第 30 卷 第 6 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 30, No. 6
2006 年 6 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jun., 2006

均匀恒定磁场中带电狄拉克粒子的超对称性和本征能谱*

贾文志[1]　王顺金[1,2;1)]

1 (四川大学物理学院理论物理中心　成都　610064)
2 (兰州重离子加速器国家实验室核理论中心　兰州　730000)

摘要　基于狄拉克方程中γ矩阵有结构、可分解的观点, 把γ矩阵分解为自旋空间和正反粒子空间的算子的直积, 确定了均匀恒定磁场中带电狄拉克粒子的哈密顿量的动力学超对称性和可互易的完备的物理量算子集及其量子数集, 求得了用上述量子数完全集标志的该哈密顿量的解析的本征解, 讨论了系统的哈密顿$\hat{H}$的动力学超对称性中自旋对称性和正反粒子对称性破缺的不同情况, 确定了自旋剩余超对称性导致的自旋简并子空间的超对称性变换群算子.

关键词　γ矩阵分解　动力学超对称性　动力学超对称性破缺　自旋空间剩余超对称性

1　引言

均匀恒定磁场中的带电狄拉克粒子的对称性和能谱的研究[1—4], 对于研究中子星磁场产生机理[5, 6]、量子霍尔效应[7]中的自旋效应和相对论效应, 以及超对称量子力学[8]等问题均具有重要意义. 本文基于狄拉克方程中的γ矩阵有结构、可分解的观点, 把γ矩阵分解为自旋空间和正反粒子空间的算子的直积[9—11], 求解了均匀恒定磁场中的带电粒子的狄拉克方程, 确定了其完备量子数集, 得到了解析解, 找到了超对称群算子.

考虑包含均匀磁场$\boldsymbol{B}=(0,0,B)$的带电Fermi子所满足的Dirac方程

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\hat{\boldsymbol{P}}-e\boldsymbol{A})+\beta m]\Psi(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{i}\partial_t\Psi(\boldsymbol{r},t), \tag{1}$$

系统的Hamilton量为

$$\hat{H}=[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\hat{\boldsymbol{P}}-e\boldsymbol{A})+\beta m], \tag{2}$$

为了简单, 取其中的矢势$\boldsymbol{A}$取为$(0,Bx,0)$, 以后再讨论不同规范下的解的性质. $\boldsymbol{\alpha}$, β矩阵取通常表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}. \tag{3}$$

设方程的定态解为$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\Psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E't}$, 代入(1)可得本征方程

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\hat{\boldsymbol{P}}-e\boldsymbol{A})+\beta m]\Psi(\boldsymbol{r})=E'\Psi(\boldsymbol{r}), \tag{4}$$

其中E'是Dirac粒子的哈密顿量$\hat{H}$的本征值, 它的绝对值才是粒子的能量.

2　γ矩阵空间的分解和坐标–自旋空间的超对称性解

按照γ矩阵空间有结构、可分解的观点[5—7], 引进自旋空间$su(2)$算子–泡里矩阵σ_i和正反粒子空间$su(2)$算子–泡里矩阵τ_i, 则$\boldsymbol{\alpha}$和β矩阵可分解为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\sigma}\otimes\tau_1,\quad \beta=\begin{pmatrix}I_\sigma&0\\0&-I_\sigma\end{pmatrix}=I_\sigma\otimes\tau_3, \tag{5}$$

2005 – 12 – 03 收稿
* 国家自然科学基金(10375039, 90503008), 教育部博士点基金和中国科学院兰州重离子加速器国家实验室核理论中心基金资助
1) E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn

系统的哈密顿可改写为

$$\begin{aligned}\hat{H}=&[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\hat{\boldsymbol{P}}-e\boldsymbol{A})+\beta m]=\\&\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{P}}-e\boldsymbol{A})\otimes\tau_1+mI_\sigma\otimes\tau_3=\\&\left[\sigma_1\hat{P}_x+\sigma_2(\hat{P}_y-eBx)+\sigma_3\hat{P}_z\right]\otimes\tau_1+mI_\sigma\otimes\tau_3.\end{aligned}\tag{6}$$

对于上述规范, 坐标空间和自旋空间的守恒量是 $\hat{P}_y$, $\hat{P}_z$ 和 $\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{P}}-e\boldsymbol{A})$, 设其共同本征解为

$$f_{p_yp_z^{S'}}(\boldsymbol{r})=\exp(\mathrm{i}P_yy+\mathrm{i}P_zz)\chi_{S'}(x),\tag{7}$$

本征方程为

$$\hat{P}_yf_{p_yp_z^{S'}}(\boldsymbol{r})=P_yf_{p_yp_z^{S'}}(\boldsymbol{r})\tag{8a}$$

$$\hat{P}_zf_{p_yp_z^{S'}}(\boldsymbol{r})=P_zf_{p_yp_z^{S'}}(\boldsymbol{r}),\tag{8b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{P}}-e\boldsymbol{A})f_{p_yp_z^{S'}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'f_{p_yp_z^{S'}}(\boldsymbol{r})=S'f_{p_yp_zS'}(\boldsymbol{r}),\tag{8c}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'=\sigma_1\hat{P}_x+\sigma_2(P_y-eBx)+\sigma_3P_z,\tag{8d}$$

其中 P_y, P_z 已取为本征值. (8c) 式是自旋二分量函数 $\chi_{S'}(x)$ 的本征方程, 可写为

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\chi_{S'}(x)=S'\chi_{S'}(x),\tag{9}$$

由此定出二分量函数 $\chi_{S'}(x)$ 的具体形式. (9) 式是自旋与坐标 x 空间的超对称本征方程. 设

$$\chi_{S'}(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\w(x)\end{pmatrix},\tag{10}$$

则(9)式具体写出为

$$\begin{pmatrix}P_z&\xi_+\\\xi_-&-P_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(x)\\w(x)\end{pmatrix}=S'\begin{pmatrix}u(x)\\w(x)\end{pmatrix},\tag{11a}$$

$$\begin{aligned}&P_zu(x)+\xi_+w(x)=S'u(x)\\&\xi_-(x)u(x)-P_zw(x)=S'w(x)\end{aligned},\tag{11b}$$

其中 $\xi_\pm=-\mathrm{i}\partial_x\mp\mathrm{i}(P_y-eBx)$. (11a) 式的超对称性表现为: 2×2 矩阵代表自旋为 1/2 的费米子自由度, 而坐标 x 及其微分代表玻色子自由度, 后者出现在前者的矩阵元中导致超矩阵, 表示费米子和玻色子两种自由度的耦合. 下面将看到, 这种特殊的耦合导致超对称性和由此而来的简并.

引进坐标 x 方向原点位于 $\dfrac{p_y}{eB}$ 的一维谐振子的正交归一化本征解

$$\begin{aligned}I_\nu(x)\;=&\;\left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^\nu\nu!}}\exp\left(-\frac{1}{2}eB\left(x-\frac{P_y}{eB}\right)^2\right)\times\\&H_\nu\left(\sqrt{eB}\left(x-\frac{P_y}{eB}\right)\right),\quad(\nu=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{12}$$

其中 H_ν 是 Hermite 多项式. $I_\nu(x)$ 满足正交归一条件

$$\int\mathrm{d}xI_\mu(x)I_\nu(x)=\delta_{\mu\nu}\tag{13a}$$

和完备性条件

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}I_\nu(x)I_\nu(x')=\delta(x-x').\tag{13b}$$

利用递推公式

$$\begin{aligned}&\xi_+I_\nu(x)=\mathrm{i}\sqrt{2(\nu+1)eB}I_{\nu+1}(x),\\&\xi_-I_\nu(x)=-\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}I_{\nu-1}(x),\end{aligned}\tag{14}$$

可证方程(11)式的正交归一化本征解为 $\chi_{\rho\nu}(x)$, 其具体形式为

$$\chi_{\rho\nu}(x)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{P_z+\rho S}{2\rho S}}\begin{pmatrix}I_\nu(x)\\-\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+\rho S}I_{\nu-1}(x)\end{pmatrix},\tag{15}$$

它满足本征方程

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\chi_{\rho\nu}(x)=S'_\nu\chi_{\rho\nu}(x),\tag{16}$$

其本征值为

$$S'_\nu=\rho S_\nu(P_z),\quad\rho=\pm1,\quad S_\nu(P_z)=\sqrt{P_z^2+2\nu eB},\tag{17}$$

ρ 是自旋在局域动量 $\boldsymbol{P}'$ 方向的投影–局域螺旋性量子数 (是自由 Dirac 粒子的螺旋性量子数的推广), $S_\nu(p_z)$ (以下为表述方便, 简记为 S) 是考虑了 z 方向动量的贡献和 z 方向自旋–磁矩的 Zeeman 效应的贡献后在 x 方向的谐振运动的能量量子数. 构造上述解时, 用到由方程(11b) 得到的下式

$$W_\nu(x)=\frac{\xi_-}{P_z+\rho S}I_\nu(x)=\frac{-\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+\rho S}I_{\nu-1}(x).\tag{18}$$

具体写出 $\chi_{\rho\nu}(P_z,x)$ 为

1) 右旋解

$$\begin{aligned}\rho\;&=\;+1,\\\chi_{+\nu}\;&=\;\mathrm{i}\sqrt{\frac{P_z+S}{2S}}\begin{pmatrix}I_\nu(x)\\-\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_{\nu-1}(x)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{19a}$$

2) 左旋解

$$\begin{aligned}\rho\;&=\;-1,\\\chi_{-\nu}\;&=\;\mathrm{i}\sqrt{\frac{P_z+S}{2S}}\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_\nu(x)\\-I_{\nu-1}(x)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{19b}$$

3 正反粒子空间的本征解和系统总的本征波函数

该系统的哈密顿量 $\hat{H}$ 还有正反粒子 τ 空间的自由度. 设系统总的波函数为

$$\Psi_{p_y p_z \rho\nu\alpha} = \exp(\mathrm{i}P_y y + \mathrm{i}P_z z)\chi_{\rho\nu}(x)\tilde{\upsilon}_\alpha(\tau), \tag{20}$$

其中 $\tilde{\upsilon}_\alpha(\tau)$ 是正反粒子空间的波函数. 把(20)式代入 Dirac 方程(4), 得到

$$\hat{H}_\tau \tilde{\upsilon}_\alpha = E_\nu \tilde{\tau}_3 \tilde{\upsilon}_\alpha = E_{\alpha\nu}\tilde{\upsilon}_\alpha, \quad E_{\alpha\nu} = \alpha E_\nu, \tag{21}$$

其中

$$\hat{H}_\tau = \rho S\tau_1 + m\tau_3 = \begin{pmatrix} m & \rho S \\ \rho S & -m \end{pmatrix} = E_\nu \tilde{\tau}_3 = E_\nu \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$E_\nu = \sqrt{m^2+S^2} = \sqrt{m^2+P_z^2+2\nu eB}, \tag{23a}$$

$$\tilde{\tau}_3 = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\theta\tau_2}\tau_3 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\theta\tau_2}, \tag{23b}$$

$$\cos\theta = \frac{m}{E_\nu}, \quad \sin\theta = \frac{S}{E_\nu}. \tag{23c}$$

$\alpha=\pm1$ 是 $\tilde{\tau}_3$ 的本征值–正反粒子量子数(见下面的计算与讨论). 先求 τ_3 的本征解, 在其对角表象中, 其本征态 υ_α 为

$$\upsilon_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \upsilon_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

它们满足本征方程

$$\tau_3 \upsilon_\alpha = \alpha\upsilon_\alpha, \tag{25a}$$

$$\alpha = \pm 1. \tag{25b}$$

从(25a)式经幺正变换可得

$$\tilde{\tau}_3\tilde{\upsilon}_\alpha = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\theta\tau_2}\tau_3\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\theta\tau_2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\theta\tau_2}\upsilon_\alpha = \alpha\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\theta\tau_2}\upsilon_\alpha = \alpha\tilde{\upsilon}_\alpha, \tag{26a}$$

即

$$\tilde{\tau}_3\tilde{\upsilon}_\alpha = \alpha\tilde{\upsilon}_\alpha, \tag{26b}$$

其中

$$\tilde{\upsilon}_\alpha = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\theta\tau_2}\upsilon_\alpha. \tag{27}$$

由于

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\theta\tau_2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\rho\sin\frac{\theta}{2} \\ \rho\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\rho S}{E+m} \\ \frac{\rho S}{E+m} & 1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

从(24), (27)和(28)式可得 $\tilde{\tau}_3$ 的本征态 $\tilde{\upsilon}_\alpha$ 为

$$\tilde{\upsilon}_+ = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho S}{E+m} \end{pmatrix}, \ \tilde{\upsilon}_- = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}\begin{pmatrix} -\frac{\rho S}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

由此, 可以得到均匀磁场中带电的Dirac粒子的本征方程(4)的解的完备集(其中 α 为正反粒子量子数, ρ 为局域螺旋性量子数. 为简化下标令 $E=E_\nu$):

1) 粒子解: 正反粒子量子数和哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值分别为 $\alpha=+1$, $E'=\alpha E=+E$.

右旋粒子解: $\rho=+1$, $S'=S$

$$\Psi_1 = N_\nu \begin{pmatrix} I_\nu(x) \\ \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_{\nu-1}(x) \\ \frac{S}{E+m}I_\nu(x) \\ -\frac{S}{E+m}\frac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_{\nu-1}(x) \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et} = u_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et}, \tag{30a}$$

左旋粒子解: $\rho=-1$, $S'=-S$

$$\Psi_2 = N_\nu \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_\nu(x) \\ -I_{\nu-1}(x) \\ -\frac{S}{E+m}\frac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_\nu(x) \\ \frac{S}{E+m}I_{\nu-1}(x) \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et} = u_2(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et}; \tag{30b}$$

2) 反粒子解: 正反粒子量子数和哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值分别为 $\alpha=-1$, $E'=\alpha E=-E$.

右反粒子旋解: $\rho=+1,\ S'=S$

$$\Psi_3 = N_\nu \begin{pmatrix} -\dfrac{S}{E+m}I_\nu(x) \\ \dfrac{S}{E+m}\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_{\nu-1}(x) \\ I_\nu(x) \\ \dfrac{-\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_{\nu-1}(x) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z+\mathrm{i}Et} = v_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z+\mathrm{i}Et}, \tag{30c}$$

左旋反粒子解: $\rho=-1,\ S'=-S$

$$\Psi_4 = N_\nu \begin{pmatrix} \dfrac{S}{E+m}\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_\nu(x) \\ -\dfrac{S}{E+m}I_{\nu-1}(x) \\ \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{2\nu eB}}{P_z+S}I_\nu(x) \\ -I_{\nu-1}(x) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z+\mathrm{i}Et} = v_2(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z+\mathrm{i}Et}; \tag{30d}$$

其中 $u_i,\ v_i(i=1,2)$ 是波函数的旋量部分, 归一化因子为

$$N_\nu = \mathrm{i}\sqrt{\frac{(E+m)(S+P_z)}{4ES}}. \tag{30e}$$

由上述解的完全集可见, 均匀磁场中的带电Dirac粒子的能量 $E=|E'|$ 对于局域螺旋性量子数 ρ 和正反粒子量子数 α 是简并的. 这两种简并与该系统的两种超对称性相对应: ρ 对应着来源于自旋自由度的 $su_\sigma(2)$ 对称性, α 对应着来源于正反粒子自由度的 $su_\tau(2)$ 对称性. 上述两种 $su(2)$ 对称性都不是纯自旋空间或纯正反粒子空间的对称性, 而是在把玻色型坐标 $\boldsymbol{r}$ 空间、费米型自旋 $\boldsymbol{\sigma}$ 空间和正反粒子 $\boldsymbol{\tau}$ 空间耦合在一起的超空间中的对称性. 上述三类自由度因特殊耦合而形成超空间的对称性的原因是动力学的: 这是由于系统的哈密顿量把三类自由度耦合起来了. 这两种超空间的 $su(2)$ 对称性的表现是: 它们的 $su(2)$ 对称性的群元和生成元算子只能在超空间中写出来, 这些算子包含了玻色型坐标自由度 $\boldsymbol{r}$ 及其微分、费米型自旋自由度 $\boldsymbol{\sigma}$ 和正反粒子自由度 $\boldsymbol{\tau}$.

值得指出的是, 上述超空间的两种 $su(2)$ 超对称性导致的能量本征态的简并, 是对粒子的哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值的绝对值 $E=|E'|$ 而言的, 即对哈密顿量的平方而言的. 对于哈密顿量 $\hat{H}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\otimes\tau_1+mI_\sigma\otimes\tau_3$ 本身及其本征值而言, 这两种超空间的 $su(2)$ 超对称性却出现了动力学对称性破缺: 对于与自旋相关的 $su_\sigma(2)$ 超对称性而言, 动力学对称性破缺到局域螺旋性的 $u(1)$ 算子 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\otimes\tau_1+mI_\sigma\otimes\tau_3$; 对于与正反粒子自由度相关的 $su_\tau(2)$ 对称性而言, 动力学对称性破缺到 $u(1)$ 算子 $I_\sigma\otimes(\rho S\tau_1+m\tau_3)=E_\nu I_\sigma\otimes\tilde{\tau}_3$. 具体地说, 对于正反粒子自由度的 $u(1)$ 算子 $I_\sigma\otimes\tilde{\tau}_3$ 而言, 分别在正粒子和反粒子的子空间, 不同局域螺旋性的两个态对 $\hat{H}$ 的本征值才是简并的; 对于自旋自由度的 $u(1)$ 算子 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\otimes\tau_1+mI_\sigma\otimes\tau_3$ 而言, 每一个螺旋性 ρ 确定的态空间都存在正反粒子空间对称性的破缺, $\tilde{\tau}_3$ 量子数不同的两个正反粒子态的哈密顿量的本征值是不同的. 因而, 对哈密顿量 $\hat{H}$ 及其本征值而言, 正反粒子空间对称性破缺是完全的(即 $\tilde{\tau}_3$ 量子数不同的两个正反粒子态的哈密顿量的本征值也不同的), 而自旋空间对称性破缺是部分的、不完全的(分别在正粒子或反粒子子空间中, 不同局域螺旋性的两个态的 $\hat{H}$ 的本征值仍然是相同的、简并的). 上述对称性破缺的复杂性, 是由于与超对称性有关的各种自由度的耦合造成的. 对于这一新颖、重要而有趣的问题, 我们将另文作进一步的详细的讨论.

4　自旋自由度的剩余对称性和本征解的自旋态不确定性

从上节的本征解和对这些解的简并性质的讨论可知, 在粒子子空间和反粒子子空间, 与自旋有关的自由度对于哈密顿量的本征值仍然存在简并, 具有相同正反粒子量子数 α 而自旋量子数 ρ 不同的两种态的任意线性组合, 仍然是哈密顿量的本征解并且具有相同的 $\hat{H}$ 的本征值. 这表明系统的哈密顿量 $\hat{H}$ 在粒子子空间和反粒子子空间分别存在与自旋有关的 $su_\sigma(2)$ 对称性. 因此, 在以往的文献中, 均匀磁场中带电Dirac粒子的本征方程具有各种不同的本征解, 它们的区别仅在于自旋量子态的描述不同, 就象氢原子的量子态中的磁量子数可以在不同方向确定, 彼此可以用一个幺正变换联系起来, 只不过前者用超空间的幺正变换联系起来, 后者用 $SO(3)$ 转动群联系起来. 本节将讨论这一复杂而有趣的问题.

由于 $\hat{H}$ 存在与自旋有关的 $su_\sigma(2)$ 对称性, 其他量子数 $\{P_y,P_z,\nu,\alpha\}$ 相同, 自旋量子数 ρ 不同的本征态的线性叠加仍然是 $\hat{H}$ 的本征态, 它们与原本征态之间可以用幺正变换联系起来. 它们是自旋量子态用任意方向的局域螺旋性刻画的 $\hat{H}$ 的本征态, 一般可以写为:

对粒子态,

$$\tilde{\Psi}_{1,2} = N_\nu \begin{pmatrix} \hat{U}\chi_{\rho\nu} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'}{E+m}\hat{U}\chi_{\rho\nu} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et} = \tilde{u}_{1,2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et}, \tag{31a}$$

对反粒子态,

$$\tilde{\Psi}_{3,4} = N_\nu \begin{pmatrix} -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'}{E+m}\hat{U}\chi_{\rho\nu} \\ \hat{U}\chi_{\rho\nu} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et} = \tilde{v}_{1,2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et}, \tag{31b}$$

其中$\tilde{u}_{1,2}$, $\tilde{v}_{1,2}$是自旋波函数, $\hat{U}$是引起自旋波函数变化的超空间的幺正变换, 其形式为

$$\hat{U}(\nu,\xi_+,\xi_-) = \begin{pmatrix} 1+(a(\nu)-1)Q & b(\nu)\hat{K}^+ \\ c(\nu)\hat{K} & d(\nu) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

其中Q是一投影算子, 其表达式为$Q=\xi_+\dfrac{1}{\xi_-\xi_+}\xi_-$, 满足等式$Q^2=Q$. $\hat{K}^+=\xi_+\dfrac{-\mathrm{i}}{\sqrt{\xi_-\xi_+}}$和$\hat{K}=\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{\xi_-\xi_+}}\xi_-$构成所谓的半幺正变换(SUT), 满足关系$\hat{K}^+\hat{K}=Q$, $\hat{K}\hat{K}^+=I$[12].

$\hat{U}$的幺正条件

$$\hat{U}\hat{U}^+=\hat{U}^+\hat{U}=I, \tag{33a}$$

要求由常数a, b, c, d组成的矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是幺正的, 即满足:

$$a=d^*,\quad b=-c^*,\quad aa^*+bb^*=cc^*+dd^*=1. \tag{33b}$$

如果选

$$\begin{aligned} a(\nu) &= -d(\nu) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{P_z+S_\nu}{2S_\nu}}, \\ b(\nu) &= -c(\nu) = \sqrt{\frac{\nu eB}{S_\nu(P_z+S_\nu)}}, \end{aligned} \tag{34}$$

这时自旋波函数变为

$$\chi'_+ = \begin{pmatrix} I_\nu(x) \\ 0 \end{pmatrix},\quad \chi'_- = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{\nu-1}(x) \end{pmatrix}, \tag{35}$$

它们是对角表象的σ_3的本征态. 正反粒子的总的本征态变成

$$\Psi'_{1,2} = N_\nu \begin{pmatrix} \chi'_{\rho\nu} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'}{E+m}\chi'_{\rho\nu} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z-\mathrm{i}Et}, \tag{36a}$$

$$\Psi'_{3,4} = N_\nu \begin{pmatrix} -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'}{E+m}\chi'_{\rho\nu} \\ \chi'_{\rho\nu} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}P_y y+\mathrm{i}P_z z+\mathrm{i}Et}, \tag{36b}$$

这正是通常文献中人们在自旋σ_3的本征表象中求得的均匀磁场中带电Dirac粒子的本征方程的本征解. (36a), (36b)是$\hat{H}$的本征态, 但不是σ_3的本征态, 也不是原局域螺旋性算子$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'$的本征态, 而是经幺正变换后的新的局域螺旋性算子$\hat{O}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\hat{O}^+$的本征态, 相当于局域螺旋性算子发生了一个超空间的转动$\hat{O}$(见下面的讨论和(44)式).

一般情况, $\tilde{\Psi}_i$与Ψ_i由幺正变换联系起来

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{1,2} &= \hat{O}_+(\nu,\xi_+,\xi_-)\Psi_{1,2}, \\ \tilde{\Psi}_{3,4} &= \hat{O}_-(\nu,\xi_+,\xi_-)\Psi_{3,4}, \end{aligned} \tag{37}$$

$\hat{O}_+(\nu,\xi_+,\xi_-)$和$\hat{O}_-(\nu,\xi_+,\xi_-)$满足子空间$\nu$的幺正条件

$$\hat{O}_+(\nu,\xi_+,\xi_-)\hat{O}_+(\nu,\xi_+,\xi_-)^+ = I, \tag{38a}$$

$$\hat{O}_-(\nu,\xi_+,\xi_-)\hat{O}_-(\nu,\xi_+,\xi_-)^- = I. \tag{38b}$$

它们的具体形式为

$$\hat{O}_+(\nu,\xi_+,\xi_-) = \begin{pmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}']^2}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\hat{U}\dfrac{1}{\sqrt{[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}']^2}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}' \end{pmatrix}, \tag{38c}$$

$$\hat{O}_-(\nu,\xi_+,\xi_-) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}']^2}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\hat{U}\dfrac{1}{\sqrt{[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}']^2}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}' & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{pmatrix}. \tag{38d}$$

利用对易关系式

$$\left[\hat{U}, \left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}'\right)^2\right] = 0, \tag{39}$$

可以证明$\hat{O}_+(\nu,\xi_+,\xi_-)$和$\hat{O}_-(\nu,\xi_+,\xi_-)$是哈密顿量$\hat{H}$的对称变换,

$$\hat{O}_\pm(\nu,\xi_+,\xi_-)\hat{H}\hat{O}_\pm^{-1}(\nu,\xi_+,\xi_-) = \hat{H}. \tag{40}$$

引进正反粒子空间的投影算子

$$P_+(\nu) = \sum_{i=1,2} |u_i(\nu)\rangle\langle u_i(\nu)|, \tag{41a}$$

$$P_-(\nu) = \sum_{i=1,2} |v_i(\nu)\rangle\langle v_i(\nu)|, \tag{41b}$$

各个子空间ν的投影算子之间满足幂等和正交条件

$$\begin{aligned} P_\pm(\nu)P_\pm(\nu') &= P_\pm(\nu)\delta_{\nu\nu'} \\ P_+(\nu)P_-(\nu') &= 0 \end{aligned}. \tag{42}$$

所有子空间ν的投影算子的直和满足(x,σ,τ)空间的完备性条件

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}[P_+(\nu)+P_-(\nu)]=I, \tag{43}$$

这时, 正反粒子空间的两个幺正变换$\hat{O}_+$和$\hat{O}_-$可以合并成整个超空间的一个幺正变换

$$\hat{O}(\xi_+,\xi_-)=\hat{O}_+ +\hat{O}_- = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\hat{O}_+(\nu,\xi_+,\xi_-)P_+(\nu)+\hat{O}_-(\nu,\xi_+,\xi_-)P_-(\nu)\right], \tag{44}$$

$\tilde{\Psi}_i$和Ψ_i之间的变换关系也可以简化为一个式子

$$\tilde{\Psi}_i=\hat{O}\Psi_i, \quad (i=1,2,3,4). \tag{45a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i(\nu)&=\hat{O}_+(\nu)u_i(\nu),\\ \tilde{v}_i(\nu)&=\hat{O}_-(\nu)v_i(\nu),\end{aligned} \tag{45b}$$

由$\hat{O}_\pm(\nu)$的幺正性(38a), (38b), 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,2}|\tilde{u}_i(\nu)\rangle\langle\tilde{u}_i(\nu)|&=\sum_{i=1,2}|u_i(\nu)\rangle\langle u_i(\nu)|,\\ \sum_{i=1,2}|\tilde{v}_i(\nu)\rangle\langle\tilde{v}_i(\nu)|&=\sum_{i=1,2}|v_i(\nu)\rangle\langle v_i(\nu)|,\end{aligned} \tag{46}$$

利用(41)—(46)式, 可证

$$\begin{aligned}\hat{O}\hat{O}^+=&\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\hat{O}_+(\nu,\xi_+,\xi_-)P_+(\nu)+\hat{O}_-(\nu,\xi_+,\xi_-)P_-(\nu)\right]\times\\ &\sum_{\nu'=0}^{\infty}\left[P_+(\nu')\hat{O}_+^+(\nu',\xi_+,\xi_-)+P_-(\nu')\hat{O}_-^+(\nu',\xi_+,\xi_-)\right]=\\ &\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\hat{O}_+(\nu)P_+(\nu)\hat{O}_+^+(\nu)+\hat{O}_-(\nu)P_-(\nu)\hat{O}_-^+(\nu)\right]=\\ &\sum_{\nu'=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1,2}|\tilde{u}_i(\nu)\rangle\langle\tilde{u}_i(\nu)|+\sum_{i=1,2}|\tilde{v}_i(\nu)\rangle\langle\tilde{v}_i(\nu)|\right)=\\ &\sum_{\nu'=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1,2}|u_i(\nu)\rangle\langle u_i(\nu)|+\sum_{i=1,2}|v_i(\nu)\rangle\langle v_i(\nu)|\right)=\\ &\sum_{\nu=0}^{\infty}[P_+(\nu)+P_-(\nu)]=I.\end{aligned} \tag{47}$$

即

$$\hat{O}\hat{O}^+=I. \tag{48}$$

同理可证

$$\hat{O}^+\hat{O}=I, \tag{49}$$

由(40)式有对易关系式

$$[\hat{H},\hat{O}_\pm(\nu,\xi_+,\xi_-)]=0, \tag{50a}$$

由于在量子数(P_y,P_z,ν)确定的σ-τ量子态子空间, $u_i(\nu)$, $v_i(\nu)$是$\hat{H}$的本征态, 故有

$$[\hat{H},P_\pm(\nu)]=0, \tag{50b}$$

由(50a), (50b)可以证明

$$\left[\hat{H},\hat{O}\right]=0, \tag{51}$$

综上, $\hat{O}$是幺正的, 并且与哈密顿量对易.

5 结论与讨论

基于狄拉克方程中γ矩阵有结构、可分解的观点, 把γ矩阵分解为自旋空间和正反粒子空间的算子的直积, 比较容易地确定了均匀恒定磁场中带电狄拉克粒子的哈密顿量的动力学超对称性和可互易的、完备的物理量算子完全集及其量子数集, 求得了用上述量子数完全集标志的该哈密顿量的解析的本征解, 讨论了系统的哈密顿$\hat{H}$的动力学超对称性破缺的细节(即对自旋自由度和正反粒子自由度的不同破缺情况), 确定了自旋剩余超对称性导致的自旋简并子空间的超对称性变换群算子. 上述结果, 对于研究均匀恒定磁场中的带电狄拉克粒子的基本性质、中子星磁场产生的机理、量子霍尔效应中的自旋效应和相对论效应, 以及超对称量子力学等问题均具有重要的理论意义和实际意义.

参考文献(References)

1 Rabi I I. Z. Phys., 1928, **9**: 507
2 Johnson M H, Lippmann B A. Phys. Rev., 1949, **76**: 828
3 Nieto M M, Taylor P L. Am. J. Phys., 1985, **53**: 234
4 MacDonald A H. Phys. Rev., 1983, **B28**: 2235
5 Chakrabarty S, Bandyopadhyay D, Pal S. Phys. Rev. Lett., 1997, **78**: 2898
6 MAO Guang-Jun, Iwamoto A, LI Zhu-Xia. astro-ph/0109221
7 Hughes R J, Kostelrky V A, Nieto M M. Phys. Rev., **D34**: 1100
8 Cooper F, Khare A, Sukhatme U P. Phys. Rep., 1995, **251**: 267
9 WANG Shun-Jin, ZHOU Shan-Gui, Pauli H C. Review of Nuclear Physics, 2004, **21**(1): 94—97 (in Chinese)
(王顺金, 周善贵, Pauli H C. 原子核物理评论, 2004, **21**(1): 94—97)
10 WANG Shun-Jin. Advanced Quantum Mechanics and Quantum Many Body Theory. Sichuan: Sichuan University Press, 2005. 181—185 (in Chinese)
(王顺金. 高等量子论与量子多体理论. 四川: 四川大学出版社,

2005. 181—185)
11 WANG Shun-Jin, ZHOU Shan-Gui. hep-th/0501250
12 ZHANG Jian-Zu, LI Xin-Zhou, ZHANG Jiu-An et al. Phys. Rev., 1996, **A54**: 5418

Supersymmetry and Eigen Energy Spectrum of a Charged Dirac Particle in a Uniform Constant Magnetic Field*

JIA Wen-Zhi[1] WANG Shun-Jin[1,2;1)]

1 (Center of Theoretical Physics, Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)
2 (Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator, Lanzhou 730000, China)

Abstract Based on the opinion that the γ-matrices in Dirac equation have structure and are decomposable, we decompose the γ-matrices into the direct product of the operators in the spin space and the particle-antiparticle space. By using this method, we attain a complete set of commutative operators, a set of quantum numbers and the correspondingly eigen solutions of the Hamiltonian for a charged Dirac particle moving in a uniform constant magnetic field. In addition, the dynamic supersymmetry of the Hamiltonian is unveiled. Spin symmetry breaking and particle-antiparticle symmetry breaking are discussed, and the supersymmetric group operator of the degenerate spin subspace resulting from the spin residual supersymmetry is found.

Key words decomposability of γ-matrices, dynamic supersymmetry, breaking of dynamic supersymmetry, residual supersymmetry in spin space

Received 3 December 2005
*Supported by National Natural Science Foundation of China (10375039, 90503008), Doctoral Fund of Ministry of Education of China and Center of Theoretical Nuclear Physics and National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou

1) E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn