第24卷 第7期 高能物理与核物理 Vol.24, No.7
2000年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 2000

$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$衰变振幅的分波分析*

庄霆亮[1] 郭子金[2] 魏 毅[1] 李 金[2] 闫沐霖[1]

1 (中国科学技术大学非线性科学中心 合肥 230027)

2 (中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 从$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$衰变振幅的普遍表达式和过程的运动学出发,给出了$\pi\pi$不变质量谱,角关联谱和不变质量-角关联双变量谱;进行了分波分析,使得从实验上检测D波跃迁成为可能.文中还对来自J/ψ反冲的D波跃迁作了讨论.

关键词 $\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$ 衰变振幅 分波分析

1 引言

$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$是$\psi'$的主要衰变道,分支比为$(30.2 \pm 1.9)\%$[1].北京正负电子对撞机(BEPC)上的(BES)已经收集了多达3.8×10^6的ψ'事例[2].这不仅使得$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$的不变质量谱的实验研究可以更为精密,而且使得对该过程衰变振幅的角动量分波进行实验研究成为可能.这种分波研究在ψ'的事例数少时是很难进行的.本文的目的是对$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$模型无关的衰变振幅做分波分析.这对于$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$的实验研究是必要的.

$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$是低能标下的非微扰QCD过程.由$\psi'$到$J/\psi$的跃迁分两步进行[3]:由charm夸克辐射胶子,然后胶子转化为轻强子.所转化出的π^+和π^-的能量很小(小于$m_{\psi'} - m_{J/\psi} \simeq 589\mathrm{MeV} < m_\rho = 770\mathrm{MeV}$),因此$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$是一软$\pi$和软胶子过程,微扰QCD不适用.有很多理论方法和模型被用来研究这一过程:比如手征对称性和流代数[4];软胶子辐射的多极展开和重夸克位势模型[5,6];QCD能量-动量张量的求迹反常[7-9];重夸克偶素的等效拉氏量理论[10-12]等.文献[4]已给出了该过程的衰变振幅的普遍形式.推导过程表明,衰变振幅普遍形式的导出仅依赖于Lorentz不变性,公理化场论,PCAC(轴矢流部分守恒)和低能展开,而不涉及过程的动力学细节与描写这种动力学的模型.因此求得的$\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$衰变振幅的普遍形式是模型无关的,可以用来拟合实验测量到的谱函数曲线.众所周知,只有对实验测量做模型无关的拟合才是较为有意义的.通过实验可以确定模型无关振幅公式中的参数值,从而为构造和检验重夸克偶素动力学提供实验依据和准则.并且由于这是一个模型无关的普遍形式的振幅,由它给出的分波分析是完整的.在本文的后半部分将由此振幅出发,对D波跃迁给出比过去此方面研究

1999-04-01收稿,1999-06-11收修改稿

* 国家自然科学基金(19290400)和中国科学院LWTZ-1298经费资助

更全面的讨论.

$\psi'(2s)\to J/\psi(1s)$是 S 波为主的跃迁过程[4,11]. ψ'和 $J/\psi(1s)$的自旋宇称都是 1^-，由强作用下宇称守恒，P 波跃迁禁戒，但 D 波跃迁在原则上是存在的. 文献[11]曾对只含有 D 波振幅领头项的 $\psi'\to J/\psi\pi^+\pi^-$ 振幅进行了分波分析，本文将这一分析扩充到衰变振幅的普遍形式，这时 J/ψ 的反冲(其最大速度为 $0.15c$)对 D 波衰变的相对论修正将在 $O(p^2)$级完整给出，进而我们定下在该过程中 D 波衰变所占的比例.

2 衰变振幅

$\psi'\to J/\psi\pi^+\pi^-$ 的 S 矩阵为

$$\langle J/\psi(P,\epsilon),\pi^+(p_1),\pi^-(p_2)|S|\psi'(P',\epsilon')\rangle =$$
$$-i(2\pi)^4\delta^4(P'-P-p_1-p_2)\frac{\mathcal{M}(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2)}{(2^4P'_0P_0p_{10}p_{20})^{1/2}}\quad , \tag{1}$$

式中(P',ϵ')和(P,ϵ)分别为 ψ'和 J/ψ 的四动量与极化矢量，p_1 和 p_2 分别为 π^+ 和 π^- 的四动量. $\mathcal{M}(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2)$为衰变振幅，是 Lorentz 标量. 文献[4]基于流代数，PCAC 给出了 $\mathcal{M}$ 的一般形式

$$\mathcal{M}(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2) = p_1^\mu p_2^\nu A_{\mu\nu}(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2) + m_\pi^2 B(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2), \tag{2}$$

式中
$$A_{\mu\nu}(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2) \propto \langle J/\psi(P,\epsilon)|\bar{A}_{\mu\nu}(p_1,p_2)|\psi'(P',\epsilon')\rangle, \tag{3}$$
$$B(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2) \propto \langle J/\psi(P,\epsilon)|\bar{B}(p_1,p_2)|\psi'(P',\epsilon')\rangle\quad . \tag{4}$$

由于是低能软 π 过程，对 π 介子动量的低能展开是合理的. 公式(2)表明 $\mathcal{M}$ 的领头项是 $O(p^2)$(注意 $m_\pi^2\propto O(p^2)$). 在 $\psi'\to J/\psi\pi^+\pi^-$ 过程中，$\pi^+-\pi^-$ 的不变质量的平方 $m_{\pi\pi}^2=(p_1+p_2)^2$的数值范围为 $4m_\pi^2\leqslant m_{\pi\pi}^2\leqslant(M_{\psi'}-M_{J/\psi})^2$，即 $0.08\mathrm{GeV}^2\leqslant m_{\pi\pi}^2\leqslant 0.35\mathrm{GeV}^2\ll m_\rho^2=0.6\mathrm{GeV}^2$，因此精确到 $O(p^2)$时 $\mathcal{M}$ 是很好的近似. 这时式(2)中的

$$A_{\mu\nu}(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2)\propto O(1)\quad , \tag{5}$$
$$B(P',\epsilon',P,\epsilon,p_1,p_2)\propto O(1)\quad . \tag{6}$$

它们的一般表达式为

$$A_{\mu\nu} = \left(gg_{\mu\nu} + g_1\frac{P'_\mu P'_\nu}{m_{\psi'}^2}\right)(\epsilon'\cdot\epsilon) + g_2(\epsilon_\mu\epsilon'_\nu + \epsilon_\nu\epsilon'_\mu) + O(p^1)\quad , \tag{7}$$

$$B = g_3(\epsilon'\cdot\epsilon) + O(p^1)\quad , \tag{8}$$

式中 g,g_1,g_2 和 g_3 为待定常数. 在导出(7)，(8)时，用式(3)、(4)$P\cdot\epsilon=P'\cdot\epsilon'=0$ 以及 $P=P'-p_1-p_2=P'+O(p^1)$. 将(7)、(8)代入式(2)，得到

$$\mathcal{M} = \left[gp_1^\mu p_{2\mu} + g_1\frac{(p_1\cdot P')(p_2\cdot P')}{m_{\psi'}^2} + g_3m_\pi^2\right]\epsilon_{J/\psi}\cdot\epsilon_{\psi'} + g_2[p_{1\mu}p_{2\nu}+p_{1\nu}p_{2\mu}]\epsilon_{J/\psi}^\mu\epsilon_{\psi'}^\nu, \tag{9}$$

这是 $\mathcal{M}$ 精确到 $O(p^2)$的普遍形式. 在 ψ'静止系中，式(9)和文献[4,5,9,10]中的衰变振

幅表达式相同1)

3 运动学与分波分析

记 $q=p_1+p_2, r=p_1-p_2$. 在 ψ' 静止系中, ψ' 衰变到 $J/\psi\pi^+\pi^-$ 的微分衰变几率为

$$d\Gamma = A_{ph}|\mathscr{M}|^2 dm_{\pi\pi} d\cos\theta, \tag{10}$$

式中

$$A_{ph} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{16m_{\psi'}^2}(q^2-4m_\pi^2)^{1/2}|\boldsymbol{q}|, \text{(相空间因子)},$$

$$|\boldsymbol{q}| = \frac{1}{2m_{\psi'}}[(m_{\psi'}^2-(m_{\pi\pi}+m_{J/\psi})^2)(m_{\psi'}^2-(m_{\pi\pi}-m_{J/\psi})^2)]^{1/2}$$

$$m_{\pi\pi}^2,$$

θ 是 $\pi^+-\pi^-$ 静止系中 π^+ 和 J/ψ 三动量的夹角(见文献[1]), 称 θ 为关联角. 在 ψ' 静止系中, 公式(9)中的衰变振幅为

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2, \tag{11}$$

式中

$$\mathscr{M}_1 = \left[\frac{g}{2}(q^2-2m_\pi^2) + g_1 p_1^0 p_2^0 + g_3 m_\pi^2\right]\varepsilon_{\psi'}\cdot\varepsilon_{J/\psi}, \tag{12}$$

$$\mathscr{M}_2 = g_2[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu}]\varepsilon_{J/\psi}^{\mu}\varepsilon_{\psi'}^{\nu}. \tag{13}$$

在文献[11]中, 已将 $\mathscr{M}_1$ 分解为 S 波和 D 波

$$\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_{1S} + \mathscr{M}_{1D}, \tag{14}$$

其中

$$\mathscr{M}_{1S} = \frac{g}{2}(\varepsilon\cdot\varepsilon')\left[q^2 - c_1(q^2+|\boldsymbol{q}|^2)\left(1+\frac{2m_\pi^2}{q^2}\right) + c_2 m_\pi^2\right], \tag{15}$$

$$\mathscr{M}_{1D} = \frac{g}{2}(\varepsilon\cdot\varepsilon')\left[3c_1|\boldsymbol{q}|^2\left(1-\frac{4m_\pi^2}{q^2}\right)\right]P_2(\cos\theta). \tag{16}$$

这里

$$= -\frac{g_1}{3g}\left(1+\frac{g_1}{6g}\right)^{-1}, \quad c_2 = 2\left(\frac{g_3}{g}-\frac{g_1}{3g}-1\right)\left(1+\frac{g_1}{6g}\right)^{-1},$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right). \text{(勒让德函数)}.$$

然而, 由于在 $\mathscr{M}_2$(式(13))中存在着 π 介子动量与 charm 夸克偶素极化矢量间的关联, 不能像式(14)—(16)那样简单地用 $P_2(\cos\theta)$ 来对 $\mathscr{M}_2$ 项进行分解. 怎样对包括 $\mathscr{M}_2$ 项在内的衰变振幅进行分波分析是本文的任务. 事实上, 实验上 ψ' 是 e^+, e^- 对撞的反应产物, 因而一般说来 ψ' 是极化的. 假设 e^+e^- 和 ψ' 通过矢量耦合的方式相互作用, 而 e^+e^- 是非极化的, 可以求得 ψ' 的极化密度矩阵为

$$\rho_{\alpha\alpha'}^{\psi'} = \langle\psi'_\alpha \mid e_{\sigma_1}^+ e_{\sigma_2}^-\rangle \rho_{\sigma_1\sigma_1'}^{(e^+)}\rho_{\sigma_2\sigma_2'}^{(e^-)}(\langle\psi'_{\alpha'} \mid e_{\sigma_1'}^+ e_{\sigma_2'}^-\rangle)^\dagger, \tag{17}$$

1) 文献[6]给出的衰变振幅中缺少本文式(9)中的 $g_1 \frac{p_1\cdot P')(p_2\cdot P')}{m_{\psi'}^2}$ 项. 实验分析表明这一项是存在的[10,11].

其中
$$\rho_{\alpha\alpha'}^{(e^+)}=\rho_{\alpha\alpha'}^{(e^-)}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\alpha'}\quad,$$
于是此衰变的微分几率为
$$\frac{d^2\Gamma}{dm_{\pi\pi}d\cos\theta}=\frac{1}{3}A_{ph}\sum_{\alpha,\alpha',\epsilon'}\mathcal{M}(q,\cos\theta,\epsilon^{\alpha},\epsilon')\tilde{\rho}_{\alpha\alpha'}^{(\psi)}\mathcal{M}^*(q,\cos\theta,\epsilon^{\alpha'},\epsilon').$$
这里，$\tilde{\rho}=\rho(\mathrm{Tr}\rho)^{-1}$是归一化的密度矩阵．由于电子是极端相对论的，在 10^{-4}的精度内，$\tilde{\rho}=\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$．这样，可以通过令
$$\sum_{\alpha,\alpha',\epsilon'}\mathcal{M}(q,\cos\theta,\epsilon^{\alpha},\epsilon')\tilde{\rho}_{\alpha\alpha'}^{(\psi)}\mathcal{M}^*(q,\cos\theta,\epsilon^{\alpha'},\epsilon')\equiv|\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)|^2$$
来引入等效衰变振幅 $\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)$．注意，$\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}$已不再与极化矢量 ϵ 和ϵ'相关．等式(18)的左边可由式(11)—(13)算出来，这样，去掉一个不重要的总体相因子，$|\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)|$可由式(18)定下来，它的一般形式是
$$\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)=\mathcal{M}_S^{\mathrm{eff}}(q)+\mathcal{M}_D^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)\ .\tag{19}$$
通过冗长而直接的计算，得到
$$\mathcal{M}_S^{\mathrm{eff}}=\left(A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{9}C\right)^{\frac{1}{2}}\tag{20}$$
$$\mathcal{M}_D^{\mathrm{eff}}=2e^{i\tau}C^{\frac{1}{2}}P_2(\cos\theta)\tag{21}$$
$$\tau=\cos^{-1}\frac{3B+2C}{6\left[C\left(A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{9}C\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\tag{22}$$
其中
$$A=\alpha_1^2+\frac{1}{2}g_2\alpha_1\beta q^2+\frac{1}{8}g_2^2\beta^2q^4$$
$$B=2\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{2}g_2(\alpha_2-\alpha_1)\beta q^2+\frac{1}{8}g_2^2\beta^2q^2\left(\frac{m_{\psi'}^2}{m_{J/\psi}^2}|\boldsymbol{q}|^2-q^2\right),$$
$$C=\alpha_2^2-\frac{1}{2}g_2\alpha_2\beta q^2-\frac{m_{\psi'}^2}{8m_{J/\psi}^2}g_2^2\beta^2q^2|\boldsymbol{q}|^2$$
$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{g_1}{2}\right)q^2+g_1|\boldsymbol{q}|^2+(g_3-1)m_\pi^2,\alpha_2=-\frac{g_1}{4}|\boldsymbol{q}|^2\beta\ ,$$
$$\beta=1-\frac{4m_\pi^2}{q^2}\ .$$
注意，$\mathcal{M}_S^{\mathrm{eff}}(q)$和 θ 及τ 无关，而 $\mathcal{M}_D^{\mathrm{eff}}\propto P_2(\cos\theta)$且是复数，$\tau$ 反映D 波与S 波的相位差．然 $\mathcal{M}_2$ 项对 D 波有贡献．

实验上可直接测量的是过程的不变质量谱，角关联谱和不变质量－关联角双变量谱．不变质量－关联角双变量谱为
$$\frac{d\Gamma}{dm_{\pi\pi}d\cos\theta}\quad\frac{1}{3}A_{ph}(x_1+x_2\cos^2\theta+x_3\cos^4\theta),$$
这里

$$x_1 = (0.0003733 - 0.002837g_1 + 0.005391g_1^2 + 0.0007466g_2 - 0.002837g_1g_2 + 0.0007466g_2^2 - 0.0007466g_3 + 0.002837g_1g_3 - 0.0007466g_2g_3 + 0.0003733g_3^2) + (-0.01932 + 0.07200g_1 + 0.005398g_1^2 - 0.02898g_2 + 0.03529g_1g_2 - 0.01932g_2^2 + 0.01932g_3 + 0.001420g_1g_3 + 0.009660g_2g_3)m_{\pi\pi}^2 + (0.2500 + 0.03658g_1 + 0.002026g_1^2 + 0.2500g_2 + 0.01820g_1g_2 + 0.1250g_2^2 + 0.0001778g_1g_3)m_{\pi\pi}^4 + (0.004600g_1 + 0.0003382g_1^2 + 0.002300g_1g_2)m_{\pi\pi}^6 + 0.00002116g_1^2m_{\pi\pi}^8,$$

$$x_2 = (0.009149g_1 - 0.01278g_1^2 - 0.0007466g_2 + 0.009149g_1g_2 - 0.009687g_2^2 - 0.003474g_1g_3 + 0.0007466g_2g_3) + (-0.0002193g_1 + 0.0008333g_1^2 - 0.0002193g_1g_2 + 0.0003106g_2^2 + 0.0002193g_1g_3)m_{\pi\pi}^{-2} + (-0.09816g_1 + 0.02481g_1^2 + 0.02898g_2 - 0.08850g_1g_2 + 0.09469g_2^2 + 0.008254g_1g_3 - 0.009660g_2g_3)m_{\pi\pi}^2 + (0.2138g_1 + 0.01420g_1^2 - 0.2500g_2 + 0.08878g_1g_2 - 0.2765g_2^2 - 0.0001778g_1g_3)m_{\pi\pi}^4 + (-0.004600g_1 + 0.001627g_1^2 - 0.004600g_1g_2 + 0.003258g_2^2)m_{\pi\pi}^6 - 0.00004232g_1^2m_{\pi\pi}^8,$$

$$x_3 = (0.01051g_1^2 - 0.006311g_1g_2 + 0.008940g_2^2) + 0.00003220g_1^2m_{\pi\pi}^{-4} + (-0.001020g_1^2 + 0.0002193g_1g_2 - 0.0003106g_2^2)m_{\pi\pi}^{-2} + (-0.03846g_1^2 + 0.05321g_1g_2 - 0.07537g_2^2)m_{\pi\pi}^2 + (0.04645g_1^2 - 0.1070g_1g_2 + 0.1515g_2^2)m_{\pi\pi}^4 + (-0.001965g_1^2 + 0.002300g_1g_2 - 0.003258g_2^2)m_{\pi\pi}^6 + 0.00002116g_1^2m_{\pi\pi}^8.$$

角关联谱为

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\Gamma}}{\mathrm{d}\cos\theta} = \int_{2m_\pi}^{M_{\psi'}-M_{J/\psi}} \mathrm{d}m_{\pi\pi}\,\frac{1}{3}A_{\mathrm{ph}}|\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}|^2 = \mathrm{const.}(y_1 + y_2\cos^2\theta + y_3\cos^4\theta),$$

$$y_1 = 0.001683 + 0.002907g_1 + 0.001439g_1^2 + 0.001341g_2 + 0.001110g_1g_2 + 0.0005402g_2^2 + 0.0006841g_3 + 0.0006860g_1g_3 + 0.0002602g_2g_3 + 0.00008183g_3^2,$$

$$y_2 = -0.0004924g_1 - 0.0005308g_1^2 - 0.001341g_2 - 0.001293g_1g_2 + 0.0002817g_2^2 - 0.0001274g_1g_3 - 0.0002602g_2g_3,$$

$$y_3 = 0.00005554g_1^2 + 0.0001825g_1g_2 - 0.0002585g_2^2.$$

不变质量谱为

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\Gamma}}{\mathrm{d}m_{\pi\pi}} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\,\frac{1}{3}A_{\mathrm{ph}}(|\mathcal{M}_S^{\mathrm{eff}}(q)|^2 + |\mathcal{M}_D^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)|^2) = \frac{1}{3}A_{\mathrm{ph}}(z_0m_{\pi\pi}^{-4} + z_1m_{\pi\pi}^{-2} + z_2 + z_3m_{\pi\pi}^2 + z_4m_{\pi\pi}^4 + z_5m_{\pi\pi}^6 + z_6m_{\pi\pi}^8),$$

这里不出现 $\mathcal{M}_S^{\mathrm{eff}}(q)$与 $\mathcal{M}_D^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)$的交叉项. 由 $\mathcal{M}_D^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)$的定义(21)式,可发现交叉

项可写成 $F(m_{\pi\pi})P_2(\cos\theta)$ 的形式，这里 $F(m_{\pi\pi})$ 只是 $m_{\pi\pi}$ 的函数，不含 $\cos\theta$，并且注意到

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta P_2(\cos\theta) = 0 .$$

故不出现 $\mathcal{M}_S^{\mathrm{eff}}(q)$ 与 $\mathcal{M}_D^{\mathrm{eff}}(q,\cos\theta)$ 的交叉项(即交叉项积分为0). 其中

$$z_0 = 0.00001288g_1^2,$$

$$z_1 = -0.0001462g_1 + 0.0001474g_1^2 - 0.00005847g_1g_2 + 0.00008283g_2^2 + 0.0001462g_1g_3,$$

$$z_2 = 0.0007466 + 0.0004246g_1 + 0.006462g_1^2 + 0.0009955g_2 - 0.002100g_1g_2 - 0.001389g_2^2 - 0.001493g_3 + 0.003358g_1g_3 - 0.0009955g_2g_3 + 0.0007466g_3^2,$$

$$z_3 = -0.03864 + 0.07857g_1 + 0.01195g_1^2 - 0.03864g_2 + 0.03287g_1g_2 - 0.005663g_2^2 + 0.03864g_3 + 0.008343g_1g_3 + 0.01288g_2g_3,$$

$$z_4 = 0.5000 + 0.2157g_1 + 0.03210g_1^2 + 0.3333g_2 + 0.05279g_1g_2 + 0.1262g_2^2 + 0.0002370g_1g_3,$$

$$z_5 = 0.006134g_1 + 0.0009749g_1^2 + 0.002453g_1g_2 + 0.0008688g_2^2$$

$$z_6 = 0.00002257g_1^2.$$

通过上面谱函数的实验拟合，可以定下 $\mathcal{M}$ 中的耦合常数 g_1/g, g_2/g 和 g_3/g. D 波跃迁几率和全跃迁率之比为

$$R_D = \frac{\int \mathrm{d}q^2\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\,\frac{1}{m_{\pi\pi}}A_{\mathrm{ph}}|\mathcal{M}_D|^2}{\int \mathrm{d}q^2\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\,\frac{1}{m_{\pi\pi}}A_{\mathrm{ph}}|\mathcal{M}_S + \mathcal{M}_D|^2}$$

4 讨论与总结

最后，讨论式(11)中 $\mathcal{M}_2$ 项的物理意义. 因为 $p_1\cdot p_2 = \boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2 - p_1^0p_2^0$，故 $\mathcal{M}_2$ 可改写为

$$\mathcal{M}_2 = g_2\left[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - \frac{2}{3}g_{\mu\nu}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2\right]\epsilon_{J/\psi}^{\mu}\epsilon_{\psi'}^{\nu} + \frac{2}{3}g_2[p_1^{\mu}p_{2\mu} + p_1^0p_2^0]\epsilon_{J/\psi}\cdot\epsilon_{\psi'} . \tag{24}$$

在实验室系(即 ψ' 静止系)中初态 ψ' 速度为0，因而有 $p_1^0p_2^0 = \frac{(p_1\cdot P')(p_2\cdot P')}{m_{\psi'}^2}$，所以上式中的后一部分 $\frac{2}{3}g_2[p_1^{\mu}p_{2\mu} + p_1^0p_2^0]\epsilon_{J/\psi}\cdot\epsilon_{\psi'}$ 又可写为 $\frac{2}{3}g_2\left[p_1^{\mu}p_{2\mu} + \frac{(p_1\cdot P')(p_2\cdot P')}{m_{\psi'}^2}\right]\epsilon_{J/\psi}\cdot\epsilon_{\psi'}$，因而形式上与式(9)第一部分中的1,2项相同，可以通过重新定义常数 $g\to g + \frac{2}{3}g_2$ 和 $g_1\to g_1 + \frac{2}{3}g_2$ 而把这两项吸收到式(9)的第一部分中去. 这时

$$\mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2^R = g_2[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - \frac{2}{3}g_{\mu\nu}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2]\epsilon_{J/\psi}^{\mu}\epsilon_{\psi'}^{\nu} \quad . \tag{25}$$

在 ψ′静止系中，J/ψ 的反冲速度为$\boldsymbol{v}$，则

$$\varepsilon^{\mu}=\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_p+\boldsymbol{v}\dfrac{\boldsymbol{p}_{J/\psi}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_p}{p^0_{J/\psi}+m_{J/\psi}}, & \mu=1,2,3,\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_p, & \mu=0\end{cases}\quad, \tag{26}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_p=(\varepsilon^1,\varepsilon^2,\varepsilon^3)$是 J/ψ 的三维正交极化矢量，由于 J/ψ 的反冲速度相当小($|\boldsymbol{v}|<0.15c$)，我们研究 $\mathcal{M}_2^R$ 的相对论极限，这时取$|\boldsymbol{v}|\to 0$，$\varepsilon^0\to 0$，此时

$$[p_{1\mu}p_{2\nu}+p_{1\nu}p_{2\mu}]\varepsilon^{\mu}_{J/\psi}\varepsilon^{\nu}_{\psi'}=[p_{1i}p_{2j}+p_{1j}p_{2i}]\varepsilon^{i}_{J/\psi}\varepsilon^{j}_{\psi'}$$

于是有

$$\mathcal{M}_2\simeq g_2[p_{1i}p_{2j}+p_{1j}p_{2i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}p_{1k}p_{2k}]\varepsilon^{i}_{J/\psi}\varepsilon^{j}_{\psi'}$$

可以看出，在非相对论极限下，$\mathcal{M}_2^R$ 项来源于形如

$$\langle J/\psi,\pi^+,\pi^-\left|\left(\hat{p}_{1i}\hat{p}_{2j}+\hat{p}_{2i}\hat{p}_{1j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\hat{p}_{1k}\hat{p}_{2k}\right)\varepsilon_{\psi'_i}\varepsilon_{J/\psi_j}\right|\psi'\rangle$$

的矩阵元，参照文献[5]的讨论 $\hat{p}_{1i}\hat{p}_{2j}+\hat{p}_{2i}\hat{p}_{1j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\hat{p}_{1k}\hat{p}_{2k}$ 可用2秩球张量算符来展开.

$$\hat{p}_{1i}\hat{p}_{2j}+\hat{p}_{2i}\hat{p}_{1j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\hat{p}_{1k}\hat{p}_{2k}=\sum_{q=-2}^{q=2}\hat{\varepsilon}^{q}_{ij}T^{(2)}_{q}$$

其中 $\hat{\varepsilon}^q_{ij}$ 是2秩球张量算符的分量. 应用 Wigner－Eckart 定理

$$\langle J/\psi,\pi^+,\pi^-\,|\,T^{(2)}_q\,|\psi'\rangle=$$

$$(-1)^{J'+J-M+l+s}[(2J'+1)(2J+1)]^{1/2}\begin{pmatrix}J&2&J'\\-M&q&M'\end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}l&2&l'\\J'&s&J\end{Bmatrix}\langle J/\psi,\pi^+,\pi^-\,\|\,T^{(2)}_q\,\|\,\psi'\rangle\quad,$$

J'及M'分别为 ψ′的总角动量及其 z 分量，l'为轨道角动量，s 为自旋，J/ψ 的相应量不加撇. 由于

$$\begin{Bmatrix}l&2&l'\\J'&s&J\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0&2&0\\J'&1&J\end{Bmatrix}=0\quad,$$

所以此项在非相对论极限下不存在，也就是说在忽略 J/ψ 的反冲效应(取$|\boldsymbol{v}|\sim 0$)时，与 g_2 相关的振幅((27)式)的 ψ′衰变矩阵元为0，这表明 g_2 这一项反映这一衰变过程的反冲效应.

本文从 $\psi'\to J/\psi\pi^+\pi^-$ 衰变振幅的普遍表达式和过程的运动学出发，给出了 $\pi\pi$ 不变质量谱，角关联谱和不变质量－角关联双变量谱，并进行了分波分析，提出在实验上通过检测对极化求和后的谱函数来确定 S 波跃迁与 D 波跃迁的方法，最后讨论了由于 J/ψ 的反冲所引起的 D 波跃迁，发现 D 波源于衰变振幅中的$\dfrac{(P_1\cdot P')(P_2\cdot P')}{m^2_{\psi'}}$和 J/ψ 的反冲.

作者感谢马建平、张新民、王剑雄和朱界杰的有益讨论.

参考文献(References)

1 Particle Data Group. Eur. Phys. J., 1998, **C3**: 594

2 BES Colla. Phys. Rev., 1998, **D**: 092006;

3 Goldberg H. Phys. Rev. Lett., 1975, **35**: 605; Gottfrid. K. Phys. Rev. Lett., 1978, **40**: 538; Peskin M. Nucl. Phys. 1979, **B56**: 365; Bhanot G, Peskin M. Nucl. Phys., 1979, **B156**: 391

4 Brown L S, Cahn R N. Phys. Rev. Lett., 1975, **35**: 1

5 YAN T M. Phys. Rev., 1980, **D22**: 1652

6 KUANG Y P, YAN T M. Phys. Rev., 1981, **D24**: 2874

7 Voloshin M B. Nucl. Phys., 1979, **B154**: 365; Shifman M A. Vsp. Fiz. Nauk., 1989, **157**: 561; Shifman M A. Phys. Rep., 1991, **22**: 341

8 Voloshin M B, Zakharov V. Phys. Rev. Lett., 1980, **45**: 688;

9 Novikov V A, Shifman M A. Z. Phys., 1981, **C8**: 43

10 Mannel T, Urech R. Z. Phys., 1997, **C73**: 541

11 YAN M L, WEI Y, ZHUANG T L. Eur. Phys. J., 1999, **C7**: 61

12 CHEN J W, Savage M J. Phys. Rev., 1998, **D57**: 2837

Partial Wave Analysis of the Decay $\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$ *

ZHUANG TingLiang[1]　GUO ZiJin[2]　WEI Yi[1]　LI Jin[2]　YAN MuLin[1]

1 (*Center for Nonlinear Science, University of Science and Technology of China, Hefei* 230029, *China*)

2 (*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039, *China*)

Abstract In this paper, a model-independant amplitude for the decay process of $\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$ is constructed from a few basic rules: Lorentz invariance, PCAC (Partial Conservation of Axial Current) and QCD low energy theorem. Based on this amplitude, a new and complete partial wave analysis to this process is carried out. Formulae of angular correlation distribution, invarant mass spectrum and two dimension (joint angular correlation and invarant mass) distribution are given. It is pointed out that there exist D - wave in the $\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$ process and part of the D - wave is caused by recoil of J/ψ.

Key words $\psi' \to J/\psi\pi^+\pi^-$, decay amplitude, partial wave analysis

Received 1 April 1999, Revised 11 June 1999

* Supported by National Natural Science Foundation of China (19290400) and The Chinese Academy of Sciences (LWTZ - 1298)