

$\psi(2S)$ 扫描实验中相关数据的拟合及误差处理*

莫晓虎^{1,2} 朱永生¹

1 (中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

2 (中国高等科学技术中心 北京 100080)

摘要 文中详细讨论了 $\psi(2S)$ 扫描实验数据拟合过程中同一反应道不同能量点之间, 以及同一能量点不同反应道之间的复杂的相关性问题. 利用最大似然函数法得到拟合公式; 采用多次抽样拟合的办法避免过多待定参数带来的极小化困难; 分析并综合各类误差对拟合参数的影响, 从而求得最终的合成误差. 文中所阐述的方法是处理实验数据拟合过程中复杂相关性问题的有效方法.

关键词 相关性 误差 最大似然法 抽样 拟合

1 观测事例数与理论事例数

利用北京谱仪(BES)^[1], BES 合作组在 $\psi(2S)$ 共振峰附近 24 个能量点处收集数据并研究了如下 7 个过程 4 种末态^[2]:

$$\begin{aligned} e^+ e^- \rightarrow \psi(2S) \rightarrow \text{hadron}, \pi^+ \pi^- J/\psi, \mu^+ \mu^-, e^+ e^-; \\ e^+ e^- \rightarrow \text{hadron}, \mu^+ \mu^-, e^+ e^-. \end{aligned} \quad (1)$$

根据不同末态事例的特点, 经由物理分析可以获得相应的观测事例数, 记为 N_{ij}^o . 在随后的分析与描述中, 用指标 j 表示不同的能量点, $j = 1, 2, \dots, n_{pt}$ ($= 24$); 用指标 i 表示 3 种不同的末态, $i = 1, 2, 3$ ($= n_{ch}$) 或 $i = h, \pi, \mu$, 分别表示 hadron, $\pi^+ \pi^- J/\psi$, $\mu^+ \mu^-$ 末态. 至于 $e^+ e^-$ 末态, 它主要由 3 个部分组成: QED 项(连续项), $\psi(2S) \rightarrow e^+ e^-$ 共振项, 以及两者之间的干涉项. $\psi(2S)$ 衰变为 $e^+ e^-$ 末态的分支比很小^[3], 即使在 $\psi(2S)$ 峰值处, 其截面也仅为 QED 截面的 1/20; 干涉项的份额则更小. 因此, 扣除共振和干涉两项的贡献后, $e^+ e^-$ 末态事例可用来确定每个能量点的亮度:

$$L_j = \frac{N_{ej}^C}{\sigma_{ej}^C \epsilon_{ej}^C}, \quad (2)$$

式中 σ_{ej}^C 为点 j 处 $|\cos\theta| < 0.72$ 的 $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ 过程的截面, ϵ_{ej}^C 为 $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ 事例的实验探测效率, 它

们都可由 F. A. Berends 的 $e^+ e^-$ 事例产生子 BHABHA^[4] 和北京谱仪的事例产生和重建软件 SOBER, DRUNK^[1] 以及对 $e^+ e^-$ 末态事例的判选条件, 通过 Monte Carlo 模拟计算求得. N_{ej}^C 是相应于连续态部分的观测事例数.

利用亮度结合理论计算的观测截面, 可以得到理论事例数, 记为 N_{ij}^o ,

$$N_{ij}^o = L_j \cdot \sigma_{ij}^{obs} (i = h, \pi, \mu; j = 1, 2, \dots, n_{pt}). \quad (3)$$

观测截面与反应的物理截面之间的关系为

$$\begin{aligned} \sigma_{hj}^{obs} &= \sigma_{hj}^R \epsilon_h^R + \sigma_{hj}^C \epsilon_h^C, \\ \sigma_{\pi j}^{obs} &= \sigma_{\pi j}^R \epsilon_\pi^R, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_{\mu j}^{obs} = \sigma_{\mu j}^R \epsilon_\mu^R + \sigma_{\mu j}^C \epsilon_\mu^C + \sigma_{\mu j}^I \sqrt{\epsilon_\mu^R \cdot \epsilon_\mu^C}.$$

式中 R 表示共振项, C 表示连续项, I 表示干涉项. ϵ 表示实验探测效率, 可由相应的事例产生子通过 Monte Carlo 计算求得. 等式右边的 σ 是来源于理论计算的物理截面, 包含了实验感兴趣的待定参数, 明确的表示出来应为 $\sigma = \sigma(\boldsymbol{\eta})$, 其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是参数矢量, 包括 $\psi(2S)$ 衰变的总宽度 Γ_1 , 分宽度 $\Gamma_{\pi^+ \pi^- J/\psi}$, Γ_μ , 质量 $M_{\psi(2S)}$, $\psi(2S)$ 峰前强子连续截面 R , 对撞机质心系能散 Δ 等信息, 即 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\Gamma_1, \Gamma_{\pi^+ \pi^- J/\psi}, \Gamma_\mu, M_{\psi(2S)}, R, \Delta)$. 利用观测事例数与理论事例数以及

2002-09-23 收稿

* 国家自然科学基金(19991483), 中国科学院重大项目(KJ95T-03), 中国科学院百人计划(U-25)资助

有关的误差,可以构造出拟含量 F (详见下文),通过 F 的极小化可以获得待定的拟合参数的最佳估计值.

图 1 给出各截面 $\sigma_{h_j}^{obs}, \sigma_{\pi_j}^{obs}, \sigma_{\mu_j}^{obs}$ 的扫描曲线. 根据观测事例数结合亮度换算的实验截面及其相应的误差一并标示在图 1 中.

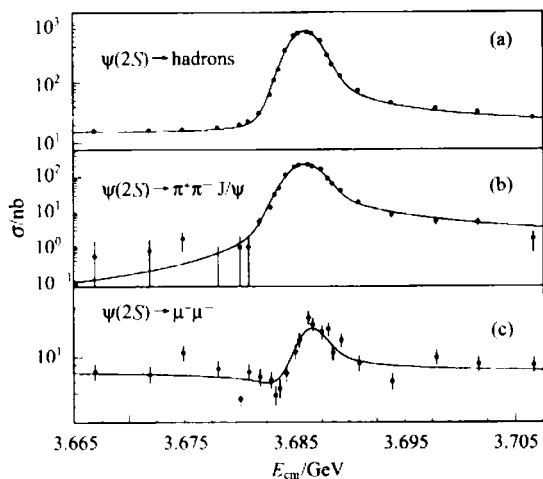


图 1 $e^+e^- \rightarrow$ 强子末态的总截面(a), $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ 的积分截面(b), $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的积分截面(c) 在 $\psi(2S)$ 附近能区随能量的变化

2 误差与相关性

2.1 统计误差与系统误差

任何实验测量量都存在误差. 通常根据性质的不同将误差区分为两类: 统计误差与系统误差. 我们首先考虑统计误差. 亮度 L_j 的统计误差由能量点 j 处测量到的 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ 事例数决定:

$$\frac{\delta L_j}{L_j} = \frac{\delta N_{e_j}^C}{N_{e_j}^C} = \frac{1}{\sqrt{N_{e_j}^C}}$$

具体对于扫描实验来说, 平均每点的事例数为 1783, 相应于 2.4% 的统计误差. 现以 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 事例为例, 说明如何得到探测效率的统计误差. 利用 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 事例产生子 MUPAIR^[4] 产生 N_μ 个 $\mu^+\mu^-$ 末态的 Monte Carlo 事例, 经过 SOBER, DRUNK

和 $\mu^+\mu^-$ 事例的判选条件得到 n_μ 个事例, 则探测效率 $\epsilon_\mu^C = n_\mu/N_\mu$. 由于 1 个 $\mu^+\mu^-$ 事例是否被判定为 $\mu^+\mu^-$ 事例只有两种结果: 成功(被判定为 $\mu^+\mu^-$ 事例而保留)和失败(被判为非 $\mu^+\mu^-$ 事例而摒弃). 故这是一次伯努利实验, 其成功的概率 p 即等于 ϵ_μ^C . N_μ 次伯努利实验成功 n_μ 次(即探测到 n_μ 个 $\mu^+\mu^-$ 事例)服从参数 $N_\mu, p = \epsilon_\mu^C$ 的二项分布, n_μ 的期望值 $E(n_\mu) = N_\mu \cdot p = N_\mu \cdot \epsilon_\mu^C = n_\mu$, n_μ 的方差 $V(n_\mu) = N_\mu \epsilon_\mu^C (1 - \epsilon_\mu^C)$, ϵ_μ^C 的统计误差

$$\delta \epsilon_i = \frac{\sqrt{V(n_i)}}{N_i} = \left(\frac{\epsilon_i (1 - \epsilon_i)}{N_i} \right)^{1/2}, \quad (i = h, \pi, \mu). \tag{5}$$

式中上标已去掉, 指标 μ 被 i 替换, 表示该式对于本文所论及的各反应道的探测效率都适用.

在事例数的确定过程中, 系统误差的来源主要有两个方面: 一是事例判选误差, 二是事例探测效率的误差. 前者可以在合理的范围内变动事例判选条件, 由变动前后事例数的差别求出; 后者可以利用同一模型的事例产生子, 通过调节参数前后求得的探测效率的差别, 或者利用不同模型的事例产生子求得的探测效率的差别求出. 效率及误差的求得可参见文献[2], 具体数值列于表 1 中.

2.2 误差与相关性的关系

在拟合过程中, 主要考虑亮度和效率带来的相关性. 由于系统误差与统计误差对各扫描点的影响不同, 产生的相关性以及对拟合参数中心值和精度的影响不同, 因此需要采用不同的处理方法.

a) 与亮度有关的相关性

亮度的系统误差对于所有点与所有道都产生相同的变化效应, 这种整体性的效应体现在对于参数的精度影响上. 因此亮度的系统误差只在拟合参数的误差分析中予以考虑(详见本文第 4 节). 至于亮度的统计误差, 我们注意到利用公式(3)进行运算时, 同一能量点(j 相同)不同过程的理论事例数的计算依赖于同一亮度值, 它的变化导致不同过程的

表 1 各种过程的效率和相应的误差

末态	e^+e^-		$\mu^+\mu^-$		hadrons		$\pi^+\pi^- J/\psi$
	连续	共振	连续	共振	连续	共振	共振
效率 ϵ (%)	72.4	76.4	37.1	41.9	74.5	77.1	43.4
误差 $\delta\epsilon/\epsilon$ (%)	3.2	8.5	5.0	4.7	7.1	2.2	3.4

理论事例数同比例同方向的变化. 换句话说, 亮度的统计误差在其他截面的计算过程中转化为系统误差, 由此带来的同一能量点不同过程数据之间的相关性应该在拟合量的构造中予以考虑.

b) 与效率有关的相关性

某一反应道效率的系统误差反映该道数据偏差的整体效应, 其大小标志着整体偏差可能的范围, 因而影响参数的测量精度, 其效果亦应在有关的误差分析中予以考虑 (详见第 4 节). 至于效率的统计误差, 我们注意到利用公式 (4) 进行运算时, 对于特定末态 (i 相同), 不同能量点的理论事例数的计算依赖于该末态的共振部分和连续部分的探测效率 ϵ_i^R , ϵ_i^C , 它们的变化导致不同能量点的理论事例数同比例同方向的变化. 换句话说, 各 N_y^0 之间是不独立的, 而是彼此相关的. 由此带来的同一过程不同能量点数据之间的相关性应该在拟合量的构造中予以考虑.

总之, 系统误差反映数据偏差的整体效应, 其大小直接影响到相关参数的测量精度, 其效果在相关参数的误差分析中考虑. 统计误差反映某测量值的统计性质, 在利用概率密度函数构造最大似然函数的过程中, 相应的误差参与拟合量 F 的构造. 该项误差的大小将影响相应变量可能带来的相关性的强弱程度.

3 拟合量构造与拟合参数处理

3.1 拟合量的构造

对于已知的实验观测量 $N_y, L_j, \epsilon_i^R, \epsilon_i^C$, 用 $P_N, P_L, P_{\epsilon^R}, P_{\epsilon^C}$ 表示它们的概率密度, 则联合似然函数为^[5]

$$P(N, L, \epsilon^R, \epsilon^C; \eta, L^0, \epsilon^{R0}, \epsilon^{C0}) = \left\{ \prod_{i=1}^{n_{ch}} \prod_{j=1}^{n_{pt}} P_N(N_y; N_y^0, \delta_{N_y}) \right\} \cdot \left\{ \prod_{i=1}^{n_{ch}} P_{\epsilon_i^R}(\epsilon_i^R; \epsilon_i^{R0}, \delta_{\epsilon_i^R}) P_{\epsilon_i^C}(\epsilon_i^C; \epsilon_i^{C0}, \delta_{\epsilon_i^C}) \right\} \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{n_{pt}} P_L(L_j; L_j^0, \delta_{L_j}) \right\}, \quad (6)$$

式中带指标“0”的项为待拟合的观测量真值, 其中 N_y 的真值 N_y^0 可由亮度和探测效率的真值 $L_j^0, \epsilon_i^{R0}, \epsilon_i^{C0}$ 和物理截面的理论预期值表示. 不失一般性, 以强子末态为例 (以后的叙述沿用此惯例)

$$N_y^0 = L_j^0 \cdot [\sigma_y^R(\eta)\epsilon_i^{R0} + \sigma_y^C(\eta)\epsilon_i^{C0}], \quad (7)$$

而截面的理论预期值与待估计参数 η 相联系. δ 表示各观测量的统计误差, 其中 N_y 的统计误差 δ_{N_y} 可表为 $\delta_{N_y}^2 = N_y^0$, 其他各观测量的统计误差可根据公式 (5) 进行计算.

假定各观测量均服从期望值为其真值, 标准偏差等于其统计误差的正态分布, 则有

$$F \equiv -2 \ln L = \sum_{i=1}^{n_{ch}} \sum_{j=1}^{n_{pt}} \left[\left(\frac{N_y - N_y^0}{\delta_{N_y}} \right)^2 + 2 \ln \delta_{N_y} \right] + \sum_{i=1}^{n_{ch}} \left[\left(\frac{\epsilon_i^R - \epsilon_i^{R0}}{\delta_{\epsilon_i^R}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_i^C - \epsilon_i^{C0}}{\delta_{\epsilon_i^C}} \right)^2 \right] + \sum_{j=1}^{n_{pt}} \left(\frac{L_j - L_j^0}{\delta_{L_j}} \right)^2 \quad (8)$$

对 (8) 式求极小, 可求得物理上感兴趣的参数 η 的最佳估计值. 同时也得到观测量的真值 $N_y^0, L_j^0, \epsilon_i^{R0}, \epsilon_i^{C0}$. 应当指出 F 的表达式中已略去了无关紧要的常数项, 因为在对 F 求极小的过程中, 常数项不起作用. (8) 式中的对数项 $2 \ln \delta_{N_y}$ 的出现是由于 δ_{N_y} 中包含了待拟合的真值 $L_j^0, \epsilon_i^{R0}, \epsilon_i^{C0}$ 和物理截面 $\sigma_y^R(\eta), \sigma_y^C(\eta)$ 的缘故.

3.2 亮度相关性的抽样处理

前面已经提到, 待拟合参数除了物理上感兴趣的参数 η 之外, 还有 3 个末态共振和连续态的探测效率的真值, 以及 24 个能量点的亮度真值 L_j^0 . 这些真值只是由于相关性的考虑才引入的拟合参量, 实际并无物理上的兴趣, 而且过多的待拟合参数使得极小化程序难以甚至无法收敛到真正的极小点. 因此利用高斯抽样的方法来减少由于亮度相关性引入的拟合参数 L_j^0 的个数, 而又考虑到 L_j 的统计涨落对 η 拟合值的效应, 定义

$$L_j^* = L_j + \delta_{L_j} \cdot \xi_j, \quad (9)$$

其中 δ_{L_j} 为亮度的统计误差, ξ_j 是标准正态分布随机数, 用 L_j^* 代替 L_j^0 , 于是 (8) 式变成 (略去常数项)

$$F = \sum_{i=1}^{n_{ch}} \sum_{j=1}^{n_{pt}} \left[\left(\frac{N_y - N_y^0}{\delta_{N_y}} \right)^2 + 2 \ln \delta_{N_y} \right] + \sum_{i=1}^{n_{ch}} \left[\left(\frac{\epsilon_i^R - \epsilon_i^{R0}}{\delta_{\epsilon_i^R}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_i^C - \epsilon_i^{C0}}{\delta_{\epsilon_i^C}} \right)^2 \right], \quad (10)$$

而 (7) 式变成

$$N_y^0 = L_j^* \cdot [\sigma_y^R(\eta)\epsilon_i^{R0} + \sigma_y^C(\eta)\epsilon_i^{C0}]. \quad (11)$$

利用 (9) 式进行 n (次抽样, 对 F 求极小求出 n) 组

表 2 各类误差与拟合参数的合成误差

拟合参数	中心值	误差				合成误差(%) [*]
		拟合(%)	能量(%)	亮度(%)	系统误差(%)	
Γ_i/keV	264	6.1	7.0	3.2	2.2	10.1 [27]
Γ_h/keV	258	6.2	7.0	3.2	2.2	10.1 [26]
$\Gamma_e \cdot \pi^- \mu^+/\text{keV}$	85.42	6.3	6.4	3.2	3.4	10.1 [8.7]
Γ_μ/keV	2.44	0.5	6.6	3.2	4.7	10.21
$\mathcal{B}_h(\%)$	97.79	0.14	0.07	—	—	0.16 [0.15]
$\mathcal{B}_e \cdot \pi^- \mu^+(\%)$	32.34	1.44	0.52	—	3.4 ⊕ 2.2	4.36 [1.41]
$\mathcal{B}_\mu(\%)$	0.93	6.04	3.05	—	4.7 ⊕ 2.2	8.53 [0.08]

注: 能量误差是指束流质心能量的不确定性带来的误差; * : 合成误差一列中方括号里的数值表示绝对误差。

η 的估计值. 当 n 足够大时, 这 n 组 η 的中心值即为 η 的最佳估计值, 而它们的误差则为亮度 L_i 的统计涨落导致的 η 的误差. 对于我们的具体情况, 它们都小于 0.6% (相对误差), 在最终的误差分析中可以忽略不计.

表 2 列出了拟合得到的 $\psi(2S)$ 共振参数的最佳估计值及其拟合误差. 表中其他各项误差的来源见下节的讨论.

4 $\psi(2S)$ 共振参数误差的确定

除了拟合误差外, 还有 3 个因素导致共振参数有附加的误差.

a) 束流质心能量的不确定性

BEPC 的 e^+e^- 对撞质心能量的中心值 E_{cm} 约有 0.1 MeV 的不确定性^[6]. 将这一不确定性作为标准偏差, 以 E_{cm} 观测值作为中心值进行正态抽样, 再拟合得到相应的 η 值, 可求得此因素导致的 $\psi(2S)$ 共振参数的不确定性. 具体数值见表 1 的第二项误差.

b) 亮度的系统误差

由于 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ 的事例判选有系统的不确定性, (2) 式中 ϵ_c^e 有 3.2% 的误差 (参见表 1), 因此亮度有 3.2% 的系统误差. 这一系统误差会导致所有反应道和所有能量点同比例同方向的变化, 这种不确定性将完全传递到各末态衰变宽度中 (表 2 第三项误差). 由于分支比是分支宽度与总宽度之比, 亮度值在计算时抵消, 故亮度的系统误差并不导致分支比的附加误差.

c) 各末态效率的系统误差

表 1 已给出了各末态的探测效率的相对系统误差 ν . 特定末态的效率误差只影响该末态的共振参

数. 譬如强子末态有连续态和共振态两种系统误差 (分别为 $\nu_c^c = 7.0\%$ 与 $\nu_h^h = 2.2\%$), 前者影响描述连续态截面的 R 值参量的误差, 后者影响刻画共振态性质的强子的衰变宽度 Γ_h 的误差. 又例如 $\nu_\mu^h = 4.7\%$, 导致 Γ_μ 有相应的 4.7% 的附加误差. 注意到 $\mathcal{B}_\mu = \Gamma_\mu/\Gamma_i \cong \Gamma_\mu/\Gamma_h$, 所以 \mathcal{B}_μ 的附加误差为 $[(\nu_\mu^h)^2 + (\nu_h^h)^2]^{1/2}$, 即与 Γ_μ 和 Γ_h 的系统误差都有关系.

各参数的总误差为拟合误差和以上三项误差平方和的根 (即合成误差), 列于表 2 的最后一列.

5 结论

本文针对 $\psi(2S)$ 扫描实验数据处理的特点, 讨论了两类相关性、两类误差以及两者之间的关系. 利用最大似然法得到包含各种相关因素的拟合公式, 比较合理地解决了数据拟合过程中同一反应道不同能量点之间, 同一能量点不同反应道之间的复杂的相关性问题. 为了避免过多待定拟合参数带来的极小化运算过程中的困难, 采用了多次抽样拟合的办法估计出亮度相关性带来的误差. 最后, 通过分析、综合不同种类误差对拟合参数精度的不同影响, 计算出拟合参数的合成误差.

对于处理实验数据拟合过程中复杂的相关性问题, 本文所阐述的最大似然函数法结合抽样拟合的方法, 是一种将理论合理性与实验可行性相结合的有效方法.

感谢 Frank Porter 教授在数据相关性方面富有启发性的建议以及在拟合公式推导方面的大力协助. 感谢苑长征教授和 F. A. Harris 教授在相关方面的有益的讨论.

参考文献 (References)

- 1 BES Collaboration. HEP & NP, 1992, **16**(9):769—787 (in Chinese);
BAI J Z et al. Nucl. Instr. Meth., 1994, **A344**:319—344; BAI J Z
et al. Nucl. Instr. Meth., 2001, **A458**:627—637
(BES 合作组. 高能物理与核物理, 1992, **16**(9):769—787)
- 2 BES Collaboration. Phys. Lett., 2002, **B550**:24—32; MO Xiao-Hu.
Measurement of $\psi(2S)$ Resonance Parameters. Dr. Thesis. Beijing, in
2001 (in Chinese)
- (莫晓虎. $\psi(2S)$ 共振参数的测量. 博士论文. 北京, 2001)
- 3 Particle Data Group, Hagiwara K et al. Phys. Rev., 2002, **D66**:
010001
- 4 Berends F A et al. Nucl. Phys., 1973, **B57**:381; 1974, **B68**:541;
1981, **B177**:237; 1983, **B228**:537
- 5 Porter F. Scale Correlation in χ^2 a Fit, 2002, unpublished
- 6 ZHANG C et al. HEACC'92 Hamburg, XVth Int. Conf. On High En-
ergy Accelerators, ed. J. Rossbach Germany: Hamburg, 1992, 409

Correlated Data Fitting and Error Analysis in $\psi(2S)$ Scan Experiment *MO Xiao-Hu^{1,2} ZHU Yong-Sheng¹¹ (Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China)² (China Center of Advanced Science and Technology, Beijing 100080, China)

Abstract Maximum likelihood method is adopted to acquire the fitting formula, which could deal with the correlations between different points and different channels in $\psi(2S)$ scan experiment. Sampling technique is employed to avoid the difficulty of too many fitting parameters. The final error of the fitted value is the combination of all kinds of uncertainties. The approach described in this paper could effectively treat the complex correlation problem in experiment data analysis.

Key words correlation, error, maximum likelihood method, sampling, fitting

Received 23 September 2002

* Supported by National Natural Science Foundation of China (19991483), Major Subject of The Chinese Academy of Sciences (KJ95T-03) and 100 Talents Programme of CAS (U-25)