

# $\psi(2S)$ 扫描实验中衰变宽度误差 与亮度的确定\*

莫晓虎<sup>1)</sup> 朱永生

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

**摘要** 结合  $\psi(2S)$  扫描实验中衰变宽度测量的特点, 介绍了确定积分亮度的叠代方法与确定衰变宽度误差的抽样方法. 这两种方法既简单又精确可靠.

**关键词**  $\psi(2S)$  粒子 衰变宽度 积分亮度 叠代 抽样

## 1 $\psi(2S)$ 扫描分析概况

1999 年 5 月, 利用北京谱仪<sup>[1]</sup> 在  $\psi(2S)$  峰值附近进行的精细扫描, 测量了 24 个能量点处如下 4 个过程的反应截面

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-, e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi. \quad (1)$$

利用测量的  $\psi(2S)$  扫描数据分析出  $\psi(2S)$  衰变宽度和分支比的方法参见文献 [2], [3]. 离线分析的有关数据见表 1. 根据表中数据完成了  $\psi(2S)$  衰变宽度及相应分支比, 即  $\Gamma_e, \Gamma_h, \Gamma_{\pi^+\pi^- J/\psi}, \Gamma_\mu, B_h, B_{\pi^+\pi^- J/\psi}, B_\mu$  等的测量. 下面首先说明拟合所用的  $\chi^2$  方法, 随后介绍参数拟合工作中有特色的两种方法: 积分亮度的确定方法与拟合参数(即  $\psi(2S)$  衰变宽度及其分支比)误差的确定方法.

表 1 离线数据分析初步结果

序号	注入能量		积分亮度*		判选事例数		
	$E_b/\text{GeV}$	$L/\text{nb}^{-1}$	$L_c/\text{nb}^{-1}$	$N_e$	$N_\mu$	$N_{\text{had}}$	$N_{\pi^+\pi^- J/\psi}$
1	1.83500	31.4599	31.60	1753	111	416	5
2	1.83743	30.5890	30.71	1700	94	406	7
3	1.83900	31.0555	31.16	1723	121	430	25
4	1.84050	31.3947	31.47	1739	100	473	0
5	1.84150	31.5190	31.55	1744	64	505	11
6	1.84190	34.6786	34.68	1918	96	623	26
7	1.84248	32.1132	32.03	1775	89	808	59
8	1.84290	31.8562	31.62	1760	90	1599	203

2001-03-29 收稿

\* 国家自然科学基金(19991480), 中国科学院重大项目(KJ95T-03)资助

1) E-mail: moxh@ihep.ac.cn

(续表)

序号	注入能量	积分亮度*		判选事例数			
	$E_b/\text{GeV}$	$L/\text{nb}^{-1}$	$L_c/\text{nb}^{-1}$	$N_e$	$N_\mu$	$N_{\text{had}}$	$N_{\pi^+\pi^-\mu\mu}$
9	1.84310	31.8269	31.45	1758	74	2739	423
10	1.84332	33.5547	32.94	1835	92	4268	630
11	1.84370	31.9199	30.86	1762	112	8304	1454
12	1.84400	33.3780	31.88	1842	158	14903	2469
13	1.84425	31.5038	29.92	1738	166	15357	2624
14	1.84464	30.8823	29.46	1703	244	15947	2786
15	1.84483	31.4691	30.25	1735	205	15271	2459
16	1.84522	31.0649	30.46	1712	183	11917	2067
17	1.84557	32.0206	31.87	1764	192	7189	1189
18	1.84580	31.5383	31.58	1737	137	5051	848
19	1.84612	39.2321	39.45	2160	194	4073	668
20	1.84693	32.4856	32.73	1787	116	1939	264
21	1.84845	36.5446	36.80	2007	97	1406	136
22	1.85043	35.3998	35.64	1940	132	1064	71
23	1.85232	34.8480	35.08	1906	113	914	85
24	1.85488	35.9174	36.16	1959	119	761	28

\* 第一项亮度  $L$  是由公式  $L = N_e/\sigma_e$  计算得来, 其中  $\sigma_e$  是由 Monte Carlo 产生子得到的  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- (|\cos\theta| \leq 0.72)$  的截面(详见正文第 3 节); 第二项亮度  $L_c$  是拟合修正后的亮度

## 2 $\chi^2$ 方法

数据拟合经常用到  $\chi^2$  最小化方法<sup>[4]</sup>. 对于(1)式中 4 个过程的某个能量点而言, 其  $\chi^2$  值定义为

$$\chi^2 = \frac{(\sigma_E - \sigma_T)^2}{(\Delta\sigma_E)^2}$$

式中  $\sigma_E$  与  $\sigma_T$  分别表示实验与理论截面,  $\Delta\sigma_E$  是  $\sigma_E$  的误差. 注意到

$$N_E = L \cdot \sigma_E \text{ 和 } N_T = L \cdot \sigma_T, \quad (3)$$

式中  $N_E$  与  $N_T$  分别是实验测量与理论计算的事例数. 当积分亮度  $L$  与事例数  $N_E$  的测量相互独立时, 依据误差分析理论可知

$$\left(\frac{\Delta\sigma_E}{\sigma_E}\right)^2 = \left(\frac{\Delta N_E}{N_E}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2$$

结合上述诸式有

$$\chi^2 = \frac{(N_E - N_T)^2}{(\Delta N_E)^2 + N_E^2 \cdot \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}$$

其中  $(\Delta N_E)^2$  常分为统计误差和系统误差两项, 即

$$(\Delta N_E)^2 = (\Delta N_E)_{\text{统计}}^2 + (\Delta N_E)_{\text{系统}}^2.$$

第一项

$$(\Delta N_E)_{统计}^2 = N_E (\text{据统计原理}),$$

第二项

$$(\Delta N_E)_{系统}^2 = (N_E \cdot \nu_E)^2,$$

式中  $\nu_E$  为相对系统误差, 于是(5)式成为

$$\chi^2 = \frac{(N_E - N_T)^2}{N_E + N_E^2 \cdot \nu_E^2 + N_E^2 \cdot \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}$$

实际上  $N_T$  来源于理论计算, 隐含了实验感兴趣的待定信息, 明确地表示出来应为

$$N_T = N_T(\xi), \tag{10}$$

其中  $\xi$  是参数矢量, 包含了待定的拟合参数(本实验中为  $\psi(2S)$  衰变宽度  $\Gamma_h, \Gamma_{\pi^+ \pi^- J/\psi}, \Gamma_\mu$  等). 对于多个过程和多个扫描点, 需要将各个  $\chi^2$  值求和. 具体到我们分析的 4 个过程, 除第一个过程用作积分亮度测量外, 其余 3 个过程需要一并拟合,

$$F = \sum_{i=h, \mu, \pi^+ \pi^- J/\psi} \left( \sum_{j=1}^{24} \chi_{ij}^2 \right), \tag{11}$$

通过  $F$  的最小化可以获得待定的拟合参数的最佳估计值.

### 3 亮度的确定

$e^+e^-$  末态主要来自 QED 过程. 此外还存在  $\psi(2S)$  直接衰变到  $e^+e^-$  的过程(分支比不足 1%)<sup>[5]</sup>, 以及两者的干涉效应. 在  $\psi(2S)$  共振能区  $|\cos\theta| \leq 0.72$  的范围内,  $\psi(2S) \rightarrow e^+e^-$  的共振截面约为 QED 截面的 1/20.  $e^+e^-$  末态的 QED 截面在理论上可以进行相当精确的计算. 如果认为判选事例数  $N_c$  完全由 QED 过程产生, 根据(3)式可以计算出离线亮度(表 1 中第三列数字), 即

$$L = \frac{N_c}{\sigma_e(\theta)}, \tag{12}$$

式中  $\sigma_e(\theta)$  指  $|\cos\theta| \leq 0.72$  范围内  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  的截面, 这样得出的亮度值在共振区会有较大的偏差. 我们用拟合叠代的方法加以修正<sup>[6]</sup>. 具体过程为, 首先将  $e^+e^-$  末态事例视为全部由 QED 过程产生, 以 QED 过程的截面计算积分亮度及相应误差, 代入(9)式得出其他过程的  $\chi^2$  值, 然后拟合得到  $\psi(2S)$  衰变总宽度  $\Gamma$ , 以及  $\psi(2S)$  衰变到  $\mu^+ \mu^-$  末态的分支比  $B_\mu$ . 并利用轻子普适性原理, 即  $B_e = B_\mu$ , 计算共振部分、QED 部分与干涉部分的截面, 得到观测截面

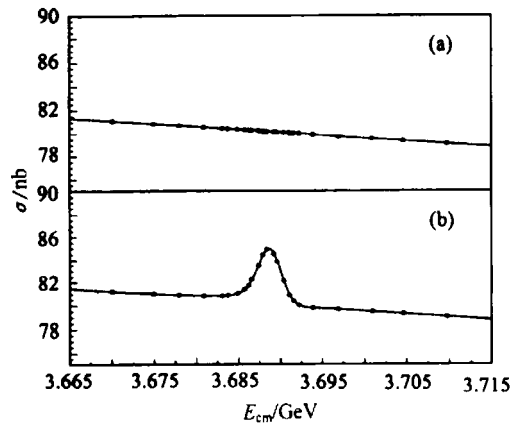


图 1 (a)  $e^+e^-$  末态的 QED 截面;  
(b) 修正后  $e^+e^-$  末态的观测截面

$$\sigma_c^{\text{obs}}(\theta) = \sigma_c^{\text{共轭}}(\theta) + \sigma_c^{\text{QED}}(\theta) + \sigma_c^{\text{干涉}}(\theta), \quad (13)$$

式中  $\sigma_c^*(\theta) = \bar{\sigma}_c^*(\theta) \cdot A_c^*(\theta)$  ( $\kappa = \text{共振、QED、干涉}$ ),  $\bar{\sigma}_c^*(\theta)$  是理论截面,  $A_c^*(\theta)$  是相应的实验接收度. 然后利用计算得到的观测截面  $\sigma_c^{\text{obs}}(\theta)$  再次计算每个点的积分亮度, 即

$$L = \frac{N_c}{\sigma_c^{\text{obs}}(\theta)}. \quad (14)$$

重新拟合, 得到新的  $\Gamma_i$  与  $B_\mu$ . 这便完成了第一次叠代. 以此类推, 叠代过程反复进行, 直到每个能量点的积分亮度值在相继两次叠代中收敛为止. 图 1(a) 为理论计算的 QED 截面; (b) 为经过叠代修正后的观测截面. 修正后的积分亮度值列在表 1 的第四列中, 在共振区积分亮度值修正的效果明显.

#### 4 $\psi(2S)$ 衰变宽度和分支比的误差确定

在实验观测截面的确定过程中, 系统误差的来源主要有两个方面, 一是事例判选误差, 二是事例接收度(或探测效率)的误差. 前者可以在合理的范围内变动事例判选条件, 由变动前后实验观测截面的差别求出; 后者可以调节反应过程的蒙特卡罗事例产生子的参数, 或者利用同一模型的事例产生子, 通过调节参数前后求得的探测效率的差别, 或者利用不同模型的事例产生子求得的探测效率的差别求出. 4 种过程的误差研究初步结果参见表 2. 表中所列各数是均值, 实际各能量点的测量数据误差围绕均值有相当大的起伏. 各能量点的数据误差和拟合参数  $\psi(2S)$  衰变宽度和分支比的误差之间的关系异常复杂. 事实上式(2)中的理论截面  $\sigma_T$  是行为十分奇特的积分, 因此  $\chi^2$  是待拟合参数的高度非线性函数, 同时待拟合的参数的个数又很多. 在这种情况下, 我们利用 MINUIT 程序包<sup>[4]</sup>拟合得出的参数误差仅当  $\chi^2$  是待拟合参数的线性函数或近似于线性函数时才是准确可靠的. 同时所测量的 24 个能量点的能量值实际上应有误差 ( $\Delta E_{c.m.} = 0.10 \text{ MeV}$ )<sup>[3]</sup>, 这一误差对拟合参数误差的影响在利用(9)式的  $\chi^2$  进行求极小的拟合过程中很难估计进去. 为此我们采用了抽样方法确定拟合参数的误差. 这种方法本质上是一种实验方法. 具体地说, 将每一能量值看作是均值为观测值 ( $E_{c.m.} = 2E_i$ ), 标准偏差为  $\Delta E_{c.m.} = 0.10 \text{ MeV}$  的高斯随机变量, 对它进行高斯随机抽样. 同时将每一过程每个能量点的事例数  $n_E$  看作作为一个随机变量, 除  $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$  过程中第 4 个能量点事例数为 0 不参与拟合, 第 1, 2, 3, 5 个能量点的事例数较少需要按泊松分布抽样外, 其余的观测事例数相当的多(见表 1), 可以合理地认为它们服从高斯分布, 因此按照高斯分布  $G(N, \delta)$  进行抽样, 其中  $N$  是观测事例数的中心值,  $\delta$  是相应的系统误差. 此时(5)式变为

$$\chi_G^2 = \frac{(n_E - N_T)^2}{n_E + n_E^2 \cdot \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}, \quad (15)$$

其中

$$n_E = N_E \cdot (1 + \nu_E \cdot \zeta_N), \quad (16)$$

式中  $\zeta_N$  是根据标准正态分布产生的随机数,  $\nu_E = \sqrt{\nu_{\text{exp.}}^2 + \nu_{\text{m.c.}}^2}$  是相对系统误差. 一次抽

样得到拟合参数的一组拟合值,大量的抽样得到多组拟合值. 图 2 给出各拟合参数的抽样值与拟合中心值之差的分布. 由图可见,这些分布非常接近高斯分布,因此我们对于每个参数的多次拟合值按照高斯分布拟合,便可得到该参数的误差,相关的初步结果参看表 2.

表 2 系统误差分析及拟合的初步结果

末态	$e^+e^-$	$\mu^+\mu^-$	$\pi^+\pi^-J/\psi$	hadrons
事例判选误差 $\nu_{\text{exp}}$	0.02240	0.05025	0.03397	0.06478/0.02213†
探测效率误差 $\nu_{\text{m.c.}}$	0.00887	0.00635	0.00583	0.02137/0.02002†
$\Delta\Gamma_i/\text{keV}$	*	0.14	7.00	22.1
$\Delta B_i(\%)$	*	0.07	0.72	0.13

注: \* 拟合中假设  $\Gamma_c = \Gamma_\mu$  及  $B_c = B_\mu$ ; † 强子末态连续区与共振区事例数相差悬殊,故分别求出连续区/共振区的相应误差.

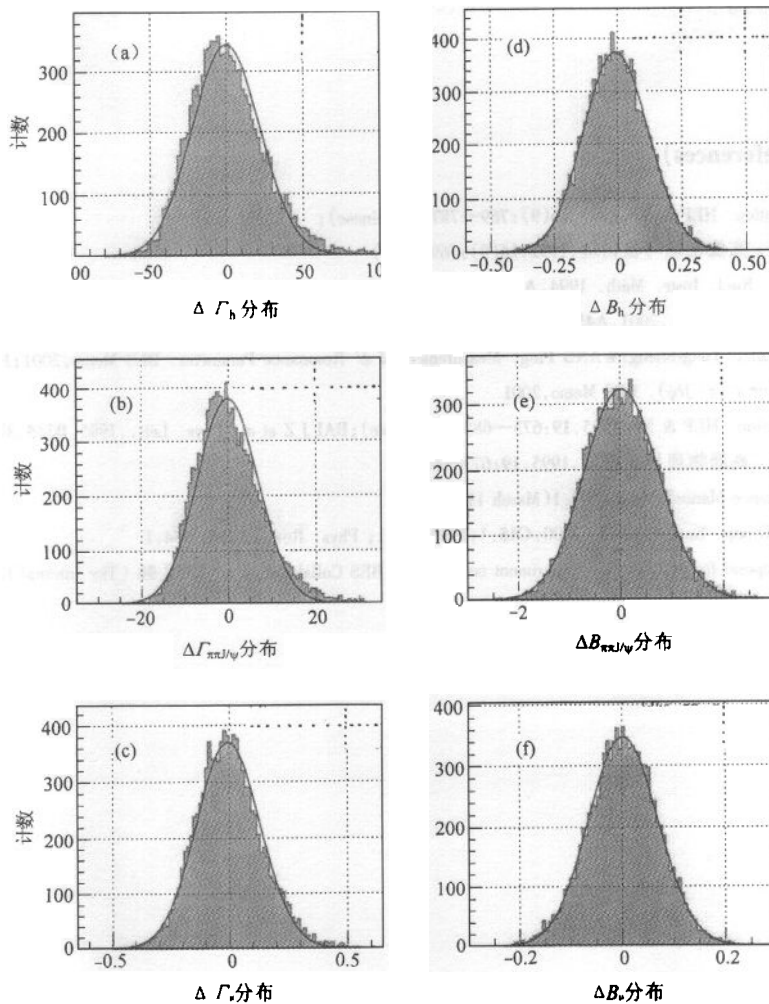


图 2 抽样值的分布及拟合

图中  $\Delta X = X_{\text{抽样值}} - X_{\text{拟合中心值}}$

## 5 结论

确定亮度的叠代方法与确定待拟合参数误差的抽样方法是结合  $\psi(2S)$  扫描实验的具体特点采用的既实用又合理, 既简单又精确可靠的方法.

在拟合过程中我们要求相继两次叠代亮度值的差别小于 1%. 精细调节拟合初始化参数, 可以将亮度值的差别缩小到 0.1%. 进一步调节还能再提高精度. 可见叠代方法确定亮度的误差完全能够满足实验需要.

对于确定待拟合参数误差的抽样方法来说, 只要抽样次数足够多, 对于抽样值的拟合带来的误差将足够小. 我们作一万次抽样, 拟合参数误差本身的误差已经小于 1%.

作者感谢美国 Hawaii 大学的 F. A. Harris 教授在有关  $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$  末态研究方面给予的大力帮助.

## 参考文献 (References)

- 1 BES Collaboration. HEP & NP, 1992, 16(9): 769—787 (in Chinese);  
(BES 合作组. 高能物理与核物理, 1992, 16(9): 769—787)  
BAI J Z et al. Nucl. Instr. Meth. 1994, A344: 319—334; GUO Y N. Nucl. Instr. Meth., 1996, A379: 349—353; BAI J Z et al. Nucl. Instr. Meth., 2001, A458: 627—637
- 2 MO Xiao-Hu, ZHU Yong-Sheng, WANG Ping. Measurement of  $\psi'$  Resonance Parameter. BES Memo, 2001; Harris F A, MO X H.  $B(\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi)$ . BES Memo, 2001
- 3 BES Collaboration. HEP & NP, 1995, 19: 673—685 (in Chinese); BAI J Z et al. Phys. Lett., 1995, B355: 374—380.  
(BES 合作组. 高能物理与核物理, 1995, 19: 673—685)
- 4 MINUIT Reference Manual, Version 94.1 (March 1994)
- 5 Particle Data Group. Eur. Phys. J. 2000, C15: 1; 1998, C1: 1; Phys. Rev., 1996, D54: 1
- 6 ZHU Y S. Proposal for  $\psi(2S)$  Scan Experiment on BES. In: BES Collaboration ed. BES 98 (The Internal Collected Works), 1998: 303—308

## Determination of Decay Width Error and Luminosity in $\psi(2S)$ Scan\*

MO Xiao-Hu<sup>1)</sup> ZHU Yong-Sheng

(*Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China*)

**Abstract** The observed cross sections of processes  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ ,  $\pi^+\pi^- J/\psi$  and hadrons at 24 energy points in the vicinity of  $\psi(2S)$  resonance have been measured by BES(Beijing Spectrometer). The resonance cross sections for above four final states take the Breit-Wigner forms. By combining the cross sections of resonance part, continuum(QED or QCD) part and their interferences together with radiative corrections, and then convoluted with the energy spread of BEPC(Beijing Electron and Positron Collider), the  $\chi^2$  fit of these 4 observed cross sections with the assumption of  $e$ - $\mu$ - $\tau$  universality gives the decay widths and branching ratios of  $\psi(2S)$ :  $\Gamma_t$ ,  $\Gamma_\mu$ ,  $\Gamma_h$ ,  $\Gamma_{\pi^+\pi^- J/\psi}$ ,  $B_\mu$ ,  $B_h$ ,  $B_{\pi^+\pi^- J/\psi}$ . This article mainly describes the methods for calculating the integrated luminosity and for determining the fitting errors of  $\psi(2S)$  decay widths and branching ratios in this scan experiment. The integrated luminosity for each energy point is calculated by using the data of  $e^+e^-$  final state and the iteration method with assumption of lepton universality, that is  $B_\tau = B_\mu$ . The errors of decay widths and branching ratios are determined by Monte Carlo sampling method.

**Key words**  $\psi(2S)$  particle, decay width, integrated luminosity, iteration, sampling

Received 29 March 2001

\* Supported by National Natural Science Foundation of China(19991480) and The Chinese Academy of Sciences Foundation (KJ95T-03)

1) E-mail: moxh@ihep.ac.cn