第25卷第7期　　高能物理与核物理　　Vol.25, No.7
2001年7月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　July, 2001

椭圆量子群极小表示的系数代数

石康杰　范桁　岳瑞宏[1)]　赵少游　侯伯宇
(西北大学现代物理研究所　西安　710069)

摘要　给出了对应于 $A_{n-1}^{(1)}$ 面模型的玻尔兹曼权的 L 矩阵及 Felder A_n 系列椭圆量子群的极小表示(所有矩阵元均为 c 数)的系数代数. 这个代数满足杨-Baxter 方程. 同时,对此代数还给出了一组 PBW 基.

关键词　椭圆量子群　极小表示　代数　PBW 基

1　引言

近来,Ruisenaar-Schenaider(RS)和 Calogero-Moser(CM)等模型的多体长程可积动力学体系引起了人们的极大兴趣[1—3]. 它们与凝聚态物理中的量子 Hall 效应以及场论中的 Seiberg-Witten(SW)理论有着内在的联系,特别是 SW 理论中的谱曲线满足的方程,也就是上述可积模型中 Lax 矩阵的修正了的本征值方程[4,5]. 而这些 Lax 矩阵就是与各种 Lie 群的面模型(Interaction-Round-a-Face(IRF)模型)[6—8]和动力学的杨-Baxter 关系(Gervais-Neveu-Felder(GNF)方程)[9,10]相关的 L 矩阵的经典极限. 所有这些 L 矩阵均对应于由 Felder 和 Varchenko 提出的椭圆量子群的表示[10]. 所以,研究 L 矩阵的一般解是非常有意义的.

在最近的研究中,我们发现对于 A_{n-1} 群,满足动力学杨-Baxter 方程(DYBE)的极小 L 矩阵(所有矩阵元均为 c-数)的解只有 5 种形式(即,A(1),A(2),A(3),A(4)和 B). 在这 5 种形式中,A(1)—A(4)形式的系数形成一种平庸代数,它们可以非常容易地由因式化的 L 矩阵确定出来,所以本文在此不对其做更多的讨论. 而 B 形式的系数由一组二次关系确定,发现这一组二次关系满足辫子群关系,即,杨-Baxter 关系.

2　最小 L 矩阵的解的各种形式

众所周知,$A_{n-1}^{(1)}$ IRF 模型 R 矩阵(玻尔兹曼权)可以表示为[6—8]:

2000-06-12 收稿

1) E-mail: yue@phy.nwu.edu.cn

$$R(a\mid z)_{ii}^{ii}=\frac{\sigma(z+w)}{\sigma(w)},\qquad R(a\mid z)_{ij}^{ij}=\frac{\sigma(z)\sigma(w\bar{a}_{ij}-w)}{\sigma(w)\sigma(w\bar{a}_{ij})}\quad i\neq j,$$
$$R(a\mid z)_{ij}^{ji}=\frac{\sigma(z+w\bar{a}_{ij})}{\sigma(w\bar{a}_{ij})}\quad i\neq j,\quad R(a\mid z)_{i'j'}^{ij}=0\quad \text{其它情形,} \tag{1}$$

其中,$a\equiv(m_0,m_1,\cdots,m_{n-1}$是一个 n 维矢量,$\bar{a}_{ij}=\bar{a}_i-\bar{a}_j$,$\bar{a}_i=m_i-\frac{1}{n}\sum_l m_l+w_i$,$m_i(i=0,1,\cdots,n-1)$为描写该模型的一些整数,它们形成一个 n 维格点空间,$\{w,w_i\}$是作为该模型的参量的一组复数(c－数),$\sigma(z)\equiv\theta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}(z,\tau)$,并且

$$\theta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z,\tau)\equiv\sum_{m\in Z}e^{i\pi(m+a)^2\tau+2i\pi(m+a)(z+b)}$$

定义 $\hat{j}=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$为第 j 分量为 1 的 n 维矢量.

考虑一个元素为线性算子的矩阵,记其为 $L\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}z\Big)_i^j$ 用图 1,2 来分别定义 R 矩阵和 L 矩阵如下:

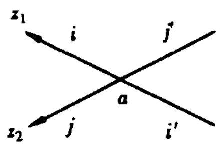

图 1　R 矩阵元$R(a\mid z_1-z_2)_{ij}^{i'j'}$

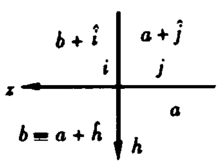

图 2　L 矩阵元$L(a,h\mid z)_i^j\equiv L\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}z\Big)_i^j$

我们知道,在 IRF 模型中,动力学的杨－Baxter 关系(DYBR)起着至关重要的作用. 只有当图 2 所定义的 L 矩阵满足 DYBR,我们所定义的 L 矩阵才有意义. 动力学的杨－Baxter 关系可以写成:

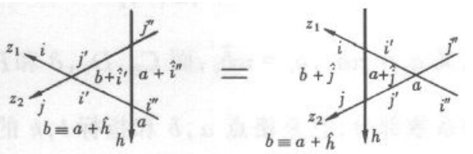

图 3　动力学的杨－Baxter 关系

$$R(b\mid z_1-z_2)_{ij}^{i'j'}L\left(\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\middle|z_1\right)_{i'}^{i''}L\left(\begin{matrix}a+\hat{i}''\\ b+\hat{i}'\end{matrix}\middle|z_2\right)_{j'}^{j''}=L\left(\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\middle|z_2\right)_{j}^{j'}L\left(\begin{matrix}a+\hat{j}'\\ b+\hat{j}\end{matrix}\middle|z_1\right)_{i}^{i'}R(a\mid z_1-z_2)_{i'j'}^{i''j''},$$

其中重复指标表示求和.

在这里 L 矩阵的矩阵元是算子,公式(2)是算子的结合代数. 本文只考虑里 L 矩阵的最小情形,也就是最简单情形,即所有矩阵元均为复数. 在前面的研究中,我们已经研究了这种情形的 L 矩阵的一般形式,即 $L\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}z\Big)_i^j$ 作为变量(a,b,z,i,j)的所有可能的形式(另文中推导). 这里,只给出最终结果.

对于 $a\equiv(m_0,m_1,\cdots,m_{n-1})$,定义 $m\equiv\sum_{i=0}^{n-1}m_i$,可以得 $L\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\middle|z\right)_k^l$ 的形式如下:

(1) A(1):

$$L\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\middle|z\right)_k^l=\sigma\left(z+C_0+mw\left(1-\frac{1}{n}\right)-a_l\right)\sigma\left(z+D_0-mw\left(1-\frac{1}{n}\right)+b_k\right)\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)_k^l F_0(z); \quad (3)$$

(2) A(2):

$$L\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\middle|z\right)_k^l=\sigma\left(z+C_0+mw\left(1-\frac{1}{n}\right)-a_l\right)\cdot \prod_{j(\neq k)}\sigma\left(z+D_0-m\frac{w}{n}-b_j\right)\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)_k^l F_0(z); \quad (4)$$

(3) A(3):

$$L\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\middle|z\right)_k^l=\prod_{j(\neq l)}\sigma\left(z+C_0+m\frac{w}{n}+a_j\right)\cdot \prod_{j(\neq k)}\sigma\left(z+D_0-m\frac{w}{n}-b_j\right)\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)_k^l F_0(z); \quad (5)$$

(4) A(4):

$$L\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\middle|z\right)_k^l=\prod_{j(\neq l)}\sigma\left(z+C_0+m\frac{w}{n}+a_j\right)\cdot \sigma\left(z+D_0-mw\left(1-\frac{1}{n}\right)+b_k\right)\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)_k^l F_0(z); \quad (6)$$

(5) B:

$$L\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\middle|z\right)_k^l=\sigma(z+\delta+b_k-a_l)\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)_k^l F_0(z), \quad (7)$$

定义 $a_i=w\bar{a}_i$,$b_i=w\bar{b}_i$,而 C_0,D_0,δ 和 $F_0(z)$ 在整个格点空间中不变. $\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)_k^l$ 是与 z 无关的系数部分,它是格点 a,b 和指标 l,k 的函数.

分别将公式(3)—(7)代入动力学杨-Baxter关系即公式(2)中,可得到系数的关系.首先对A(1)—A(4),其关系式是相同的.对A型

$$Y_{ii}^{i'j'}-Y_{ii}^{j'i'}=0 \qquad i'\neq j', \quad (8)$$

$$Y_{ij}^{i'i'}-Y_{ji}^{i'i'}=0 \qquad i\neq j, \quad (9)$$

$$Y_{ji}^{i'j'}=Y_{ji}^{j'i'}=Y_{ij}^{i'j'} \qquad i\neq j, i'\neq j' \quad (10)$$

对B型有:

$$Y_{ii}^{i'j'}-Y_{ii}^{j'i'}=0 \qquad i'\neq j', \quad (11)$$

$$Y_{ij}^{i'i'}-Y_{ji}^{i'i'}=0 \qquad i\neq j, \quad (12)$$

$$\sigma(w)\sigma(a_{i'j'}+b_{ij})Y_{ji}^{i'j'}+\sigma(a_{i'j'})\sigma(b_{ij}-w)Y_{ij}^{i'j'}$$
$$\sigma(a_{i'j'}+w)\sigma(b_{ij})Y_{ji}^{j'i'}=0 \qquad i\neq i', j\neq j'. \quad (13)$$

在上面这些式子中,用以下定义式:

$$Y_{ij}^{i'j'} \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_i^{i'} \begin{bmatrix} a+\hat{i}' \\ b+\hat{i} \end{bmatrix}_j^{j'} \tag{14}$$

而

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_i^{i'} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_i^{i'} \times \prod_{l(\neq i')} \sigma(a_l - a_{i'}).$$

A 型系数很容易确定. 假定在格点(a,b)上,任意找一个函数 $G(a,b)$,然后用 $G(a+\hat{i}',b+\hat{i}) = G(a,b)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_i^{i'}$,来构造其它格点的函数. 而根据公式(8)—(10),很容易证明对于不同的路径,得到的 $G(a+\hat{i}'+\hat{j}',b+\hat{i}+\hat{j})$是相同的,因此$(a,b)\to(a+\hat{i}'+\hat{j}',b+\hat{i}+\hat{j})$的路径是可积的. 这就说明总存在函数 $G(a,b)$,它定义在全格点上,使

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_i^{i'} = G(a+\hat{i}',b+\hat{i})/G(a,b). \tag{15}$$

这样,A 型系数就可以完全确定了 进而形式 A 也就可以完全确定了

3 B 形式的系数代数

在本节中,将给出 B 形式系数代数的 Poincare-Birkhoff-Witt(PBW)基,其结果将在定理中给出.

公式(11)—(13)可以看成是定义在格点 $\left(a = \sum_{j=1}^{n-1} m_j^a \hat{j}, b = +\sum_{i=0}^{n-1} m_i^b \hat{i}\right)$ 的算子满足的代数关系. 首先,定义一个新算子

$$A_i^{i'} \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_i^{i'} \Gamma_i^{i'} \tag{16}$$

其中

$$\Gamma_i^{i'} f(a,b) = f(a+\hat{i}',b+\hat{i})\Gamma_i^{i'}, \tag{17}$$

即,a,b 的函数与$\Gamma_i^{i'}$ 不对易. 利用此定义式,可以得到下面的算子交换关系

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) \quad A_i^{i'}A_i^{j'} = A_i^{j'}A_i^{i'} \quad i' \neq j', \\
&(\mathrm{b}) \quad \sigma(b_{ij})\sigma(a_{i'j'}+w)A_j^{j'}A_i^{i'} = \\
&\qquad \sigma(a_{i'j'})\sigma(b_{ij}-w)A_i^{i'}A_j^{j'} + \sigma(w)\sigma(a_{i'j'}+b_{ij})A_j^{i'}A_i^{j'} \quad i \neq i', j \neq j', \\
&(\mathrm{c}) \quad A_i^{i'}A_j^{i'} = A_j^{i'}A_i^{i'} \quad i \neq j.
\end{aligned} \tag{18}$$

这些关系正是 Felder 和 Varchenko 椭圆量子群在特殊条件下的等价关系. 值得注意的是(b)前面的系数不与 A_i^j 交换. 这些式子与谱参数 z 无关. 这一点也与 DYBR(公式(2))不同. 这种情况类似于 Sklyanin 代数[11—15]与 Belavin 模型[16—18]的关系.

利用公式(18)的(a)和(b),可以将一个算子 $A_i^{j'}A_j^{i'}$ 的上指标交换,使之变成 $A_i^{i'}A_j^{j'}$ 和 $A_j^{i'}A_i^{j'}$ 的线性组合. 同理,可将三算子的乘积 $A_i^{i'}A_j^{j'}A_k^{k'}$ 变成$\Sigma A^{k'} A^{j'} A^{i'}$ 的线性组合. 我们

有下述命题.

命题1:按照规则(a)和(b)(以下简为(ab)),如果3个算子的乘积 $A_i^{i'}A_j^{j'}A_k^{k'}$ 按下面的两条不同的路径变换成 $A_{\cdot}^{k'}A_{\cdot}^{j'}A_{\cdot}^{i'}$ 的线性组合,则其结果是相同的. 这两条路径如下:

$$(A)\qquad i'j'k' \longrightarrow i'k'j' \longrightarrow k'i'j' \longrightarrow k'j'i',$$

$$(B)\qquad i'j'k' \longrightarrow j'i'k' \longrightarrow j'k'i' \longrightarrow k'j'i'.$$

在这些变换中,我们认为对上指标相同的相邻算子的(ab)变换结果是不改变它们的下指标,即,$A_i^{i'}A_j^{i'} \to A_i^{i'}A_j^{i'}$. 而且在这些变换中,乘法的结合律和分配律是满足的.

命题2:根据规则(c),两个算子积 $A_i^{i'}A_j^{j'}A_k^{j'}$ 和 $A_i^{i'}A_k^{j'}A_j^{j'}$ 通过(ab)变换为了 $\sum A_{\cdot}^{j'}A_{\cdot}^{j'}A_{\cdot}^{i'}$ 和 $\sum A_{\times}^{j'}A_{\times}^{j'}A_{\times}^{i'}$ 后,它们是相同的.

上述结果同样适用于是 $A_i^{i'}A_j^{i'}A_k^{j'}$ 和 $A_j^{i'}A_i^{i'}A_k^{j'}$ 的变换展开式.

在以上的讨论中,把所有 a 和 b 的函数都通过规则(c)移到 $A_{\cdot}^{k'}A_{\cdot}^{j'}A_{\cdot}^{i'}$. 的左边. 命题的证明是直接的烦琐计算. 计算中的基本数学公式是加法公式

$$\sigma(u+x)\sigma(u-x)\sigma(v+y)\sigma(v-y)-\sigma(u+y)\sigma(u-y)\sigma(v+x)\sigma(v-x)=\sigma(u+v)\sigma(u-v)\sigma(x+y)\sigma(x-y). \tag{19}$$

下面,定义逆序数,正规积,正规序展开.

定义1:逆序数. 对任意给定顺序的两个整数 i', j',若 $i'>j'$,定义其逆序数为1. 若 $i'\leqslant j'$,定义其逆序数为0. 而一个连乘积 $A_{\cdot}^{i'}.A_{\cdot}^{j'}.A_{\cdot}^{k'}.\cdots$ 的逆序数为所有上指标对的逆序数之和.

定义2:正规积. (ab)正规积就是一个串(算子连乘积),从左向右看,其上指标按从小到大排列. 这时其下指标排列是任意的. (abc)正规积就是上指标按从小到大排列而且对上指标相同的乘积段,其下指标也按从小到大排列的一个串.

定义3:正规序展开. (ab)正规序展开就是将一个串利用规则(ab)把它的上指标(从左向右看)由小到大排列,(其中假定乘法满足结合律和分配律,)展开为许多(ab)正规积的线性组合. (abc)正规序展开就是在进行(ab)线正规序展开之后,再将展开式中各项对相同上指标的乘积段把下指标按规则(c)从小到大排列.

由以上定义可以很容易看出(ab)正规序展开相同就意味着(abc)正规序展开相同.

例:$A_2^1A_1^1A_1^2A_3^2A_5^3A_1^4A_3^5A_1^5$ 是(ab)正规积而不是(abc)正规积. 如按规则(c)将其变成(abc)正规积就是 $A_1^1A_2^1A_1^2A_3^2A_5^3A_1^4A_1^5A_3^5$.

我们可以证明一条定理.

定理:一个算子 $A_i^{i'}$ 的多项式(系数是 $\{a,b\}$ 的函数)经由(a,b,c)3式的规则进行变换,都不会改变这个多项式按(abc)正规积的展开. 因而(abc)正规积是由(18)式决定的代数的一组PBW基.

值得注意的是任何多项式都可唯一地用(abc)正规序展开,注意其展开系数都是 $\{a,b\}$ 的函数. 因而不与算子 $A_i^{i'}$ 对易.

为了证明这个定理,我们先证下面的引理.

引理1:对于任意算子连乘积,如果按规则(a,b)用交换相邻上指标的方式使逆序数下降,则最后所得的(ab)正规序展开是唯一的.

假定上指标相同的两相邻算子在变换中不改变次序. 同时认为在变换中间的每一步,对线性组合中的各项进行的下一步交换的两个算子的位置都一样.

证明:可以用不同路径来表示这个过程 例如:

(1) $A^4A^4A^5A^2A^2 \equiv (44522) \longrightarrow (44252) \longrightarrow (44225) \longrightarrow (42425) \longrightarrow (42245) \longrightarrow (24245) \longrightarrow (22445)$.

(2) $(44522) \longrightarrow (44252) \longrightarrow (42452) \longrightarrow (24452) \longrightarrow (24425) \longrightarrow (24245) \longrightarrow (22445)$.

总可以找到一系列路径(a1),(a2),…,(am)使(a1) = (1),(am) = (2). 并且相邻的路径只相差 3 个连续步骤,它们用不同方式改变 3 个算子的顺序. 由命题 1,这两条相邻路径的(ab)正规序展开相同. 因而所有路径展开相同.

推论 1:如果在一个乘积串 $CA_i^{i'}A_j^{j'}D$ 中(C,D 都是乘积串),用交换中间相邻而又不相等上指标的两个算子(用规则(b))得到 $CA^{j'}_{\cdot}A^{i'}_{\cdot}D$ 的线性组合,则两者的按引理 1 的方式进行的(ab)正规序展开结果相同.

证明:若 $i'>j'$,则可将这个交换过程作为(ab)正规序展开的第一步即可证明. 若 $i'<j'$,则可做 $\Sigma CA^{j'}_{\cdot}A^{i'}_{\cdot}D$ 的(ab)正规序展开,将其第一步定为 $A^{j'}_{\cdot}A^{i'}_{\cdot}$ 的交换. 可以从(b)式验证 $i'j' \rightarrow j'i' \rightarrow i'j'$ 是恒等变换. 所以根据分配律可知 $\Sigma CA^{j'}_{\cdot}A^{i'}_{\cdot}D$ 的(ab)正规序展开和 $\Sigma CA_i^{i'}A_j^{j'}D$ 的(ab)正规序展开相等.

推论 2:利用规则(a)(b),如果算子 C 变成另一个算子 D,即 $C \xrightarrow{(ab)} D$,则这两个算子按引理 1 的方式进行的(ab)正规序展开结果相同

证明:因为变换的每一步都不改变展开结果.

这样,(18)式中的(a)(b)与(ab)正规序展开和(abc)正规序展开相洽.

注意,由于(ab)正规序展开相同意味着(abc)正规序展开相同,所以,以上两个推论的结果也同样适用于(abc)正规序展开.

引理 2:串 $CA_j^{i'}A_k^{i'}D$ 和 $CA_k^{i'}A_j^{i'}D$ 的(abc)正规序展开相同.

证明:用数学归纳法,对于算子个数确定的串证明下述命题.

命题(ⅰ). 当逆序数为 0 时,引理成立.

命题(ⅱ). 如果此引理在逆序数小于 m 时成立,则当逆序数等于 m 也成立.

第一个命题的证明是明显的. 因为在这种情形下,$CA_j^{i'}A_k^{i'}D$ 和 $CA_k^{i'}A_j^{i'}D$ 都是(ab)正规积,要作(abc)正规化,只需再按规则(c)将相同上指标的乘积段的下指标从小到大排列即可. 由于 C 和 D 两串的以 i' 为上指标的下指标集合是固定的,中间一段 $A_j^{i'}A_k^{i'}$ 和 $CA_k^{i'}A_j^{i'}$ 的下指标集合都是 j 和 k,所以总的以 i' 为上指标的算子的下指标集合两者是一样的. 故(abc)正规积是相同的.

对第二个命题,有下面的结果.

(α) 如果在 C 或(和)D 中,还可调整上指标$\{i'\}$使逆序数降低,如 $D \xrightarrow{(ab)} D'$,则得到的 $CA_j^{i'}A_k^{i'}D'$ 和 $CA_k^{i'}A_j^{i'}D'$ 按引理 2 的推论,这两者与变换前的(ab)正规序展开相同,然而由于这两者的逆序数已降低了,一定小于 m,因而按命题(ⅱ)的前提,它们的(abc)正规

序展开相同，所以 $CA_j^{i'}A_k^{i'}D$ 和 $CA_k^{i'}A_j^{i'}D$ 的正规序展开相同.

(β) 如果 C 和 D 都已经是正规化的，但整个串的逆序数还可以降低，在这种情形下，令 $C = C_1 A_{i_c}^{i'_c}$，$D = A_{i_d}^{i'_d} D_1$. 则一定有 $i'_c > i'$ 或 $i' > i'_d$. 设 $i'_c > i'$，两串分别就是 $T_1 = C_1 A_{i_c}^{i'_c} A_j^{i'} A_k^{i'} D$ 和 $T_2 = C_1 A_{i_c}^{i'_c} A_k^{i'} A_j^{i'} D$，我们可以用规则(ab)，把它们改为 $T_1 \Rightarrow T'_1 = C_1 \Sigma A^{i'}_{\cdot} A^{i'}_{\cdot} A^{i'_c}_{\cdot} D$ 和 $T_2 \Rightarrow T_2^1 = C_1 \Sigma A^{i'}_{\times} A^{i'}_{\times} A^{i'_c}_{\times}$. 其中 $A^{i'}_{\cdot} A^{i'}_{\cdot} A^{i'_c}_{\cdot}$ 和 $A^{i'}_{\times} A^{i'}_{\times} A^{i'_c}_{\times}$ 分别是一些 3 个算子乘积的线性组合. 由命题 2，若考虑规则(c)，这两线性组合是相等的. 另一方面，现在 T'_1 和 T'_2 是一些逆序数小于 m 的具有逆序数 $m-2$ 的串的线性组合，如果在 $A^{i'}_{\cdot} A^{i'}_{\cdot} A^{i'_c}_{\cdot}$ 和 $A^{i'}_{\times} A^{i'}_{\times} A^{i'_c}_{\times}$ 的各项中认为两个 $A^{i'} A^{i'}$ 的下标可以互换，则线性组合 $\Sigma A^{i'}_{\cdot} A^{i'}_{\cdot} A^{i'_c}_{\cdot}$ 和 $\sum A^{i'}_{\times} A^{i'}_{\times} A^{i'_c}_{\times}$ 是相等的. 因此，它们一定可以分别写成 $\sum\limits_j A^{i'}_{\cdot} A^{i'}_{\cdot} A_j^{i'_c}$ 和 $\sum\limits_j A^{i'}_{\times} A^{i'}_{\times} A_j^{i'_c}$，而其中 $\sum A^{i'}_{\cdot} A^{i'}_{\cdot}$ 和 $\sum A^{i'}_{\times} A^{i'}_{\times}$ 的差别最多只是下指标的互换而已. 换句话说，它们可以通过交换下标的方式而由一个变为另一个. 根据命题(ⅱ)的前提，在逆序数为 $m-2$ 时 T'_1 和 T'_2 的(abc)正规序展开相同. 根据作(abc)正规序展开的步骤要求，这也就是 T_1 和 T_2 的(abc)正规序展开.

当 $i' > i'_d$ 时，证明是类似的，因而命题(ⅱ)成立.

最后由数学归纳法，我们得到了引理 2.

由引理 1 的推论 2 及引理 2，我们便可证明本节的定理.

由这个定理得知，任何 $A_i^{i'}$ 组成的系数为 $\{a, b\}$ 的函数多项式，有惟一的(abc)正规序展开，而此展开式在任意的由(18)式进行的变换下不变，所以(abc)正规积是(18)式决定的代数的 PBW 基.

4 小结

本文详细讨论了椭圆量子群极小表示的系数所给出的代数，这种代数关系是 Felder 和 Varchenko 提出的椭圆量子群在特殊条件下的等价关系. 它与谱参数无关，因而也与动力学的杨－Baxter 关系不同. 文中通过对逆序数，正规积，正规序展开的定义证明了该代数存在一组 PBW 基. 深入研究此代数，还将得到其中心元及其它性质，这些将在以后的文章中给出.

参考文献(References)

1 Ruijsenaars S N M. Commun. Math. Phys., 1987, **110**:191

2 Calogero F. Lett. Nuovo Cimento, 1975, **13**:411

3 Moser J. Adv. Math., 1975, **16**:441

4 D'Hoker E, Phong D H. Nucl. Phys., 1988, **B513**:405

5 Gorsky A, Krichever I, Marshakov A et al. Phys. Lett., 1995, **B355**:466

6 Jimbo M, Miwa T, Okado M. Lett. Math. Phys., 1987, **14**:123

7 Jimbo M, Miwa T, Okado M. Commun. Math. Phys., 1988, **116**:507

8 Jimbo M, Miwa T, Okado M. Commun. Math. Phys., 1988, **119**:543—565

9 Gervais J L, Neveu A. Nucl. Phys., 1984, **B238**:125
10 Felder G, Varchenko A. Commun. Math. Phys., 1996, **181**:741
11 Kulish P P, Reshetikhin N Y, Sklyanin E K. Lett. Math. Phys., 1981, **5**:393
12 Sklyanin E K. Funct. Anal. Appl., 1982, **16**:263
13 Cherednik I V. Funct. Anal. Appl., 1985, **19**:77
14 HOU B Y, WEI H. J. Math. Phys., 1989, **30**:2750
15 Quano Y H, Fujii A. Mod. Phys. Lett., 1991, **A6**:3635
16 Belavin A A. Nucl. Phys., 1981, **B180**:189
17 Richey M P, Tracy C A. J Stat. Phys., 1986, **42**:311
18 Tracy C A. Physica, 1985, **D16**:203

Coefficient Algebra of the Minimal Representation of the Elliptic Quantum Group

SHI Kang-Jie　FAN Heng　YUE Rui-Hong[1)]　ZHAO Shao-You　HOU Bo-Yu

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract　The algebra of the coefficients in the minimal representation of the A_{n-1} quantum group, discussed by Felder and Varchenko, is given in this paper. Those coefficients are associated with the Boltzmann weights of $A_{n-1}^{(1)}$ interaction-round-a-face model. We show that the algebra satisfies the Yang-Baxter equation. The PBW base for this algebra is also given.

Key words　elliptic quantum group, minimal representation, algebra, PBW base

Received 12 June 2000

1) E-mail: yue@phy.nwu.edu.cn