第 27 卷 第 1 期
2003 年 1 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.27, No.1
Jan., 2003

$SU(2)$ 规范场分解与 Bose-Einstein 凝聚体中的环流条件*

李希国[1,2] 贾多杰[2,3] 高远[2]

1（兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心 兰州 730000）
2（中国科学院近代物理研究所 兰州 730000）
3（兰州大学理论物理研究所 兰州 730000）

摘要 利用 $SU(2)$ 规范场的单位矢量场分解形式讨论了 Bose-Einstein 凝聚体中的环流条件. 对于二分量 Bose-Einstein 凝聚，内部态的 $SU(2)$ 对称性将导致一个拓扑环流条件，这是一个推广的 Mermin-Ho 关系.

关键词 规范场分解 Bose-Einstein 凝聚 环流条件

1 引言

近来，Faddeev 和 Niemi 在非线性 σ 模型的 Skyrme-Faddeev 理论中发现了三维纽结解[1]，并且给出了一个有意义的猜想[2]，就是在低能极限下，Skyrme-Faddeev 作用量被认为是一个量子色动力学（QCD）的有效作用量. 另一方面，在低能极限下，人们相信 QCD 产生了色禁闭，也许这种情况是通过单极凝聚实现的. 因此，Faddeev-Niemi 猜想与色禁闭、单极凝聚密不可分. 在 Faddeev-Niemi 猜想的讨论中，规范场分解方法扮演了一个重要角色[3]. 上世纪 90 年代初期，在段一士教授的指导下，我们对 $SO(n)$ 群的规范势（自旋联络）进行分解研究，得到了 $SO(n)$ 群和 $SU(2)$ 群规范场的分解形式[4,5]. 使用 $SO(n)$ 群的分解结果讨论了 Gauss-Bonnet-Chern 定理中的 $(n-1)$ Chern 形式和拓扑结构[6]，Yang[7] 利用这些结果给出了 Reissner-Nordstrom 黑洞的熵的内部结构. 近几年来，段一士等人利用规范势分解理论和 ϕ 映射方法研究了旋错、位错、线错[8] 和量子力学中的量子化条件等问题[9]，给出了一些非常有意义的结果. 从这些问题研究中，我们发现规范场分解理论是一个不可取代的方法.

本文的主要目的是利用 $SU(2)$ 规范场在单位矢量场中的分解形式，讨论二分量 Bose-Einstein 凝聚中的环流条件. 首先，对 $SU(2)$ 规范势分解形式进行简述，并给出它与't Hooft 张量的关系；根据自旋 1/2 的二分量 Bose-Einstein 凝聚体内部态的 $SU(2)$ 对称性，给出一个推广的 Mermin-Ho 关系，得到新的环流条件. 这个条件其实是一个拓扑约束.

2 $SU(2)$ 规范场分解与't Hooft 张量

$SU(2)$ 群规范势 1 形式和规范场强 2 形式的一般分解形式分别为[5]

$$B^a = \varepsilon_{abc}\mathrm{d}n^b n^c + \varepsilon_{abc}n^b \mathrm{D}n^c + An^a, \tag{1}$$

$$F^a = \mathrm{d}An^a - \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\mathrm{d}n^b \wedge \mathrm{d}n^c + \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\mathrm{D}n^b \wedge \mathrm{D}n^c + \varepsilon_{abc}n^b \mathrm{dD}n^c - A \wedge \mathrm{D}n^a, \tag{2}$$

其中，A 是一个 $U(1)$ 规范势，D 是协变微商，n^a（$a=1,2,3$）是一个单位矢量场，且 $n^a n^a = 1$. 考虑规范场强 F^a 在单位矢量场 n^a 上的投影 $F^a n^a$，由（2）式得

$$F^a n^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}n^a \mathrm{D}n^b \wedge \mathrm{D}n^c = \mathrm{d}A - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}n^a \mathrm{d}n^b \wedge \mathrm{d}n^c$$

或者

2002－03－19 收稿
* 中国科学院知识创新工程重点方向性项目（KJCX2－SW－N02），中国科学院百人计划经费和国家重点基础研究发展规划项目（G2000077400）资助

$$F^a_{\mu\nu} n^a - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc} n^a D_\mu n^b \wedge D_\nu n^c =$$

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc} n^a \partial_\mu n^b \wedge \partial_\nu n^c \qquad (3)$$

上式的左边正是't Hooft 张量 $f_{\mu\nu}$，因此，(3)式变为

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2}\varepsilon^{abc} n^a \partial_\mu n^b \wedge \partial_\nu n^c . \qquad (4)$$

这是我们由规范势分解所得到的't Hooft 张量的表达式．

3 自旋 1/2 Bose-Einstein 凝聚

旋量 Bose 凝聚体的一个基本特征是多个原子的超精细态几乎拥有相同的能量，这将导致许多在单分量 Bose 凝聚体中所没有的新现象，如改变了的基态结构，自旋波模式无核(Skyrmion)涡旋的存在．自旋自由度变成了相关的动力学变量，所以，对于通常的单分量 Bose 凝聚，自旋被有效地冻结了．一般地旋量 Bose 凝聚体的序参数选为

$$\langle \Psi \rangle = \zeta(\boldsymbol{x}, t)\Phi(\boldsymbol{x}, t), \qquad (5)$$

其中，Ψ 是场算子，Φ 是一个标量场，ζ 是一个归一化旋量场．

对于自旋为 1/2 的 Bose 气体的二分量凝聚体，其序参数是一个旋量．尽管，这种凝聚内部不存在真正的 $SU(2)$对称性，但是，当两个分量的散射长度相当时，内部态具有一个近似 $SU(2)$对称性，例如 ^{87}Rb原子凝聚[10]．因此，方程(5)式中的 ζ 是一个二分量的旋量场．为了研究这种具有 $SU(2)$对称性的超流体的拓扑性质，我们引进 $SU(2)$规范势 $B_\mu = B^a_\mu(\boldsymbol{r}, t)\sigma_a/(2i)$ $(\mu = 0,1,2,3)$，这种类型的场体现了凝聚态函数$\langle \Psi \rangle$自旋规范对称性，所以 B_μ 应该起着规范场的角色，并且作为一个唯象的复合力场与凝聚态的准粒子耦合．为了消除非物理的规范自由度，我们选择一个特殊的规范条件为

$$D_\mu |\Psi\rangle = (\partial_\mu - \boldsymbol{B}_\mu)|\Psi\rangle = 0, \qquad (6)$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - \boldsymbol{B}_\mu$ 是协变微商．

考虑波函数 $|\Psi\rangle = \sqrt{N(\boldsymbol{r})}\,\zeta$，其中，$N = \langle \Psi|\boldsymbol{\sigma}|\Psi\rangle/\langle \Psi|\Psi\rangle = \zeta^* \boldsymbol{\sigma}\zeta$，从(6)式，我们发现

$$B^a_\mu = 2i\zeta^* \sigma_a \partial_\mu \zeta, \qquad (7)$$

为了给出自旋规范势与超流体速度之间的关系，考虑场 $\boldsymbol{B}_\mu$ 在平均自旋方向上的投影 $A_\mu = B^a_\mu N^a$．应用(6)式后，可以将投影 A_μ 的空间分量 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$写成

$$\boldsymbol{A} = 2M\boldsymbol{u}_s/\hbar, \qquad (8)$$

其中 $\boldsymbol{u}_s = (\hbar/Mi)\zeta^* \nabla\zeta$ 是超流体速度．相应的投影规范场强是

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \frac{2M}{\hbar}(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu), \qquad (9)$$

它在绕平均自旋方向所作的 $U(1)$转动下保持不变．

利用(4)式，得到't Hooft 张量与超流体速度的关系为

$$f_{\alpha\beta} = \frac{2M}{\hbar}(\partial_\alpha u_\beta - \partial_\beta u_\alpha) - \varepsilon^{abc} N^a \partial_\alpha N^b \partial_\beta N^c, \qquad (10)$$

其中 $\alpha, \beta = 1,2,3$．进一步，在奇点以外，应用(6)和(7)式发现超流体的速度如下[12]

$$\frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{u}_s = \left(\frac{\hbar}{8M}\right)\varepsilon^{abc} N^a (\nabla N^b \times \nabla N^c) + \frac{\hbar}{8M}\nabla N^a \times \boldsymbol{B}^a, \qquad (11)$$

其中 $\boldsymbol{B}^a = (B^a_1, B^a_2, B^a_3)$．这个关系表明了超流体旋度一个新结构，它不仅依赖于平均自旋 $N(\boldsymbol{r})$而且依赖于 $\boldsymbol{B}^a$ 场的分布，是 Mermin-Ho[11]关系的推广

4 环流条件

为了进一步研究关系(11)式的整体性质及意义，考虑(10)式在一个以 C 为边界的曲面$\sum$上的积分．我们知道积分$(1/4\pi)\int_\Sigma f_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = n_{th}$，式中 n_{th}是一个拓扑整数，由此，可以得到自旋－1/2 凝聚体的环流条件为

$$M\oint_C \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{h}{4}\int_\Sigma \varepsilon^{abc} N^a (\nabla N^b \times \nabla N^c)\, d\boldsymbol{\sigma} + \frac{h}{2} n_{th}. \qquad (12)$$

这是一个新的拓扑约束，它明显不同于单分量 Bose 凝聚的环流条件．关系(12)式也表明了平均自旋方向分布如何对环流的贡献，使得环流仅仅在 $N(\boldsymbol{r})$场的特殊构形下才能量子化．(12)式右边第二项$(h/2)n_{th}$是对环流的一个新的半整数量子的贡献，它来源于(11)式项$(\hbar/8M)\nabla N^a \times \boldsymbol{B}^a$，是自旋－1/2 凝聚态的特性之一．

参考文献(References)

1 Faddeev L, Niemi A. Nature, 1997, **387**: 58; Battye R, Sutcliffe P. Phys. Rev. Lett., 1998, **81**: 4798

2 Faddeev L, Niemi A. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**: 1624

3 Bae W S, Cho Y M, Kimm S W. hep-th/0105163

4 LI Xi-Guo. General Decomposition Theory of Gauge Potential Gauss-Bonnet-Chern Theorem and Inner Structure of Torsion, Doctoral Dissertation, Lanzhou University, 1994

5 LI Xi-Guo, DUAN Yi-Shi, SONG Jian-Jun. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**: 296 (in Chinese)
(李希国,段一士,宋建军. 高能物理与核物理,2001,**25**:296)

6 DUAN Yi-Shi, LI Xi-Guo. Hilv. Phys. Acta, 1995, **68**: 513

7 YANG G H. General Relativity and Gravitation, 2001, **33**: 1027

8 LI Xi-Guo. Rev. Nucl. Phys., 2000, **17**(4): 201

9 DUAN Yi-Shi, JIA Duo-Jie. Chin. Phys. Lett., 2001, **18**(4): 473

10 Mathews M R, Anderson et al. Phys. Rev. Lett., 1999, **83**: 2498; Khawaja U A, Stoof H. Nature (London), 2001, **411**: 918

11 Mermin M R, Ho T L. Phys. Rev. Lett., 1976, **36**: 594

12 JIA Duo-Je, DUAN Yi-Shi, LE Xi-Guo. Phys. Lett., 2001, **A289**: 245—250

Decomposition of the $SU(2)$ Gauge Field and Circulation Condition of the Bose-Einstein Condensate*

LI Xi-Guo[1,2] JIA Duo-Jie[2,3] GAO Yuan[2]

1 (Research Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Collisions, Lanzhou 730000, China)

2 (Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

3 (Institute of Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract Using decomposition of the $SU(2)$ gauge field in terms of unit vector field, we have discussed circulation condition of the spin-1/2 Bose-Einstein dendensate. For the two-component Bose-Einstein condensate, the $SU(2)$ symmetry of the internal states leads to a generalization of Mermin-Ho relation as a topological constrain of the superfluid velocity.

Key words decomposition of gauge field, Bose-Einstein condensate, circulation condition

Received 19 March 2002

* Supposed by the CAS Knowledge Innovation Project (KJCX2-SW-N02), One Hundred Persons Project of Chinese Academic of Sciences, Major State Basic Research Development Program (G2000077400)