第24卷 第3期 高能物理与核物理 Vol.24, No.3
2000年3月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 2000

推广 t-J 模型的坐标 Bethe Ansatz 方法

岳瑞宏 范桁 曹俊鹏
(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 利用坐标 Bethe Ansatz 方法,研究了推广的 t-J 模型的精确解,导出了两组 Bethe Ansatz 方程;同时证明了在两体散射问题中的散射矩阵正是三角型的非对称六顶角 R 矩阵.

关键词 推广 t-J 模型 坐标 Bethe Ansatz 散射矩阵

1 引言

强关联电子系统在高温超导研究中的意义十分重大. 为了从理论上解释高温超导现象,Anderson 等人[1,2]提出用 t-J 模型来刻划高温超导. 它包括近邻电子跳动(t)和反铁磁交换(J). 在一维情形下,哈密顿量可以写成:

$$H = \mathrm{t}\sum_{j=1}\sum_{\sigma}(C_{j,\sigma}^{+}C_{j+1,\sigma} + \mathrm{h.c.}) + \mathrm{J}\sum_{j=1}\left(\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_{j+1} - \frac{1}{4}n_j n_{j+1}\right). \tag{1}$$

其中 L 是该模型的格点数目,$C_{j,\sigma}^{+}(C_{j,\sigma})$是具有自旋为 σ 的电子产生(湮没)算子;$\boldsymbol{S}_j$ 是电子的自旋,n_j 是第 j 个格点的电子数. 在上述哈密顿量中存在一个约束,即每个格点最多只能有一个电子. 当 $J=\pm 2t$ 时,该模型已被证明是可积的[3,4]. 事实上高温超导现象更多地依赖样品的具体细节,而该模型在可积点却没有一个非平庸的自由参数. 基于物理上的考虑,Fei 和 Yue 等人[5]提出了一个推广的 t-J 模型. 它具有 $SU_q(1|2)$对称性,并且也已被证明是可积的. 它的哈密顿量可写为

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{t,J}}^{q} = &-\sum_{j=1}^{L-1}\sum_{\sigma}(C_{j,\sigma}^{+}C_{j+1,\sigma} + \mathrm{h.c.}) - \frac{q-q^{-1}}{2}\sum_{j=1}^{L-1}(n_j S_{j+1}^{z} - S_j^{z} n_{j+1}) - \\ &2\sum_{j=1}^{L-1}\left\{S_j^{x}S_{j+1}^{x} + S_j^{y}S_{j+1}^{y} + \left(\frac{q+q^{-1}}{2}\right)\left(S_j^{z}S_{j+1}^{z} - \frac{1}{4}\right)\delta_{n_j,1}\delta_{n_{j+1},1}\right\} - \\ &(q+q^{-1})\sum_{j=1}^{L-1}n_j - q(n_L - n_1) + q^{-1}(L-1).\end{aligned} \tag{2}$$

其中 q 是一个表征电子自旋间相互作用的参数. 当 q 趋近于 1 时,该哈密顿量退化为通常的超对称 t-J 模型的哈密顿量(t=1,J=2).

1999-01-04 收稿

本文利用坐标 Bethe Ansatz 方法得到了该模型在周期性边界条件下的本征值和本征态矢量. 尽管该模型已被用代数 Bethe Ansatz 方法详细讨论过. 但到目前为止,还没有人用坐标 Bethe Ansatz 方法来研究和讨论. 我们认为这是值得一试的工作. 尤其特别的是:由于哈密顿量中$(q-q^{-1})(n_jS_{j+1}^z-S_j^zn_{j+1})/2$项的出现使得问题变得很复杂. 通过定义良好的波函数,我们成功地克服了这一困难. 该技巧有可能被运用到其它的模型. 我们发现该散射矩阵实质上就是非对称的三角型六顶角 R 矩阵. 通过求解由此散射矩阵构成的 Monodromy 矩阵的本征值方程,给出该模型的本征值和 Bethe Ansatz 方程. 我们认为这种方法可以推广到一般开边界情形.

2 推广的 t-J 模型及其解

体系(2)具有一般的开边界条件,边界项为 $q(n_L-n_1)$. 为简化计算,加上周期性边界条件:$C_{j+L,\sigma}^+=C_{j,\sigma}^+,C_{j+L,\sigma}=C_{j,\sigma}$. 它将消除边界项带来的影响. 同时采用三角的耦合常数,则推广的 t-J 模型的哈密顿量可写成[6]

$$H=-\sum_{j=1}^{L}\sum_{\sigma}(C_{j,\sigma}^+C_{j+1,\sigma}+C_{j+1,\sigma}^+C_{j,\sigma})-2\sum_{j=1}^{L}(S_j^+S_{j+1}^-+S_j^-S_{j+1}^++\cos\gamma S_j^zS_{j+1}^z)+\frac{1}{2}\cos\gamma\sum_{j=1}^{L}n_jn_{j+1}-\mathrm{i}\sin\gamma\sum_{j=1}^{L}(n_jS_{j+1}^z-S_j^zn_{j+1}),\tag{3}$$

其中 S_j 是电子的自旋.

$$S_j^+=\frac{1}{2\sqrt{2}}(S_j^x+\mathrm{i}S_j^y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}C_{j,\uparrow}^+C_{j,\downarrow},$$

$$S_j^-=\frac{1}{2\sqrt{2}}(S_j^x-\mathrm{i}S_j^y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}C_{j,\downarrow}^+C_{j,\uparrow},$$

$$S_j^z=\frac{1}{2}(C_{j,\uparrow}^+C_{j,\uparrow}-C_{j,\downarrow}^+C_{j,\downarrow}).$$

无电子态是 H 的一个本征态,其本征值为零,称之为真空,记为$|0\rangle$. 利用产生算子作用于真空上,即可得到多电子态.

设单电子本征态为:$|\psi_\sigma\rangle=\sum_{x=1}^{L}f_\sigma(x)C_{x,\sigma}^+|0\rangle$,代入薛定谔方程并比较 $C_{x,\sigma}^+|0\rangle$ 的系数,可得

$$Ef_\sigma(x)=-f_\sigma(x-1)-f_\sigma(x+1).$$

设单电子波函数 $f_\sigma(x)=A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$,则本征值为 $E=-2\cos k$,再由周期性边界条件可定出 $k=\frac{2\pi}{L}n,(n=1,2,\cdots,L)$.

设双电子本征态 $|\psi_{\sigma_1,\sigma_2}\rangle=\sum_{x_1\neq x_2}f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2)C_{x_1,\sigma_1}^+C_{x_2,\sigma_2}^+|0\rangle$. 从薛定谔方程可推出

$$\begin{aligned}Ef_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2)=&-f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2-1)-f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2+1)-\\&f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1-1,x_2)-f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1+1,x_2),\end{aligned}\tag{4}$$

当 $|x_1 - x_2| > 1$ 时成立

$$Ef_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1+1) = -f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1+2) - f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1-1,x_1+1) + \left(\frac{1}{2}\cos\gamma - \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2\cos\gamma\right)f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1+1) + f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1+1,x_1)\delta_{\sigma_2,-\sigma_1} - \mathrm{i}\sin\gamma\sigma_1 f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1+1)\delta_{\sigma_2,-\sigma_1}, \tag{5}$$

当 $x_2 = x_1 + 1$ 时成立；

$$Ef_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1-1) = -f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1-2) - f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1-1,x_1-1) + \left(\frac{1}{2}\cos\gamma - \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2\cos\gamma\right)f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1-1) + f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1-1,x_1)\delta_{\sigma_2,-\sigma_1} - \mathrm{i}\sin\gamma\sigma_1 f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1-1)\delta_{\sigma_2,-\sigma_1}, \tag{6}$$

当 $x_2 = x_1 - 1$ 时成立.

为了得到方程(4),(5),(6)的解,做如下试探解

$$f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} A_{\sigma_1,\sigma_2}(k_1,k_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x_1+\mathrm{i}k_2x_2} - A_{\sigma_1,\sigma_2}(k_2,k_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2x_1+\mathrm{i}k_1x_2} & \text{如果 } x_1 < x_2 \\ -A_{\sigma_2,\sigma_1}(k_1,k_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x_2+\mathrm{i}k_2x_1} + A_{\sigma_2,\sigma_1}(k_2,k_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2x_2+\mathrm{i}k_1x_1} & \text{如果 } x_1 > x_2, \end{cases} \tag{7}$$

$$f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2) = \sum\nolimits_{P,Q}(-1)^P(-1)^Q A_Q(k_{p_1},k_{p_2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{p_1}x_{q_1}+\mathrm{i}k_{p_2}x_{q_2}}\theta(x_{q_1}<x_{q_2}).$$

其中 P,Q 都是置换群 S_2 的群元,它们分别置换 (k_1,k_2) 和 (x_1,x_2). 很容易验证上述假设满足波函数的反对称条件: $f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2) = -f_{\sigma_2,\sigma_1}(x_2,x_1)$. 把尝试解(7)式代入方程(4),不难得到: $E = -2(\cos k_1 + \cos k_2)$.

因物理体系禁止两电子处于同一格点,故而没有波函数 $f_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_1)$;但我们可以通过解析延拓的方式来定义两电子处在同一点的波函数. 并且假设由两个不同区域($x_1 < x_2$)和($x_1 > x_2$)通过延拓所获得的波函数满足如下的连续性条件

$$\rho(\sigma_1)A_{\sigma_1,\sigma_2}(k_1,k_2) - \rho(\sigma_1)A_{\sigma_1,\sigma_2}(k_2,k_1) = -A_{\sigma_2,\sigma_1}(k_1,k_2) + A_{\sigma_2,\sigma_1}(k_2,k_1). \tag{8}$$

其中 $\rho(\sigma_1)$ 是待定参数. 从方程(4),(5),(7)可求得

$$\left\{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1+k_2)} + \left(\frac{\cos\gamma}{2} - \frac{\sigma_1\sigma_2\cos\gamma}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2} + (\rho(\sigma_1) - \mathrm{i}\sin\gamma\sigma_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2}\delta_{\sigma_2,-\sigma_1}\right\}A_{\sigma_1,\sigma_2}(k_1,k_2) = \left\{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1+k_2)} + \left(\frac{\cos\gamma}{2} - \frac{\sigma_1\sigma_2\cos\gamma}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1} - \mathrm{i}\sin\gamma\sigma_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1}\delta_{\sigma_2,-\sigma_1} + \rho(\sigma_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2}\delta_{\sigma_2,-\sigma_1}\right\} A_{\sigma_1,\sigma_2}(k_2,k_1) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1})\delta_{\sigma_2,-\sigma_1}A_{\sigma_2,\sigma_1}(k_2,k_1). \tag{9}$$

为化简上述表达式,引入复谱参数 λ,它与动量 k 满足关系[7],

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k} = \frac{\sin(\lambda+\eta)}{\sin(\lambda-\eta)}. \tag{10}$$

同时令待定参数：$\rho(\sigma_1)=e^{i\sigma_1\gamma}-\cos 2\eta$，$2\eta=\pi-\gamma$. 在此变换下方程(9)可写成

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(k_1,k_2)=S_{\sigma_1,\sigma_2}^{\sigma_2',\sigma_1'}(k_1,k_2)A_{\sigma_1',\sigma_2'}(k_2,k_1). \tag{11}$$

其中

$$S(\lambda_1,\lambda_2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\sin(\lambda_1-\lambda_2)}{\sin(\lambda_2-\lambda_1+2\eta)} & \dfrac{e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)}\sin 2\eta}{\sin(\lambda_2-\lambda_1+2\eta)} & 0\\ 0 & \dfrac{e^{i(\lambda_1-\lambda_2)}\sin 2\eta}{\sin(\lambda_2-\lambda_1+2\eta)} & \dfrac{\sin(\lambda_1-\lambda_2)}{\sin(\lambda_2-\lambda_1+2\eta)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

为两电子的散射矩阵. 该散射矩阵表面上似乎不同于标准的三角 R 矩阵，但它的逆矩阵却是标准的 R 矩阵. 因此，它同样满足 Yang-Baxter 方程.

假设多电子态：

$$|\psi_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N}\rangle=\sum_{x_1\neq x_2\neq\cdots\neq x_N}f_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N}(x_1,x_2,\cdots,x_N)C_{x_1,\sigma_1}^{+}C_{x_2,\sigma_2}^{+}\cdots C_{x_N,\sigma_N}^{+}|0\rangle. \tag{13}$$

其波函数可设为

$$f_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N}(x_1,x_2,\cdots,x_N)=\sum_{Q\in S_N}\sum_{P\in S_N}(-1)^P(-1)^Q A_Q(k_{p_1},k_{p_2},\cdots,k_{p_N})\cdot$$
$$e^{(ik_{p_1}x_{q_1}+ik_{p_2}x_{q_2}+\cdots+ik_{p_N}x_{q_N})}\theta(x_{q_1}<x_{q_2}<\cdots<x_{q_N}). \tag{14}$$

其中 Q,P 都是置换群 S_N 的群元，分别置换坐标和动量. 把(13)和(14)代入薛定谔方程，利用类似于双电子情形同样的分析，可得到

$$A(k_{p_1},\cdots,k_{p_i},\cdots,k_{p_j},\cdots,k_{p_N})=S_{ij}(\lambda_{p_i}-\lambda_{p_j})A(k_{p_1},\cdots,k_{p_j},\cdots,k_{p_i},\cdots,k_{p_N}). \tag{15}$$

其中 λ_{p_j} 与 k_{p_j} 的关系由(10)定义，采用矩阵形式从而略去自旋指标. 再根据周期性边界条件

$$f_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N}(x_1,x_2,\cdots,x_N)=f_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N}(x_1+L,x_2,\cdots,x_N),$$

可得

$$S_{12}(\lambda_{p_1}-\lambda_{p_2})S_{13}(\lambda_{p_1}-\lambda_{p_3})\cdots S_{1N}(\lambda_{p_1}-\lambda_{p_N})A(k_{p_2},k_{p_3},\cdots,k_{p_N},k_{p_1})=$$
$$e^{ik_{p_1}L}A(k_{p_2},k_{p_3},\cdots,k_{p_N},k_{p_1}). \tag{16}$$

所以，求 H 的本征值问题归结为求方程(16)的本征值. 为此定义 Monodromy 矩阵

$$T(\lambda)=S_{01}(\lambda-\lambda_{p_1})S_{02}(\lambda-\lambda_{p_2})\cdots S_{0N}(\lambda-\lambda_{p_N}),$$

和 Transfer 矩阵：$t(\lambda)=\mathrm{tr}T(\lambda)$. 不难证明

$$t(\lambda_{p_1})=S_{12}(\lambda_{p_1}-\lambda_{p_2})S_{13}(\lambda_{p_1}-\lambda_{p_3})\cdots S_{1N}(\lambda_{p_1}-\lambda_{p_N}).$$

利用标准的六顶角模型的精确解，设本征矢为 $T_2^1(\lambda_1^{(1)})T_2^1(\lambda_2^{(1)})\cdots T_2^1(\lambda_m^{(1)})|0\rangle$，则相应的本征值为

$$\Lambda(\lambda)=\prod_{i=1}^{m}\frac{\sin(\lambda_i^{(1)}-\lambda-2\eta)}{\sin(\lambda-\lambda_i^{(1)})}+\prod_{i=1}^{m}\frac{\sin(\lambda_i^{(1)}-\lambda+2\eta)}{\sin(\lambda-\lambda_i^{(1)})}\prod_{l=1}^{N}\frac{\sin(\lambda-\lambda_l)}{\sin(\lambda_l-\lambda+2\eta)}. \tag{17}$$

其中参数 $\lambda_j^{(1)}$ 满足 Bethe Ansatz 方程

$$\prod_{i=1,\neq j}^{m} \frac{\sin(\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(1)} - 2\eta)}{\sin(\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(1)} + 2\eta)} = \prod_{l=1}^{N} \frac{\sin(\lambda_j^{(1)} - \lambda_l)}{\sin(\lambda_l - \lambda_j^{(1)} + 2\eta)}, \ j = 1,2,\cdots,m. \tag{18}$$

再由周期性边界条件可得另一组 Bethe Ansatz 方程

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{\sin(\lambda_i^{(1)} - \lambda_j - 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_i^{(1)})} = \frac{\sin^L(\lambda_j + \eta)}{\sin^L(\lambda_j - \eta)}, \ j = 1,2,\cdots,N. \tag{19}$$

3　讨论

本文对推广的 t－J 模型运用坐标 Bethe Ansatz 方法加以研究，得到了三角的散射矩阵，并给出了系统的能谱和 Bethe Ansatz 方程．关键是我们构造了非常妙的波函数连接条件，使得问题迎刃而解．这是以前没有人尝试过的．本文的结果与引文[8]一致！这种特殊的波函数连接条件可以运用于其它的电子或自旋链系统，如开边界系统或含有杂质的体系．详细结果将在另外的文章中给出．

参考文献　(References)

1 Anderson P W. Science, 1987, **235**:1196; Phys. Rev. Lett., 1990, **65**:2306
2 ZHANG F C, Rice T M. Phys. Rev., 1988, **B37**:3759
3 Essler F H L, Korepin V E. Phys. Rev., 1992, **B46**:9147
4 Sarkar S. J. Phys. A:Math. Gen., 1991, **24**:1137; J. Phys. A: Math. Gen., 1990, **23**:L409
5 FEI S M, YUE R H. J. Phys. A: Math. Gen., 1994, **27**:3715
6 Foerster A, Karowski M. Nucl. Phys., 1993, **B408**:512
7 Takhtajan I A, Faddeev L D. Russ. Math. Surv., 1979, 34:11
8 YUE R H, QIU Z M. Commun. Theor. Phys., 1996, **26**:389

Coordinate Bethe Ansatz for Generalized t－J Model

YUE RuiHong　FAN Heng　CAO JunPeng

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069, *China*)

Abstract　By using the coordinate Bethe ansatz method, we obtain the exact solution of generalized t-J model. It is shown that the scattering matrix for two-body scattering is trigonometric non-symmetry 6-vertex R-matrix.

Key words　generalized t-J model, coordinate Bethe Ansatz, scattering matrix

Received 4 January 1999