

单核子在具有八极形变的平均 势场中的混沌运动*

(Ⅲ) 初始相干态空时演化中几率密度及扰动强度的研究

李君清 刘芳 李希国 罗亦孝

(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心 兰州 730000)

(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

摘要 运用在二维不对称谐振子势加八极形变势中传播的二维不对称谐振子相干态,研究了不同强度耦合作用下密度矩阵的复杂性及对于扰动强度微小变动的敏感性。发现相应于对应经典系统作规则、部分混沌、及整体混沌运动的相空间区域,量子系统有对应的特征性的表现,它们与势能面上负曲率的存在及负曲率的大小有关系。

关键词 形变核 量子混沌 相干态

1 引言

当前,研究量子混沌的主要方法在于研究经典上的混沌系统在量子特征上的表现^[1,2]。其主要工作多集中于研究混沌量子系统的能谱涨落,近来人们也开始在定态波函数的形态,及波包运动的不稳定性等各种量子现象中,辨认出一系列与经典混沌行为有关的特征,从而在更广泛的方面寻找混沌运动的量子表现^[3]。我们通过相干态在八极形变势中传播的特征,来研究经典量子对应的混沌特征。文章(Ⅰ)^[4]给出了二维不对称谐振子势的相干态在二维不对称谐振子势加八极形变势中传播的一系列公式,即初始态为相干态的系统状态关于正则变量的期望值及测不准度的公式等。文章(Ⅱ)^[5]利用这些公式计算和图示了相干态在附加八极形变势中的动力学传播特征。根据波包在空时演化时是保持其基本特征,或者是发散开来,我们发现波包在不同扰动强度势中的传播特征与相应的经典系统有一一对应的性质。随着扰动强度的变化和初始状态的不同,量子系统也和经典系统一样表现了丰富多彩的性质。相应于经典系统相空间的拓扑结构,量子系统态空间的拓扑结构有对应的特征。

为使量子力学能够像经典统计力学中描述系综的相空间分布运动那样来描述量子系

1999-02-12 收稿

* 国家自然科学基金(19575057, 19775057, 19847992), 中国科学院重大项目及中国科学院院长特别支持经费资助

统的运动, Wigner^[6]引进了描述量子系统状态的相空间分布函数. 相干态是一种量子力学态, 它在相空间是定域的, 满足最小测不准关系, 在给定的势场中沿经典轨道运行^[7,8], 谐振子相干态的 Wigner 分布可直接写出. 顾雁^[9]基于 Wigner 分布函数推导出了几率密度不均匀度, 并讨论了不均匀度在何种程度上反映出规则运动与混沌运动的区别. 在另一方面, 经典系统混沌运动的主要特征是轨道对初值的敏感性, 亦即对动力学微小差异的敏感性. 在文章(II)^[5]的基础上, 本文将观察初始相干态空时演化中几率密度分布的复杂性. 对量子系统, 将描述同一初始条件下形变强度有极微小差异的两个动力学系统的波函数的重叠积分随时间的演化特征.

2 Wigner 分布的非均匀度

顾雁利用 Wigner 分布的粗粒分布和熵的表达式, 得到了 Wigner 分布的不均匀度. 对当前所考虑的哈密顿系统可得到不均匀度为

$$h(\alpha(t)) = \frac{1}{\hbar^2} [(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_z)^2], \quad (1)$$

式中, 方括号内诸量的表达式已在文章(I)^[4]中给出. 其实它就是二维振子的测不准度的量度^[3]. 对该系统我们已在经典上详尽地研究了其混沌规律和特征^[10], 本文与文献[10]中所使用的条件一致, 并将两者的结果作对比. 经典系综不均匀度 $h(\rho(t))$ 随时间的增长与系综轨道运动的 Lyapunov 指数相关. 量子系统的混沌特征则通过不均匀度随时间呈指数型增长表征, 也就是与可积哈密顿系统 H_0 相联系的量子态空间拓扑结构被破坏的程度的表征.

初始态选择起始于相空间中不同位置的两个相干态: 相干态 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle$ 的起始波包中心的位置分别为 $\{x, p_x, z, p_z\} = \{0.0, 2.67, 2.0, 0.0\}$ 和 $\{0.01, 0.0, 1.0, 2.67\}$. 考虑了形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.1, 0.5, 0.95$ 三种情况.

图 1 给出了哈密顿系统的 Wigner 非均匀度对数值 $\ln h$ 随时间 t 的演化关系. 由图可看到 $\ln h$ 都以振荡的形式随时间演变, 因为在波包的传播过程中波包正则变量的测不准度都是随时间振荡的^[5], 而正则变量的测不准度的振荡是因为形变振子势场的非谐效应所致, 即波包各成份间的干涉效应.

对 $\lambda/\lambda_c = 0.1$ 的扁八极形变, 由于势能面无负曲率出现, 经典上不出现混沌, 运动是完全规则的(见文献[10]中图 1 和图 2). 初态为 $|\alpha_1\rangle$ 时 $\ln h$ 随时间呈振荡式上升下降趋势, 其下面的包络线随时间的变化呈非常缓慢的上升趋势, 这表明系统的运动是规则的. 对初始态 $|\alpha_2\rangle$, $\ln h$ 呈振荡形式, 但其随时间变化的平均趋势仍显示线性行为, 也表现了与经典条件下一致的规则行为(见图 1(a), (b)).

对 $\lambda/\lambda_c = 0.5$ 情况, 势能面上出现负曲率. 经典上在相空间 Poincare 截面的很大区域上出现混沌随机点(见文献[10]中图 1 和图 2). 初始态 $|\alpha_1\rangle$ 起始于经典上规则的区域, 因此经典运动是规则的. 这时 Wigner 不均匀度对数值 $\ln h$ (见图 1(c)) 随时间缓慢增加, 但呈非指数性增加. 当时间 $t \approx 100$ 时, $\ln h \approx 2$, 且没有达到饱和值, 基本显示规则行为.

图1第2行右图中初始态 $|\alpha_2\rangle$ 起始于经典上混沌的区域,经典运动是混沌的. $\ln h$ 的行为也与 $|\alpha_1\rangle$ 情况大相径庭;在 $t \approx 6$ 时, $\ln h$ 的峰值已达到3.5,显示指数上升行为,然后基本上围绕3.3达到饱和值稳定下来.这充分显示混沌特征.饱和值的存在是因为所用的Hilbert空间必须在某一值截断,这种量子现象是海森堡测不准关系存在的直接结果^[9].

对同一个哈密顿量,不对称谐振子与八极形变耦合强度完全相同,起始于不同区域的相干态,其Wigner不均匀度随时间的演化行为完全不同,再次反映了系统的态空间的拓扑结构是不同的.出发于在经典上规则的区域相干态,其传播特征也显示规则行为,出发于在经典上混沌的区域相干态,其传播特征也显示混沌行为,说明经典系统的相空间拓扑结构与相应的量子系统的态空间拓扑结构有对应的特征.

当形变继续增加到 $\lambda/\lambda_c = 0.95$ 时,对应的经典系统的Poincare截面已基本不存在任何结构,系统完全混沌.此时 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle$ 都起始于经典上混沌的区域,其演化特征都差不多. $\ln h$ 在 $t < 4$ 时都随时间振荡式地指数上升,然后逐步维持到一个平衡值附近振荡,表示了完全的混沌特征(见图1(e),(f)).由图还可见当 $\lambda/\lambda_c = 0.5, 0.95$ 时,初始态 $|\alpha_2\rangle$ 的 $\ln h$ 值开始时都上冲到最大值,然后慢慢达到稳定.再一次表明了初始态起始于势场极不稳定的负曲率区域时,形变振子势场的非谐效应对核子运动的影响. $\ln h$ 的突变是由于势场的突变造成的.

3 状态对作用强度变化的敏感性

由上所述,经典混沌运动表现在对初始条件的微小差别粒子相轨道显示不稳定性.这是动力学对初始条件的微小差别的突变所引起的不稳定性的状态.我们考虑八极形变扰动所引起的混沌运动,形变强度参数 λ 的微小变化所引起的状态改变的信息可包含在如下的重叠积分中:

$$I_o = |\langle \phi(t) | \psi(t) \rangle|^2, \quad (2)$$

式中 $|\phi(t)\rangle$ 和 $|\psi(t)\rangle$ 都起始于同一个相干态,但在它们的哈密顿量中八极形变参数 λ 有微小的不同.在差值为 $\Delta\lambda/\lambda = 0.0005$ 的条件下观察 $|\phi(t)\rangle$ 相对于 $|\psi(t)\rangle$ 的偏离.对本文所考虑的哈密顿系统有

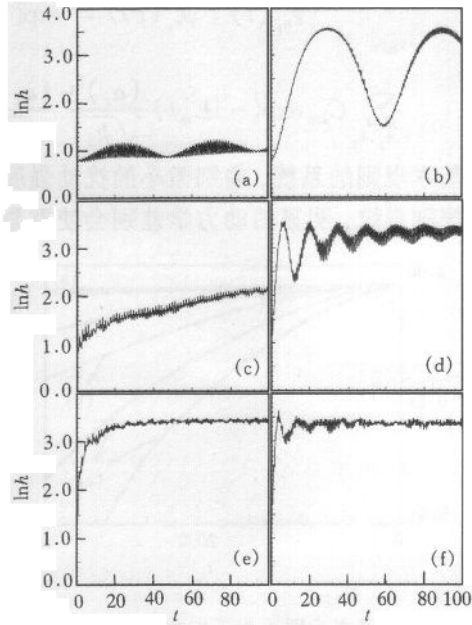


图1 Wigner非均匀度随时间 t 的演化关系((a),(b)),((c),(d)),((e),(f))分别对应于八极形变强度为 $\lambda/\lambda_c = 0.1, 0.5, 0.95$.左边一列图的初始态为 $|\alpha_1\rangle$,右边一列图的初始态为 $|\alpha_2\rangle$.

$$\langle \phi_{\alpha_1}(t) | \psi_{\alpha_1}(t) \rangle = \exp[-(|\alpha_x|^2 + |\alpha_z|^2)] \sum_{s,m,n} C'_{sm} C''_{sm} \quad (3)$$

$$\sum_{k_1, k_2} C'_{km} \exp(-iE'_m t) \frac{(\alpha_x)^{k_1}}{\sqrt{k_1!}} \frac{(\alpha_z)^{k_2}}{\sqrt{k_2!}} \cdot \sum_{l_1, l_2} C''_{ln} \exp(iE''_n t) \frac{(\alpha_x^*)^{l_1}}{\sqrt{l_1!}} \frac{(\alpha_z^*)^{l_2}}{\sqrt{l_2!}}$$

对基本规则的系统, 差别微小的扰动强度不会引起波函数有大的变动, 积分值接近于 1. 不规则系统, 明显的动力学差别会使重叠积分值很快地下降.

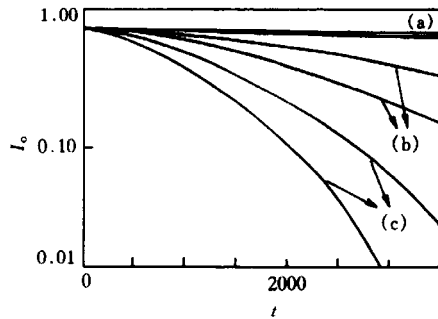


图 2 初始态为同一相干态在扰动强度有微小差别的两个量子系统中的传播函数的重叠积分随时间 t 的演化关系 (a), (b), (c) 所指的两条线都是对初始态分别为 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle$ 作的.

图 2 给出了具有同一个初始态在扰动强度差别微小的两个动力学系统中的波函数的重叠积分随时间 t 的演化. 图 2(a) 中两条曲线分别相应于初始态 $|\alpha_1\rangle$ 的重叠积分 $|\langle \phi_{\alpha_1}(t) | \psi_{\alpha_1}(t) \rangle|^2$ 和初始态 $|\alpha_2\rangle$ 的重叠积分 $|\langle \phi_{\alpha_2}(t) | \psi_{\alpha_2}(t) \rangle|^2$, 其中 $|\phi(t)\rangle$ 相应于 $\lambda/\lambda_c = 0.1$ 时, 哈密顿系统在 t 时刻的状态, $|\psi(t)\rangle$ 相应于 $\lambda/\lambda_c = 0.1005$ 时, 哈密顿系统在 t 时刻的状态. 由图可看到这种规则的情况, 一直到 $t = 3500$, 两条重叠积分区别仍不大, 都基本维持在积分值为 1 处. 图 2(c) 中两条线为 $\lambda/\lambda_c = 0.95$ 及 $\lambda/\lambda_c = 0.9505$ 时, 相应于初始态 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle$ 的重叠积分. 对这种完全混沌的情况, 重叠积分很快随时间衰减到远小于 1 处.

图 2(b) 中的两条曲线为 $\lambda/\lambda_c = 0.5$ 及 $\lambda/\lambda_c = 0.5005$ 时, 相应于初始态 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle$ 的重叠积分. 它们处于中间状态. 因为在相空间的同一区域内传播的本征函数必须满足正交归一性, 混沌情况下重叠积分随时间迅速下降, 说明这时波函数确实对扰动强度的微小改变非常敏感, 而在规则情况下并不敏感. 同一扰动强度下波函数对微小扰动的变化的敏感性虽然与传播区域有关, 但主要与扰动强度有关.

4 结果讨论

通过相干态在附加八极形势中的传播, 观察和分析了 Wigner 非均匀度随八极形变强度和初始相干态位置的不同所表现的特征. Wigner 非均匀度实际上就是系统正则变量的总测不准度. 对仅有较小形变而在经典上仍然规则的系统, 非均匀度显示出随时间的振荡行为, 振荡的平均值随时间仅有非常缓慢的上升, 也显示出规则行为; 对经典上在部分相空间混沌的情况, 对由经典上规则区域出发的相干态, 非均匀度随时间缓慢上升, 仍显示规则行为; 对由经典上混沌区域出发的相干态, 非均匀度在达到平衡前随时间指数式上升, 且先达到高于平衡值处, 然后稳定在平衡值, 显示了由于势场的突变行为, 八极形势场非谐效应的作用; 当经典相空间几乎完全混沌时, 初始态总是出发于经典上混沌的区域, Wigner 非均匀度在达到平衡值前都随时间指数上升, 显示了混沌行为. 由此, 我们得到了经典上和量子上一一对应的特征.

量子系统在相空间的同一区域内传播的本征函数必须满足正交归一性. 八极形变强度的微小改变意味着哈密顿系统的动力学条件的微小改变, 在同一区域内传播的本征函数在扰动差别微小情况下正交归一性被破坏的程度标志着系统动力学不稳定程度. 本文所计算的重叠积分与 Wigner 非均匀度给出了一致的结果.

因此, 相应于经典混沌系统的相空间拓扑结构, 量子混沌系统的态空间拓扑结构表现了对应特征. 由于经典混沌与系统势能面的几何对称性, 即与势能面中负曲率的存在及负曲率的大小有关^[10,11], 相应的量子混沌也应与势能面中负曲率的存在与大小有关.

参考文献(References)

- 1 Gutzwiller M C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, New York: Springer, 1990
- 2 Lichtenberg A J, Leiberman M A. *Regular and Stochastic Motion*, New York: Springer, 1983
- 3 XU GongOu. *Quantum Chaotic Motion (in Chinese)*. Shanghai: Science and Technigue Publisher of Shanghai, 1995 (徐射耦. 量子混沌运动, 上海: 上海科学技术出版社, 1995)
- 4 LIU Fang, LI XiGuo, LI JunQing et al. *High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese)*, 1999, **23**(11):1108 (刘芳, 李希国, 李君清等. 高能物理与核物理, 1999, **23**(11):1108)
- 5 LIU Fang, LI JunQing, LI XiGuo et al. *High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese)*, 2000, **24**(4):331—336 (刘芳, 李君清, 李希国等. 高能物理与核物理, 2000, **24**(4):331—336)
- 6 Wigner E P. *Phys. Rev.*, 1932, **40**:749
- 7 Roman Jockiw. *J. Math. Phys.*, 1968, **9**: 339
- 8 Michael Martin Nieto, Simmons L M. *Phys. Rev.*, 1979, **D20**: 1321; *Phys. Rev.*, 1979, **D20**: 1323
- 9 GU Yan. *Phys. Lett.*, 1990, **A14**: 995; GU Yan, *Quantum Chaos (in Chinese)*. Shanghai: Science and Techingue Education Publisher of Shanghai. 1996 (顾雁. 量子混沌, 上海: 上海科技教育出版社, 1996)
- 10 LI JunQing. *J. Phys.*, 1998, **G24**:1021
- 11 LI JunQing, ZHU JieDing, GU JinNan. *Phys. Rev.*, 1995, **B52**:6458

Chaotic Motion of a Nucleon in Mean Field Potential with Octupole Deformation*

(III) Study of Probability Density Distribution in Space-Temporal Variation of Initial Coherent States and the Strength of Disturbance

LI JunQing LIU Fang LI XiGuo LUO YiXiao

(*Research Center of Nuclear Theory of National Laboratory of Heavy Ion Accelerator, Lanzhou 730000, China*)

(*Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China*)

Abstract Coherent states of two dimensional asymmetrical harmonic oscillator, which propagate in additional octupole deformation potentials, are used to investigate the complexity of the density matrix and the sensitivity against the strength of disturbance. It was found that according to the regular, partly chaotic and overall chaotic characteristics of the phase space of the classical system, its quantum analogy bears out corresponding characters, which were associated with the existence of the negative curvature at the potential surface and the magnitude of the negative curvature.

Key words deformed nucleus, quantum chaos, coherent state

Received 12 February 1999

* Supported by National Natural Science Foundation of China (19575057, 19775057, 19847992), Major Project of The Chinese Academy of Sciences and Director Foundation of The Chinese Academy of Sciences