Delta m = \Delta \varepsilon$  为胶球质量.

将  $F_1, F_2$  和  $F_3$  的具体形式代入方程 (15) 可得到关于胶球波函数系列独立方程:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{16}{3}f_0 - \Delta\varepsilon f_0 + 8f_1 - \frac{8}{3}f_0c_0 + 8a_{04} - 10e_{04} - 24b_{03} - 6b_{04} - 2c_0[4f_1 + 6f_3 + 3f_4 + \right. \\
& \left. 12f_5 + 12f_6 + 5f_7] - 2f_0[4c_1 + 6c_3 + 3c_4 + 12c_5 + 12c_6 + 5c_7] \right\} = 0, \\
& \frac{40}{3}f_1 - \Delta\varepsilon f_1 + \frac{8}{3}f_0c_0 + 8a_{04} = 0, \\
& 12f_3 - \Delta\varepsilon f_3 + \frac{8}{3}f_0c_0 - \frac{16}{3}f_0c_1 - \frac{16}{3}f_1c_0 + 24a_{00} = 0, \\
& 8f_4 - f_5 - \Delta\varepsilon f_4 - 4f_0c_0 - 2f_0c_6 - 2f_6c_0 + \frac{10}{3}f_0c_7 + \frac{10}{3}f_7c_0 - 10a_{08} = 0, \\
& 11f_5 - \Delta\varepsilon f_5 + \frac{4}{3}f_0c_0 - \frac{14}{3}f_0c_6 - \frac{14}{3}f_6c_0 - \frac{10}{3}f_0c_7 - \frac{10}{3}f_7c_0 + 16a_{07} + 10a_{08} = 0, \\
& \frac{11}{3}f_6 + f_7 - \Delta\varepsilon f_6 - \frac{4}{3}f_0c_0 - 2f_0c_4 - 2f_4c_0 - 6f_0c_5 - 6f_5c_0 + 16a_{06} + 6a_{05} = 0, \\
& \frac{31}{3}f_7 + f_6 + \Delta\varepsilon f_7 + 4f_0c_0 + 2f_0c_4 + 2f_4c_0 + 2f_0c_5 + 2f_5c_0 - 6a_{05} = 0, \\
& 24a_{00} + \frac{16}{3}f_0c_1 + \frac{16}{3}f_1c_0 - \Delta\varepsilon a_{00} = 0, \\
& \frac{64}{3}a_{04} - \Delta\varepsilon a_{04} + \frac{8}{3}f_0c_1 + \frac{8}{3}f_1c_0 + 4f_0c_3 + 4f_3c_0 = 0, \\
& \frac{58}{3}a_{06} - \Delta\varepsilon a_{06} + \frac{4}{3}f_0c_1 + \frac{4}{3}f_1c_0 + 3f_0c_5 + 3f_5c_0 = 0, \\
& \frac{46}{3}a_{05} - 2a_{06} - \Delta\varepsilon a_{05} - 4f_0c_1 - 4f_1c_0 - f_0c_5 - f_5c_0 + 2f_0c_4 + 2f_4c_0 = 0, \\
& 18a_{07} - a_{08} - \Delta\varepsilon a_{07} - \frac{4}{3}f_0c_1 - \frac{4}{3}f_1c_0 + \frac{7}{3}f_0c_6 + \frac{7}{3}f_6c_0 = 0, \\
& 19a_{08} + 2a_{07} - \Delta\varepsilon a_{08} + 4f_0c_1 + 4f_1c_0 + f_0c_6 + f_6c_0 + \frac{10}{3}f_0c_7 + \frac{10}{3}f_7c_0 = 0, \\
& \frac{52}{3}b_{03} + e_{04} - \Delta\varepsilon b_{03} + f_0c_5 + f_5c_0 + \frac{5}{3}f_0c_6 + \frac{5}{3}f_6c_0 = 0, \\
& \frac{52}{3}e_{04} + b_{03} - \Delta\varepsilon e_{04} + 2f_0c_3 + 2f_3c_0 + f_0c_5 + f_5c_0 + \frac{5}{3}f_0c_7 + \frac{5}{3}f_7c_0 = 0, \\
& \frac{43}{2}b_{04} - b_{03} - \Delta\varepsilon b_{04} - 2f_0c_3 - 2f_3c_0 + f_0c_4 + f_4c_0 - f_0c_6 - f_6c_0 = 0. \tag{16}
\end{aligned}$$

计算  $F = F_1 + F_2 + F_3$  的 Wilson 圈图与 (2) 式比较得  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  的表达式为:

$$\mu_0^F = f_0 + 6\left[\frac{1}{2}(f_3 + f_5 + f_6) + 4f_1 + 4f_2 +$$

$$15(a_{04} + a_{06} / 2 + a_{07} / 2) + 27[2b_{08} + b_{09} + d_{00} + d_{05} + d_{06} + e_{05}] / 2 +$$

$$9a_{05}/2 + 3[d_{01} + d_{02} + e_{00} + e_{01} + e_{04}]/2 + 15[b_{04} + b_{06} + b_{07} + d_{07} + d_{08}]/2 + 9b_{05} + 9a_{00} + [a_{08} + 2d_{03} + d_{04} + d_{09} + e_{02}]/2 + 9e_{03}/2, \quad (17)$$

$$\mu_2^F = \frac{c_7}{2} - \frac{1}{2}c_4 + a_{08}/2 - a_{05}/2 + 3/4[d_{01} + d_{02} + e_{00} + e_{01} + e_{04}] - \frac{3}{4}[b_{04} + b_{06} + b_{07} + d_{07} + d_{08}] - 3b_{05} - d_{03} + d_{04} + d_{09}/2 - e_{03}. \quad (18)$$

### 3 计算结果

从 36 个独方程和系列方程(16)(令  $f_0 = 1$ )解出  $R$  和  $F$  的系数,再由这些系数计算得  $\mu_0$ 、 $\mu_2$  和  $\mu_0^F$ 、 $\mu_2^F$  见图 1 和图 2,从图中看到  $\mu_0$  和  $\mu_2$  在  $\frac{1}{g^2} = 1.2-1.9$  区间有较好的标度行为;  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  在更大范围 ( $1/g^2 = 0.6-1.9$ ) 表现出较好的标度行为. 而在文献 [11] 中我们看到 (2+1) 维,  $SU(3)O^{++}$  胶球质量的标度区仅仅在  $1/g^2 = 0.8-1.2$  小区间. 因此,

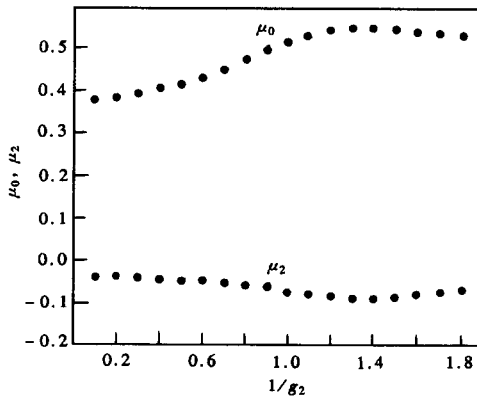


图 1

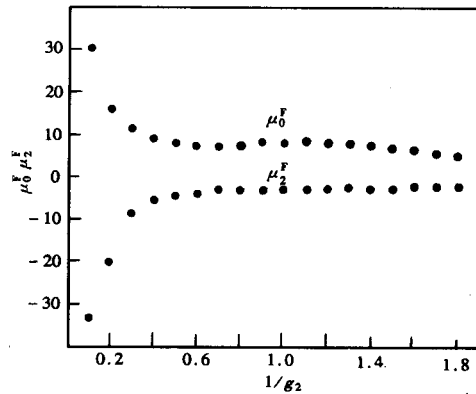


图 2

我们得到这样一个结论(见文献 [1, 2, 5-9]): 在 (2+1) 维  $SU(2)$  和 (2+1) 维  $SU(3)$  格点规范场的计算中,真空波函数或胶球波函数的标度窗口与胶球质量的标度窗口不一定相同.

作者感谢中山大学物理系陈启洲教授的有益帮助

### 参 考 文 献

- 1 Guo Shouhong, Chen Qizhou, Li Lei. Phys. Rev., 1994, **D49**:507
- 2 Chen Qizhou, Guo Shouhong, Zheng Weihong et al. Phys. Rev., 1994, **D50**:3564
- 3 Greensite J P. Nuclear Physics, 1980, **B166**:113
- 4 Greensite J P. Phys. Lett., 1987, **B191**:431

- 5 Chen Qizhou, Cai Pengfei, Fang Xinyan et al. Commun. Theor. Phys., 1997, 27:337
- 6 Hu Lian, Luo Xiangqian, Chen Qizhou et al. Commun. Theor. Phys., 1997, 28:327
- 7 Hui Ping, Chen Qizhou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1995, 19(9):820  
(惠萍、陈启洲. 高能物理与核物理 1995, 19(9):820)
- 8 HuiPing, Cai Pengfei, Chen Qizhou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1996, 20(1):55  
(惠萍、蔡鹏飞、陈启洲. 高能物理与核物理 1996, 20(1):55)
- 9 Hu Lian, Hui Ping, Chen Qizhou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1997, 21(11):995  
(胡连. 惠萍、陈启洲. 高能物理与核物理 1997, 21(11):995)
- 10 Chen Qizhou, Luo Xiangqian, Guo Shuohong. Phys. Lett., 1995, B341:349
- 11 Chen Qizhou, Luo Xiangqian, Guo Shuohong Phys. Lett., 1995, B348:560

## 附录:

$$\frac{16}{3}c_0 - \frac{2}{g^4} + 8c_1 - \frac{4}{3}c_0^2 + 8a_4 - 10e_4 - 24b_3 - 6b_4 - 2c_0[4c_1 + 6c_3 + 3c_4 + 12c_5 + 12c_6 + 5c_7] = 0,$$

$$\frac{40}{3}c_1 + \frac{4}{3}c_0^2 + 8a_4 = 0, \quad 12c_3 + \frac{4}{3}c_0^2 - \frac{16}{3}c_0c_1 + 24a_0 = 0,$$

$$8c_4 - c_5 - 2c_0^2 - 2c_0c_6 + \frac{10}{3}c_0c_7 - 10a_8 = 0, \quad 11c_5 + \frac{2}{3}c_0^2 - \frac{14}{3}c_0c_6 - \frac{10}{3}c_0c_7 + 16a_7 + 10a_8 = 0,$$

$$\frac{31}{3}c_6 + c_7 - \frac{2}{3}c_0^2 - 2c_0c_4 - 6c_0c_5 + 6a_5 + 16a_6 = 0, \quad \frac{31}{3}c_7 + c_6 + 2c_0^2 + 2c_0c_4 + 2c_0c_5 - 6a_5 = 0.$$

$$24a_0 + \frac{16}{3}c_0c_1 = 0, \quad \frac{64}{3}a_4 + \frac{2}{3}c_0c_1 + 4c_0c_3 = 0, \quad \frac{58}{3}a_6 + \frac{4}{3}c_0c_1 + 3c_0c_5 = 0,$$

$$\frac{46}{3}a_5 - 2a_6 - 4c_0c_1 - c_0c_5 + 2c_0c_4 = 0, \quad 18a_7 + a_8 - \frac{4}{3}c_0c_1 + \frac{7}{3}c_0c_6 = 0,$$

$$19a_8 + 2a_7 + 4c_0c_1 + c_0c_6 + \frac{10}{3}c_0c_7 = 0.$$

$$\frac{52}{3}b_3 + e_4 + c_0c_5 + \frac{5}{3}c_0c_6 = 0, \quad \frac{52}{3}e_4 + b_3 + 2c_0c_3 + c_0c_5 + \frac{5}{3}c_0c_7 = 0,$$

$$\frac{52}{3}b_4 - b_3 - 2c_0c_3 + c_0c_4 - c_0c_6 = 0, \quad \frac{32}{3}b_5 - 2b_6 - 2c_0c_4 = 0, \quad \frac{41}{3}b_6 - b_8 - c_0c_5 + \frac{1}{3}c_0c_4 = 0,$$

$$13b_7 - b_9 + d_4 - c_0c_6 - \frac{1}{3}c_0c_4 = 0, \quad 13d_4 + b_7 + c_0c_4 - c_0c_7 - d_2 = 0,$$

$$16b_9 - \frac{1}{3}c_0c_5 + d_2 + \frac{1}{3}c_0c_6 = 0, \quad \frac{50}{3}b_8 + \frac{2}{3}c_0c_5 = 0.$$

$$16d_2 + b_9 + c_0c_5 + \frac{1}{3}c_0c_7 = 0, \quad \frac{46}{3}d_0 + d_1 - \frac{1}{3}c_0c_6 = 0, \quad \frac{46}{3}d_1 - 2d_0 + d_3 + c_0c_6 - \frac{1}{3}c_0c_7 = 0,$$

$$\frac{46}{3}d_3 + 2d_1 + 2c_0c_7 = 0, \quad \frac{50}{3}d_5 + \frac{2}{3}c_0c_5 = 0, \quad \frac{41}{3}d_7 - 2d_5 - 2c_0c_5 + \frac{2}{3}c_0c_4 = 0,$$

$$16d_0 + e_0 - \frac{2}{3}c_0c_5 + \frac{2}{3}c_0c_6 = 0, \quad 13d_8 - d_6 + d_9 - 2c_0c_6 - \frac{2}{3}c_0c_4 = 0.$$

$$16e_0 + d_6 + 2c_0c_5 + \frac{2}{3}c_0c_7 = 0, \quad 13d_9 + d_8 - e_0 + 2c_0c_4 - 2c_0c_7 = 0, \quad \frac{32}{3}e_3 - d_7 - 2c_0c_4 = 0,$$

$$\frac{46}{3}e_1 + 2c_2 + 2e_5 + 2c_0c_6 - \frac{2}{3}c_0c_7 = 0, \quad \frac{46}{3}e_5 + e_1 - \frac{2}{3}c_0c_6 = 0, \quad \frac{46}{3}e_2 + e_1 + 2c_0c_7 = 0.$$

$$\mu_0 = c_0 + 6\left[\frac{1}{2}c_3 + c_5 + c_6\right] + 4c_1 + 4c_4 +$$

$$15\left[a_4 + \frac{a_6}{2} + \frac{a_7}{2}\right] + 27[2b_8 + b_9 + d_0 + d_5 + d_6 + d_8] / 2 + 9a_5 / 2 +$$

$$3[d_1 + d_2 + e_0 + e_1 + e_4] / 2 + 15[b_4 + b_6 + b_7 + d_7 + d_8] / 2 + 9b_5 + 9a_0 +$$

$$[a_8 + 2d_3 + d_4 + d_9 + e_2] / 2 + 9e_3 / 2.$$

$$\mu_2 = \frac{a_7}{2} - \frac{1}{2}c_4 + a_8 / 2 - a_5 / 2 + \frac{3}{4}[d_1 + d_2 + e_0 + e_1 + e_4] - \frac{3}{4}[b_4 + b_6 + b_7 + d_7 + d_8] -$$

$$3b_5 - d_3 + d_4 + d_9 / 2 - e_3.$$

## $(2+1)$ -D $SU(3)0^{++}$ Glueball Wavefunction

Hui Ping

(Department of Physics, Guangdong College of Education, Guangzhou 510303)

**Abstract** Adopting connected graphs as independent graphs, the  $(2+1)$ -D  $SU(3) 0^{++}$  glueball wavefunction is calculated using scheme of truncating eigenvalue equations.

**Key words** vacuum wavefunction, Glueball wavefunction, Glueball mass