

单粒子在非轴对称八极形变势场中的混沌运动*

金华^{1,2} 郑仁蓉¹ 朱顺泉³ 李君清⁴

1 (上海师范大学物理系 上海 200234)

2 (上海电机学院文理系 上海 200240)

3 (上海商学院计算机与电气技术系 上海 201400)

4 (中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

摘要 针对单粒子处在长椭球谐振子势加上 $Y_{32}+Y_{3-2}$ 形变势场中的情况,从经典和量子两个角度分析了粒子在非轴对称八极形变势场中的混沌运动.通过经典的轨道稳定性分析,指出了系统等势能面性质对粒子运动特点的重要性.又通过对体系存在的能级免交叉现象,三维不对称谐振子相干态在势场中的演化特征的研究,具体地说明了八极形变势的非轴对称性使单粒子更容易出现混沌运动.

关键词 非轴对称八极形变 $Y_{32}+Y_{3-2}$ 能级免交叉 相干态波包 混沌运动

1 引言

原子核中存在的混沌现象已被广泛地讨论,人们研究的方法大致可以分为两类^[1]:一是研究实际存在的原子核的混沌运动,从能量激发、剩余相互作用、对称性破缺等方面探究引起核子混沌运动的原因;另一类是利用平均场的方法考察单粒子在形变原子核势场中的运动,研究形变平均场的性质如何影响单粒子的运动行为.第二种方法中,人们常常忽略哈密顿量中单粒子自旋轨道耦合项及角动量平方项,使模型简单,但却可以揭示形变对原子核规则或混沌运动的主要影响.

在原子核独立粒子模型中,每个核子在由其他核子所产生的平均势场中运动,这个势场可以用球谐多极函数展开.当核子处在八极以上的形变势场中,由于系统是不可积的,随着形变强度的增大,核子将出现混沌运动^[2].对于轴对称八极形变而言:W.D Heiss等人发现,扁椭球比长椭球形体系更容易发生混沌运动^[3, 4];李君清等从经典的角度探讨了发生这种现象的原因,指出核势能面的曲率对于核子运动的影响^[5, 6].当形变的轴对称性被破坏时,系统的角动量在 z 方向上的投影不再是运动积分,核子的运动将变得

更为复杂.W.D Heiss等人研究了各种不同的非轴对称八极形变的壳效应,但对体系的混沌运动没有作详细的讨论^[7],本文将不能给出壳效应的 $Y_{32}+Y_{3-2}$ 形变为例,首先从经典的角度探讨非轴对称八极形变系统发生混沌运动的原因,然后考察对应的量子体系所具有的特征.

2 经典动力学行为

2.1 非轴对称八极形变 $Y_{32}+Y_{3-2}$ 势场

当粒子在谐振子势附加非轴对称八极形变 $Y_{32}+Y_{3-2}$ 的势场中运动,其势能可表示为

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 + r^2 \lambda (Y_{32} + Y_{3-2}) \right], \quad (1)$$

上式中 Y_{32}, Y_{3-2} 为八极球谐函数, ω 为谐振子频率,且 $\omega = a\omega_x = b\omega_y = c\omega_z$.取 $\omega = m = 1$,使系统无量纲化,则

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 + \lambda \frac{z(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right], \quad (2)$$

2005-05-08 收稿

*国家自然科学基金(10375001, 10235020),上海市教委高校科技发展基金(03DZ03)和兰州重粒子加速器国家实验室原子核理论中心第三期课题资助

该势场是非轴对称的, λ 为其形变强度. 当形变强度 λ 逐渐增大达到临界形变强度 λ_c 时, 势场将开放至无穷远处^[7]. 计算中取 $a = b = 1, c = 1.2$, 即长椭球谐振子势附加 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 形变, 此时势场的 $\lambda_c = 2.312$. 由于势场具有标度不变性 $V(\gamma r) = \gamma^2 V(r)$, 不同能量的等势能面具有相同的形状. 图 1 是势能 $V=5$ 时, 势场(2)式在不同形变强度 λ/λ_c 时的等势能面图. 图中随着形变强度的增大, 等势能面发生变形扭曲, 有的地方出现负曲率, 而这种变化将对粒子的运动产生影响.

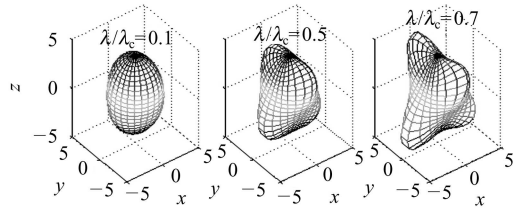


图 1 势能 $V = 5, a = b = 1, c = 1.2$ 时非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 的等势能面图

2.2 轨道的稳定性分析^[5, 8]

对于一个保守哈密顿系统:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V(\mathbf{r}), \quad (3)$$

其基准轨道可写为 $\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$, 将哈密顿正则方程线性化便可得到相邻轨道对于基准轨道的偏离:

$$\delta \dot{\xi} = S \delta \xi, \quad (4)$$

就一个三维哈密顿系统而言: $S = \begin{pmatrix} 0 & l_3 \\ -A & 0 \end{pmatrix}$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} \text{ 下标表示 } V \text{ 对相应坐标的偏导,}$$

例如: $V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ 其余类推. $l_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 当

考虑系统在某一时刻的运动特征时: S 可以看成对应于某一时刻基准轨道的一个常数矩阵. 这样, 系统在某一时刻的运动状况决定于此时 S 的本征值 x .

引入一组与势能相关的参量:

$$\begin{aligned} a_1 &= V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = \text{tr}(A), \\ a_2 &= V_{xx} V_{yy} + V_{yy} V_{zz} + V_{xx} V_{zz} - \\ &\quad V_{xy}^2 - V_{xz}^2 - V_{yz}^2, \\ a_3 &= V_{xx} V_{yy} V_{zz} + 2V_{xy} V_{xz} V_{yz} - V_{xx} V_{yz}^2 - \\ &\quad V_{yy} V_{xz}^2 - V_{zz} V_{xy}^2 = \det(A), \\ a &= a_1 a_2 - a_3, \end{aligned} \quad (5)$$

故某一时刻 S 的本征值方程可写为

$$x^6 + a_1 x^4 + a_2 x^2 + a_3 = 0, \quad (6)$$

令 $x' = x^2$, 则有

$$x'^3 + a_1 x'^2 + a_2 x' + a_3 = 0, \quad (7)$$

此即为 A 的本征值方程. 由于 A 是实对称矩阵, 其本征值 x' 为实数. 根据 Routh-Hurwitz 判据, 若

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a > 0, \quad (8)$$

x' 为负实数, 而 x 对应纯虚数.

如果系统势能参量不满足(8)式的条件, 有参量变为负数, 那 x 将会出现正实数根, 按照运动稳定性的理论, 相邻轨道将趋向指数分离. 因此, 等势能面上势能参量出现负数的区域将是不稳定的, 当粒子在运动的过程中, 不断穿越这些区域, 粒子会发生明显的混沌运动.

由于非轴对称八极形变体系是一个高维保守哈密顿系统, 其相空间的维数为 5, 用画影加勒截面来判断粒子运动的稳定性已不再方便, 故采用作系统最大李雅普诺夫指数的方法来考察粒子的运动^[9]. 图 2 中的(a), (b) 是 $a = b = 1, c = 1.2$ 的长椭球谐振子势分别附加了 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 形变和轴对称的 Y_{30} 形变后, 体系的平均最大李雅普诺夫指数随形变强度变化的关系图. 可以看到, 当形变强度较小时, 两者最大李雅普诺夫指数都趋于 0, 粒子处于规则运动; 随着形变强度增大,

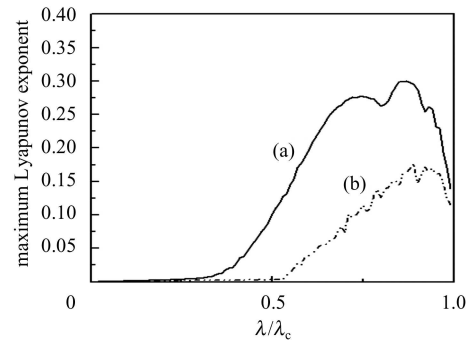


图 2 平均最大李雅普诺夫指数随形变强度 λ/λ_c 变化的关系

$a = b = 1, c = 1.2$ 的长椭球谐振子势分别附加 (a) $Y_{32} + Y_{3-2}$ 形变 (b) Y_{30} 形变.

等势能面出现负参量区域, 这些负参量区域将随形变强度的增大而增多, 粒子逐渐趋向混沌运动. 但是, 非轴对称的情况在较小的形变强度下就可以发生混沌运动, 最大李雅普诺夫指数随形变强度 λ/λ_c 变化的整体趋势也大于轴对称的情况, 而后者更是要在 $\lambda/\lambda_c > 0.5$ 的大形变强度下才能够分辨出系统的混沌运动. 可见当势场的轴对称性被破坏时, 系统的非线性加剧, 长椭圆谐振子在附加了非轴对称八极形变后, 也能容易地发生混沌运动.

3 量子混沌运动

3.1 非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 系统能级的免交叉

系统的哈密顿量为

$$H = -\frac{\nabla^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \lambda \frac{z(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = H_0 + \frac{1}{2} \lambda \frac{z(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (9)$$

(9)式中 H_0 为三维不对称谐振子哈密顿量. 以 H_0 为表象, 采用空间截断的方法, 使哈密顿矩阵为 1000 维, 数值求解体系的薛定谔方程^[10], 能级的相对精度是 0.1%.

考察能级随形变强度增大时的变化. 当观察两个相邻能级随某一参数变化的行为时, 可以发现: 可积系统的能级会发生交叉, 而不可积系统的能级则往往先接近后分离, 并不交叉, 这就是能级的免交叉现象. 理论研究表明, 经典上混沌的体系其量子上的一个重要表现就是体系有大量能级免交叉出现, 这种能级免交叉现象又与非线性共振相联系^[11].

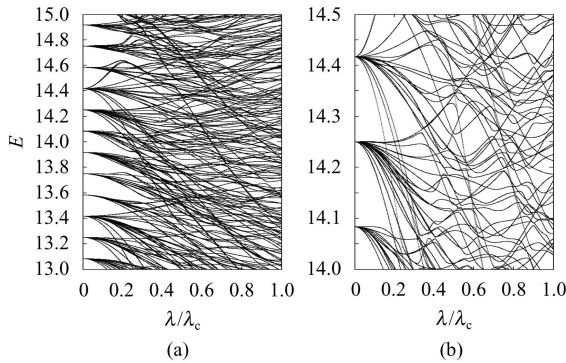


图3 $a = b = 1, c = 1.2$ 时非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 系统单粒子能级随形变强度 λ/λ_c 变化的关系图
(a) 能量范围为 13—15; (b) 能量范围为 14—14.5.

图3的(a)是 $a = b = 1, c = 1.2$ 时, 非轴对称八极形

变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 系统能量范围在 13—15 时单粒子能级随相对形变强度变化的关系图, 图3的(b)是在(a)取其中一段能量的情况. 我们看到, 当形变强度较小时, 体系没有能级的免交叉现象, 随着形变强度的增大, 当经典上体系趋向混沌运动时, 量子上其能级出现了较多的能级免交叉(如图3(b)). 这表明系统存在着量子混沌运动.

3.2 相干态在非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 势场中的动力学演化

为了使得对相应量子体系的描述便于与经典表述相联系, 选择三维不对称谐振子相干态波包作为体系的初态, 波包的扩散相应于一束相轨道的扩散^[10, 12]. 谐振子相干态有较好的动力学对称性, 当受到非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 的作用, 原有的对称性遭到破坏, 相干态波包的传播必然会表现一定的动力学特征. 体系初态相干态波包 $|\alpha_0\rangle$ 的表达式为^[13]

$$|\alpha_0\rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} (|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2 + |\alpha_z|^2) \right] \exp(a_x^+ \alpha_x + a_y^+ \alpha_y + a_z^+ \alpha_z) |0\rangle, \quad (10)$$

上式中 a_x^+, a_y^+, a_z^+ 分别为三维不对称谐振子在 x, y, z 3 个方向上的产生算符即

$$a_x^+ = \sqrt{\frac{a}{2}} \left(\frac{x}{a} - iP_x \right), \quad a_y^+ = \sqrt{\frac{b}{2}} \left(\frac{y}{b} - iP_y \right), \\ a_z^+ = \sqrt{\frac{c}{2}} \left(\frac{z}{c} - iP_z \right),$$

它们相应的湮没算符为 $a_x = \sqrt{\frac{a}{2}} \left(\frac{x}{a} + iP_x \right), a_y = \sqrt{\frac{b}{2}} \left(\frac{y}{b} + iP_y \right), a_z = \sqrt{\frac{c}{2}} \left(\frac{z}{c} + iP_z \right), |0\rangle$ 为真空态. 复数参量 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 由初始时刻波包在相空间的位置 $\{\langle x_0 \rangle, \langle y_0 \rangle, \langle z_0 \rangle, \langle p_{x0} \rangle, \langle p_{y0} \rangle, \langle p_{z0} \rangle\}$ 决定^[14]. 而三维不对称谐振子系统 H_0 在粒子数表象下本征态可表示为

$$|n_{1x} n_{2y} n_{3z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{1x}! n_{2y}! n_{3z}!}} (a_x^+)^{n_{1x}} (a_y^+)^{n_{2y}} (a_z^+)^{n_{3z}} |0\rangle, \quad (11)$$

(10)式可改写成

$$|\alpha_0\rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} (|\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2 + |\alpha_z|^2) \right] \sum_{n_{1x}=0}^{\infty} \sum_{n_{2y}=0}^{\infty} \sum_{n_{3z}=0}^{\infty} \frac{(\alpha_x)^{n_{1x}} (\alpha_y)^{n_{2y}} (\alpha_z)^{n_{3z}}}{\sqrt{n_{1x}! n_{2y}! n_{3z}!}} |n_{1x} n_{2y} n_{3z}\rangle, \quad (12)$$

这样, 以(12)式为初态, t 时刻非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 系统的状态为

$$|\alpha(t)\rangle = \exp(-iHt)|\alpha_0\rangle = \sum_m |\Psi_m(x, y, z)\rangle \exp(-iE_m t) \langle \Psi_m(x, y, z) | \alpha_0 \rangle, \quad (13)$$

$|\Psi_m(x, y, z)\rangle$ 是能量为 E_m 时非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 系统的本征波函数.

由此, 可以数值计算粒子处于非定态波函数 $|\alpha(t)\rangle$ 时, 动力学变量的期望值及测不准度, 来考察系统相干态波包的演化^[10, 12, 14]. 取初始时刻相干态波包 $|\alpha_0\rangle$ 中心的位置为 $\{\langle x_0 \rangle, \langle y_0 \rangle, \langle z_0 \rangle, \langle p_{x0} \rangle, \langle p_{y0} \rangle, \langle p_{z0} \rangle\} = \{0.0, 1.0, 2.5, 1.8, 0.0, 0.0\}$, 分别计算形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.1$ 和 $\lambda/\lambda_c = 0.5$ 时, 动力学变量的期望值及

测不准度. 经典上从该中心位置出发的轨道 $\lambda/\lambda_c = 0.1$ 时是规则的, 而 $\lambda/\lambda_c = 0.5$ 时是混沌的.

图 4 是系统形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.1$ 时, 初始态为 $|\alpha_0\rangle$ 的状态在非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 势场中传播时, 位置和动量的期望值随时间的演化图, 我们看到, 在所考察的时间范围内, 相干态波包的演化与经典轨道一样, 呈现出规则的态势, 并且波包中心沿着经典轨道运动. 但相干态不再满足最小测不准关系, 在图 5 中位置和动量的测不准度随时间振荡式地线性增加. 这表明系统在 $\lambda/\lambda_c = 0.1$, 波包虽有扩散, 但扩散不多, 波包中各成分之间保持着较好的协同性, 体现了系统近可积的特征, 这与图 2(a) 中系统在 $\lambda/\lambda_c = 0.1$ 时经典最大李雅普诺夫指数趋于 0 一致.

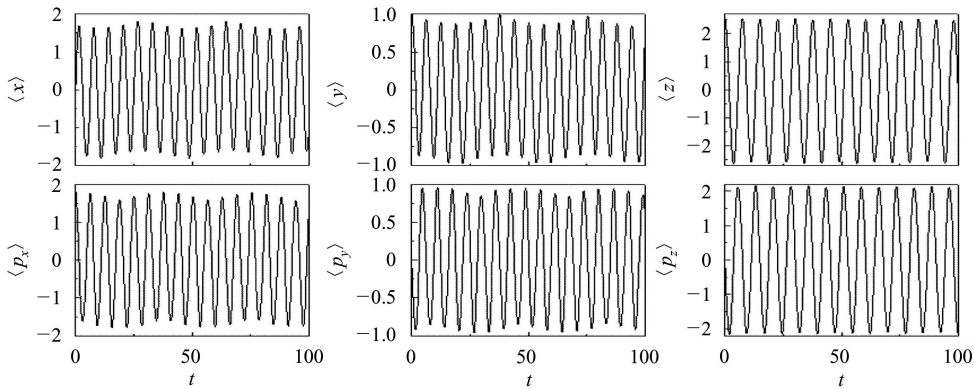


图 4 初始态为三维不对称谐振子相干态的状态在 $a = b = 1, c = 1.2$ 非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 势场中传播时, 位置和动量的期望值随时间的演化图
初始相干态 $|\alpha_0\rangle$, 形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.1$.

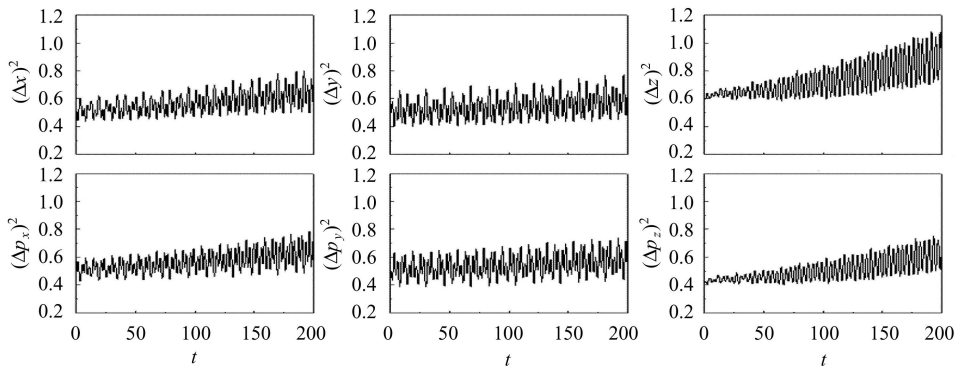


图 5 初始态为三维不对称谐振子相干态的状态在 $a = b = 1, c = 1.2$ 非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 势场中传播时, 位置和动量的测不准度随时间的演化图
初始相干态 $|\alpha_0\rangle$, 形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.1$.

当体系形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.5$ 时, 经典上系统在相空间中的轨道绝大多数是混沌的, 最大李雅普诺夫已远大于 0. 此时, 初始态为 $|\alpha_0\rangle$ 的相干态其传播是不规则的, 图 6 中位置和动量的期望值随时间无规振荡, 振幅

出现较大的衰竭. 而在图 7 中位置和动量的测不准度在很短的时间内增加到一个较大的值, 然后维持在一个平衡值附近振荡. 与系统在 $\lambda/\lambda_c = 0.1$ 的情形不同, 系统丧失了近可积性, 波包的结构遭很大的破坏, 出

现迅速的扩散. 而位置和动量的测不准度随时间的这种指数式增长正好与经典混沌系统相临轨道的指数式分离相对应.

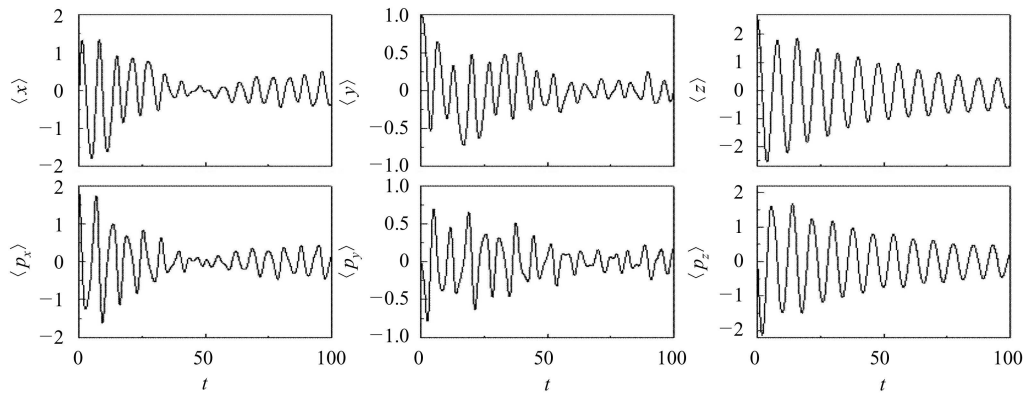


图6 初始态为三维不对称谐振子相干态的状态在 $a = b = 1, c = 1.2$ 非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 势场中传播时, 位置和动量的期望值随时间的演化图

初始相干态 $|\alpha_0\rangle$, 形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.5$.

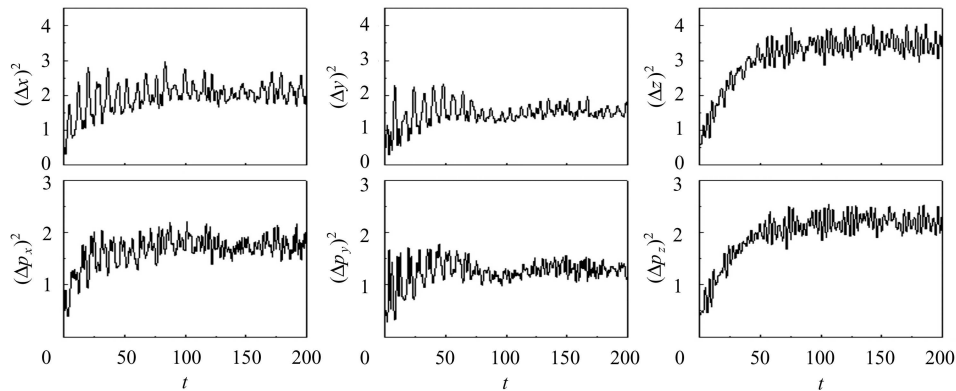


图7 初始态为三维不对称谐振子相干态的状态在 $a = b = 1, c = 1.2$ 非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 势场中传播时, 位置和动量的期望值随时间的演化图

初始相干态 $|\alpha_0\rangle$, 形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.5$.

4 结论

在长椭球形的谐振子势附加轴对称八极形变的体系中, 系统在较大形变强度下才发生混沌运动, 如图2(b)所示. 而本文所考察的一个长椭球形的谐振子势附加了非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 后在较小的形变强度下系统就可以发生显著的混沌运动. 在经典上, 随着形变强度的增加, 等势能面上出现不稳定的负参量区域, 这是体系发生混沌运动的主要原因. 而量子体

系存在的能级免交叉现象和体系相干态波包的传播特征, 则体现了较好的量子经典对应. 其他长椭球形谐振子附加非轴对称八极形变 $Y_{32} + Y_{3-2}$ 的情况, 同样可以得到相同的结果. 这表明核子运动所处的平均场趋向非轴对称时, 可以加剧系统的非线性, 粒子更容易出现混沌运动. 而附加非轴对称八极形变则是长椭球形核子发生混沌运动的一种简单的机制. 至于轴对称与非轴对称八极形变体系动力学特征的进一步对比, 将另行讨论.

参考文献(References)

- 1 GU Jian-Zhong, WU Xi-Zhen et al. Nucl. Phys., 1997, **A625**: 621
ZHOU X R et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2002, **26**: 1125 (in Chinese)
(周先荣等. 高能物理与核物理, 2002, **26**: 1125)

- 2 LI Junq-Qing, HUANG Wei-Qi. Phys. Rev., 1994, **C50**(3): 1632
- 3 Heiss W D, Nazmitdinov R G et al. Phys. Rev. Lett., 1994, **72**(15): 2351
- 4 Heiss W D, Nazmitdinov R G et al. Phys. Rev., 1995, **B51**(3): 1874

- 5 LI Jun-Qing. Phys. Rev. Lett., 1997, **79**(12): 2387
- 6 LI Jun-Qing. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1997, **21**(9): 818 (in Chinese)
(李君清. 高能物理与核物理, 1997, **21**(9): 818)
- 7 Heiss W D, Lynch R A et al. Phys. Rev., 1999, **C60**(3): 034303
- 8 LI Jun-Qing, ZHU Jie-Ding et al. Phys. Rev., 1995, **B52**(9): 6464
- 9 Wolf A et al. Physica, 1985, **D16**: 310
- 10 LIU Fang, LI Xi-Guo et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(11): 1108 (in Chinese)
(刘芳, 李希国等. 高能物理与核物理, 1999, **23**(11): 1108)
- 11 GU Yan. Quantum Chaos. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1996 (in Chinese)
(顾雁. 量子混沌. 上海: 上海科技教育出版社, 1996)
- 12 LIU Fang, LI Jun-Qing et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(4): 331 (in Chinese)
(刘芳, 李君清等. 高能物理与核物理, 2000, **24**(4): 331)
- 13 Blaizot Jean-Paul. Quantum Theory of Finite Systems. Massachusetts Institute of Technology, 1986
- 14 LIU Fang, LI Jun-Qing et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2002, **26**(6): 607 (in Chinese)
(刘芳, 李君清等. 高能物理与核物理, 2002, **26**(6): 607)

Chaotic Motion of Single Particle in the Potential of Nonaxial Octupole Deformation^{*}

JIN Hua^{1,2} ZHENG Ren-Rong¹ ZHU Shun-Quan³ LI Jun-Qing⁴

1 (Department of Physics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

2 (Department of Arts and Science, Shanghai Dianji University, Shanghai 200240, China)

3 (Department of Computer and Electric Technology, Shanghai Business School, Shanghai 201400, China)

4 (Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

Abstract The single particle's chaotic motion in the potential of a prolate harmonic oscillator plus $Y_{32}+Y_{3-2}$ non-axial octupole deformation was systematically analyzed from the classical and quantum-mechanical viewpoint. The classical trajectory stability analysis showed that the characteristics of the potential surface would be important for the particle's motion. By investigating the phenomena of avoided level crossing in the system and the evolution of the coherent initial state, it is found that the non-axial feature of octupole deformation potential can make the single particle to go to chaos easier.

Key words non-axial octupole deformation $Y_{32}+Y_{3-2}$, avoided level crossing, coherent state, chaotic motion

Received 8 May 2005

*Supported by NSFC (10375001, 10235020), China Shanghai Foundation for Developing Science and Technology in Universities (03DZ03) and Third Phase Foundation of Theoretical Center in China Lanzhou National Key Laboratory