第 25 卷 第 10 期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol.25, No.10
2001 年 10 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 2001

# 用改进的格点哈密顿量计算 2+1 维 QCD $0^{++}$ 胶球质量*

江俊勤[1)]
(广东教育学院物理系 广州 510303)
(中国高等科学技术中心 北京 100080)
李洁明
(中山大学物理系 广州 510275)

**摘要** 用改进的格点哈密顿量和截断本征方程法计算 2+1 维 QCD $0^{++}$ 胶球质量,结果显示较好的标度行为.

**关键词** 格点 QCD 改进哈密顿量 胶球质量

## 1 引言

QCD 理论预言,两个或多个胶子可以组成束缚态——胶球. 胶球的确认不仅是对 QCD 理论的直接验证,同时,由于胶球是参与强相互作用的全新类型的强子,对它的性质的研究将有助于理解强相互作用的本质,20 多年来,它一直是理论和实验研究的主要课题. 实验寻找胶球,首先需要理论提供可靠的信息,目前格点 QCD 是最有效的方法. 哈密顿量形式的格点 QCD 的优点在于既能计算胶球的质量谱又能计算胶球的波函数,而胶球波函数包含着更加丰富的物理信息.

在原始的 Kogut-Susskind 哈密顿量中,只含最小的 Wilson 圈 $\sum_p \mathrm{Tr}(U_p + U_p^+)$,因而它与连续理论哈密顿量之间存在着较大的有限格距误差,这影响了计算结果的可靠性. 为了减小有限格距误差,人们[1] 在 Kogut-Susskind 哈密顿量中加入了长方形 Wilson 圈 $\sum_{x,i<j} R_{ij} = \frac{1}{2}\left(\boxed{\phantom{xxxx}} + \text{h.c.}\right)$,使有限格距误差由原来的 $O(a^2)$ 减小到 $O(a^4)$. 最近,我们用这种改进方案的格点哈密顿量计算了 2+1 维 $SU(2)$ 规范场真空波函数[2]、$0^{++}$ 胶球质量[3] 和 2+1 维 QCD(即 2+1 维 $SU(3)$ 规范场)真空波函数[4],结果都显示了这种改进方案的有效性。本文进一步用这种改进方案计算 2+1 维 QCD $0^{++}$ 胶球质量.

2000-09-13 收稿
* 广东省自然科学基金资助
1) E-mail: jjq203@21cn.com

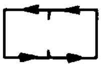
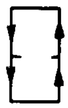
## 2 改进格点哈密顿量和真空波函数

对于格点QCD,改进的Kogut-Susskind哈密顿量可写成[4]

$$H = \frac{5}{6}\frac{g^2}{2a}\sum_{x,i}\left\{E_i^a(x)E_i^a(x) + \frac{2}{5}\mathrm{Tr}[\Lambda^a U_i(x)\Lambda^\rho U_i^+(x)]E_i^a(x)E_i^\rho(x+i)\right\} - \frac{2}{g^2 a}\sum_{x,i<j}\left\{\frac{5}{3}P_{ij} - \frac{1}{12}(R_{ij}+R_{ji})\right\},$$

式中 $E_i^a$ 为规范场色电场强,$a$ 为格距,$g$ 为无量纲的耦合常数,它与不变荷 $e$ 的关系为 $g^2 = e^2 a$. $\Lambda^a$,$\Lambda^\rho$ 为 $SU(3)$ 群的生成元,$U_i(x)$ 为规范群的元素,

$$\sum_{x,i<j}P_{ij} = \frac{1}{2}\sum_p \mathrm{Tr}(U_p + U_p^+) = \frac{1}{2}\Big($$  $$+\,\mathrm{h.c.}\Big),$$

$$\sum_{x,i<j}R_{ij} = \frac{1}{2}\Big($$  $$+\,\mathrm{h.c.}\Big),\qquad \sum_{x,i<j}R_{ji} = \frac{1}{2}\Big($$  $$+\,\mathrm{h.c.}\Big).$$

取真空态为

$$|\Omega\rangle = \exp(R)|0\rangle,$$

式中 $|0\rangle$ 为裸真空,由 $E_i^a(x)|0\rangle = 0$ 确定,$R$ 由Wilson圈组成,可按圈图的阶展开

$$R = R_1 + R_2 + \cdots.$$

将(2)式代入 $H|\Omega\rangle = \epsilon_\Omega|\Omega\rangle$,得 $N$ 阶截断本征方程

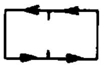
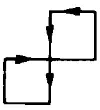
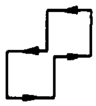
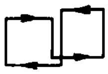
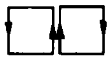
$$[E_i^a(x),[E_i^a(x),\sum_{k=1}^{N}R_k]] + \frac{2}{5}\mathrm{Tr}(\Lambda^a U_i(x)\Lambda^\rho U_i^+(x))[E_i^a(x),[E_i^\rho(x+i),\sum_{k=1}^{N}R_k]] + \sum_{n_1+n_2\le N}\Big\{[E_i^a(x),\sum_{k=1}^{n_1}R_k][E_i^a(x),\sum_{l=1}^{n_2}R_l] + \frac{2}{5}\mathrm{Tr}(\Lambda^a U_i(x)\Lambda^\rho U_i^+(x))[E_i^a(x),\sum_{k=1}^{n_1}R_k][E_i^\rho(x+i),\sum_{l=1}^{n_2}R_l]\Big\} - \frac{2}{9}\beta^2\sum_{x,i<j}\Big\{P_{ij} - \frac{1}{20}(R_{ij}+R_{ji})\Big\} = \frac{6}{5}w_\Omega,$$

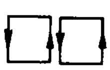
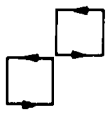
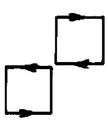
式中 $\beta = 6/g^2$,$w_\Omega$ 为真空能量,定义为 $w_\Omega = \frac{2a}{g^2}\epsilon_\Omega$.

取一阶图为

$$R_1 = \frac{C_1}{2}\sum_p(\mathrm{Tr}U_p + \mathrm{Tr}U_p^+) = \frac{C_1}{2}\Big($$  $$+\,\mathrm{h.c.}\Big). \tag{5a}$$

由 $R_1$ 和(4)式的对易子,可产生二阶Wilson圈

$R_2 = \frac{C_2}{2}$  $+ \frac{C_3}{2}$  $+ \frac{C_4}{2}$  $+ \frac{C_5}{2}$  $+ \frac{C_6}{2}$  $+ \frac{C_7}{2}$  $+$

$\frac{C_8}{2}$  $+ \frac{C_9}{2}$  $+ \frac{C_{10}}{2}$  $+ \frac{C_{11}}{2}$  $+\,\mathrm{h.c.}$

再由 $R_2$ 和(4)式的对易子,可产生三阶 Wilson 圈(84 个)…….

把(5),(3)式代入(4)式,得 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 所满足的非线性方程组,解方程组得 $C_2, \cdots, C_n$ 与 $\beta$ 的关系.

## 3 胶球质量的计算

取 $0^{++}$ 胶球波函数为

$$|\Psi\rangle = (F - \langle F\rangle)|\Omega\rangle,$$

$F$ 与 $R$ 一样由 Wilson 圈组成

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots.$$

将(6)式代入 $H|\Psi\rangle = \varepsilon_\Psi|\Psi\rangle$,得 $N$ 阶截断本征方程

$$\left[E_i^a(x),\left[E_i^a(x),\sum_{k=1}^{N}F_k\right]\right] + \frac{2}{5}\mathrm{Tr}(\Lambda^a U_i(x)\Lambda^b U_i^+(x)\left[E_i^a(x),\left[E_i^b(x+i),\sum_{k=1}^{N}F_k\right]\right] +$$

$$\sum_{n_1+n_2\leqslant N} 2\left[E_i^a(x),\sum_{k=1}^{n_1}R_k\right]\left[E_i^a(x),\sum_{l=1}^{n_2}F_l\right] + \sum_{n_1+n_2\leqslant N}\frac{2}{5}\mathrm{Tr}(\Lambda^a U_i(x)\Lambda^b U_i^+(x))\cdot$$

$$\left\{\left[E_i^a(x),\sum_{k=1}^{n_1}R_k\right]\left[E_i^b(x+i),\sum_{l=1}^{n_2}F_l\right] + \left[E_i^a(x),\sum_{l=1}^{n_2}F_l\right]\left[E_i^b(x+i),\sum_{k=1}^{n_1}R_k\right]\right\} =$$

$$\frac{6}{5}(w_\Psi - w_\Omega)\sum_{l=1}^{N}F_l,$$

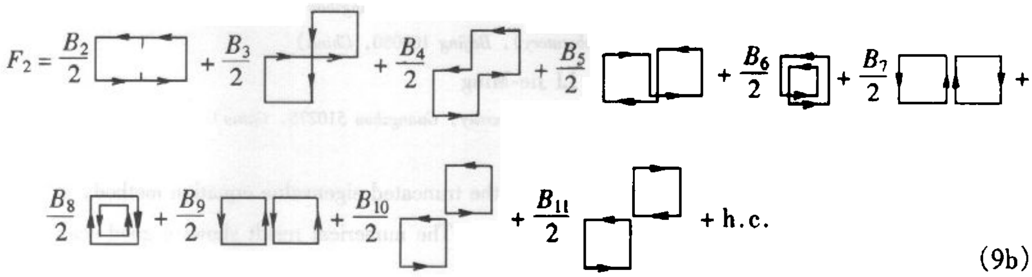
式中 $w_\Psi = \frac{2a}{g^2}\varepsilon_\Psi$. 胶球质量定义为 $\Delta m = \varepsilon_\Psi - \varepsilon_\Omega = \frac{g^2}{2a}(w_\Psi - w_\Omega)$.

取一阶图为

$$F_1 = \frac{B_1}{2}\sum_p(\mathrm{Tr}U_p + \mathrm{Tr}U_p^+) = \frac{B_1}{2}\Big($$

$$+\ \mathrm{h.c.}\Big).$$

由 $F_1$ 和(8)式的对易子,可产生二阶 Wilson 圈




(9b)

再由 $F_2$ 和(8)式的对易子,可产生三阶 Wilson 圈(84 个)…….

把(7),(9)式和 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的值代入(8)式,求得 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 和 $\Delta m$ 所满足的非线性方程组,解方程组求得 $\Delta m$ 与 $\beta$ 的关系.

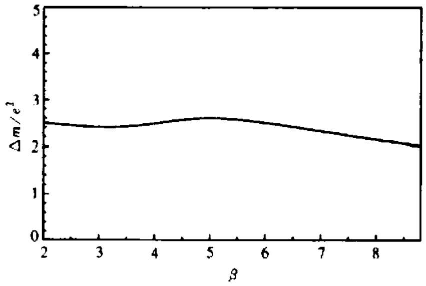



图1　$0^{++}$胶球质量$\Delta m/e^2$与$\beta$的关系

## 4　结果与讨论

2+1维规范理论是超可重整化的,胶球质量$\Delta m$有如下标度行为

$$\Delta m/e^2 \rightarrow \text{const}.$$

取至3阶截断时,求得$0^{++}$胶球质量$\Delta m/e^2$与$\beta$的关系,如图1所示.图中2+1维QCD $0^{++}$胶球质量显示出较好的标度行为,但不如2+1维$SU(2)$规范场$0^{++}$胶球质量的标度行为[3],标度区也还不够宽,这说明对于2+1维QCD $0^{++}$胶球质量,需要计算更高阶Wilson圈.

### 参考文献(References)


1　LUO X Q, GUO S H, Kröger H et al. Phys. Rev., 1999, **D59**:034503

2　JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(10):922 (in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理,2000,**24**(10):922)

3　LI Jie-Ming, JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys.,2000, **24**(12):1094 (in Chinese)
(李洁明,江俊勤. 高能物理与核物理,2000,**24**(12):1094)

4　LI Jie-Ming, JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**(7):617 (in Chinese)
(李洁明,江俊勤. 高能物理与核物理,2001,**25**(7):617)


## Calculation of the $0^{++}$ Glueball Mass for 2+1 Dimensional QCD by Using the Improved Lattice Hamiltonian


JIANG Jun-Qin[1)]

(*Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou* 510303, *China*)

(*CCAST* (*World Laboratory*), *Beijing* 100080, *China*)

LI Jie-Ming

(*Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou* 510275, *China*)



**Abstract**　Using the improved lattice Hamiltonian and the truncated eigenvalue equation method, we compute the $0^{++}$ glueball mass for (2+1)-dimensional QCD. The numerical result shows a good scaling behavior.



**Key words**　lattice QCD, improved Hamiltonian, glueball mass

Received 13 September 2000

* Supported by Guangdong Provincial Natural Science Foundation of China



1) E-mail: jjq203@21cn.com