第 31 卷 第 1 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 31, No. 1
2007 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 2007

带边界条件复标量场的正则量子化*

隆正文[1)] 陈琳

(贵州大学物理系光电子技术及应用实验室 贵阳 550025)

摘要 研究了带边界条件有质量复标量场的量子化. 与把边界条件当作Dirac约束方法不同, 我们在经典解空间研究这个问题, 利用Fadeev-Jackiw(FJ)方法获得所有傅里叶模的对易关系, 避免用Dirac方法而产生的问题.

关键词 正则量子化 Dirac约束 边界条件 傅里叶模

1 引言

有限体积的场理论的研究引起人们的兴趣, 不仅因为它与很多物理问题有密切联系(如凝聚态物理中的表面效应、腔量子电动力学等), 而且有其自身原因[1], 最近, 它再次引起人们的关注则使由弦理论引发的, 现在人们已经普遍相信当存在反对称的B场时开弦的端点是非对易的[2—5], 从场论的角度看, 问题的实质是有限空间之中的经典场的正则量子化问题, 也就是说, 在进行正则量子化时, 如何处理边界条件, 通常而言, 这些边界条件是场变量和他们的正则动量或者是它们的空间导数的代数方程, 在一些特殊情况下, 还有可能包含场变量和正则动量的时间导数, 这时必须要对标准的经典Poisson括号进行修改, 使修改后的Poisson括号在空间内部和标准的Poisson括号一致, 在边界上能够和边界条件相容, 这样才能自洽地做正则量子化, 边界条件用Dirac语言[6]说就是相空间中的约束[7], 然而, 这种约束和传统的由奇异拉氏量而引起的Dirac约束不同. 传统的Dirac约束源于拉格朗日量的奇异性质, 是在整个空间上都有效的约束, 边界条件只存在边界上. 因此, 由于存在边界条件人们不能自洽地进行正则量子化. 文献[1]中作者将边界条件作为Dirac初级约束, 用Dirac方法分析了两个Toy模型. 然而文献[8, 9]作者发现对一些模型如果将边界条件当作初级Dirac约束, 那么会出现一些问题. 问题之一是用Dirac方法计算得到的第二类约束的链是无穷长的, 问题之二是总Hamiltonian中第二类约束前的拉氏乘子被确定而Dirac的程序却没有截至. 这些都是和最初的Dirac所提供的方法相矛盾的, 还有由于边界条件只在边界上成立, Dirac δ函数或δ函数的导数被引入, 为了得到最终结果, 就必须对δ函数进行正规化, 然而, 不同的正规化选取会有不同的结果, 如何进行正规化又是一个问题.

本文以有质量复标量场在有限空间的量子化为例. 发现可以在经典场的解空间中做量子化. 通过重新定义新变量, 可以使经典解空间中的动力学变量是与时间相关的傅里叶模, 通过通常的正则量子化方法得到傅里叶模之间的Poisson括号, 然后得到了原始的场变量之间的Poisson括号, 正则量子化可以自洽的进行. 我们的方法不需要把约束分为初级约束、次级约束、第一类约束、第二类约束, 以上的一些问题可以避免.

2 模型

我们的模型是有限体积的复标量场, 在不失一般性的情况下, 为了更清楚地表达其主要思想, 仅考虑1+1维的情形, 关于更高维的问题, 只要对此做简单的推广. 作用量可表示为

2006 – 03 – 16 收稿

∗ 国家自然科学基金(10247009), 贵州省优秀青年科技人才基金(20050530), 贵州省省长基金(2005364)和贵州省自然科学基金(20043018)资助

1) E-mail: longshc@hotmail.com

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_0^{\pi}\mathrm{d}x[-g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^+\partial_\nu\phi-m^2\phi^+\phi],\qquad(1)$$

这里 $g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+1,-1)$. 空间变量限制在有限的体积内, $x\in[0,\pi]$. 拉格朗日量为

$$L=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x[-g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^+\partial_\nu\phi-m^2\phi^+\phi],\qquad(2)$$

分别对 $\phi(x,t)$ 和 $\phi^+(x,t)$ 做变分, 得到

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\phi)}\delta(\partial_\nu\phi)+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\phi^+)}\delta(\partial_\nu\phi^+)-m^2\delta(\phi^+\phi)\right]\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_0^{\pi}\mathrm{d}x(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu-m^2)\phi\delta\phi^++\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_0^{\pi}\mathrm{d}x[g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu-m^2)\phi^+\delta\phi+\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\partial_x\phi\delta\phi^+\Big|_0^{\pi}+\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\partial_x\phi^+\delta\phi\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\partial_t\phi\delta\phi^+\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\partial_t\phi^+\delta\phi\Big|_{t_1}^{t_2},\qquad(3)$$

对任意的 $\delta\phi(x,t)$ 和 $\delta\phi^+(x,t)$, 如果上式中6项同时为零, 则作用量变分为零, 前两项为零即为复标量场的K-G方程

$$(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu-m^2)\phi(x,t)=0\,,\qquad(4)$$

$$(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu-m^2)\phi^+(x,t)=0\,,\qquad(5)$$

第五、第六项为初始条件, 而第三、第四项对应边界条件, 作适当组合可得到Dirichlet边界:

$$\delta\phi(x,t)\big|_{x=0,\pi}=0,\quad\delta\phi^+(x,t)\big|_{x=0,\pi}=0,\qquad(6)$$

和Neumann边界:

$$\partial_x\phi(x,t)\big|_{x=0,\pi}=0,\quad\partial_x\phi^+(x,t)\big|_{x=0,\pi}=0.\qquad(7)$$

正则量子化过程是在由场变量 $\phi_i(x,t)$ 及其共轭动量 $\Pi_i(x,t)$ 构成的相空间进行, $\Pi_i(x,t)$ 定义为

$$\Pi_i(x,t)=\frac{\delta S}{\delta\partial_t\phi_i}.\qquad(8)$$

通过勒让德变换可得到哈密顿量:

$$H(\phi_i(x,t),\Pi_i(x,t))=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\Pi_i(x,t)\partial t\phi^i(x,t)-L.\qquad(9)$$

对于复标量场, 共轭动量为

$$\Pi(x,t)=\frac{\delta S}{\delta\partial_t\phi(x,t)}=\partial_t\phi^+(x,t),\qquad(10)$$

$$\Pi^+(x,t)=\frac{\delta S}{\delta\partial_t\phi^+(x,t)}=\partial_t\phi(x,t).\qquad(11)$$

哈密顿量用正则变量表示成

$$H=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x[\Pi(x,t)\partial_t\phi(x,t)+\Pi^+(x,t)\partial_t\phi^+(x,t)]-L=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x[\Pi(x,t)\Pi^+(x,t)+\partial_x\phi(x,t)\partial_x\phi^+(x,t)+m^2\phi^+(x,t)\phi(x,t)].\qquad(12)$$

而正则变量随时间变化用正则方程来表示

$$\partial_t\phi(x,t)=\{\phi(x,t),H\},\quad\partial_t\phi^+(x,t)=\{\phi^+(x,t),H\},\qquad(13)$$

$$\partial_t\Pi(x,t)=\{\Pi(x,t),H\},\ \partial_t\Pi^+(x,t)=\{\Pi^+(x,t),H\},\qquad(14)$$

$\{,\}$ 表示泊松括号, 在求所有的泊松括号后, 标准的正则量子化过程只需要将经典物理量变成算符, 而泊松括号按下面形式换成对易式

$$H(\phi(x,t),\Pi(x,t))\to\hat{H}(\phi(x,t)),\Pi(x,t),\{\,,\,\}\to\frac{1}{i}[,]\ ,\qquad(15)$$

$[,]$ 表示量子对易符号. 由于边界条件的原因, 量子化过程只能在区域内部进行, 在区域内的所有非零泊松括号有

$$\{\phi(x,t),\Pi(x',t)\}_{\mathrm{bulk}}=\delta(x-x'),\qquad(16)$$

$$\{\phi^+(x,t),\Pi^+(x',t)\}_{\mathrm{bulk}}=\delta(x-x'),\qquad(17)$$

其余所有正则变量间的泊松括号均为零. 但是在边界上, 不能直接使用标准正则量子化过程, 因为边界条件可能和基本的泊松括号间是不相洽的. 这个问题在以前的文献[1—3, 10]中讨论过, 为了避免运用Dirac方法引起的一些问题, 用FJ方法[11] 研究这个问题, 并以Dirihlet边界为例说明具体过程, Neumann边界可按照相同的程序进行, 结果与第一种边界是一致的.

3　Dirihlet边界条件

分析Dirihlet边界的复标量场, 首先是找到能够同时满足运动方程(4), (5)和边界条件(6)的经典解, 考虑到复标量场变量的复数性质, 定义

$$\phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x,t)+\mathrm{i}\phi_2(x,t)],\qquad(18)$$

$$\phi^+(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x,t)-\mathrm{i}\phi_2(x,t)],\qquad(19)$$

$\phi_1(x,t)$, $\phi_2(x,t)$ 分别是场变量的实部和虚部. 若将 (18), (19) 代入 (3) 中, 不难发现 $\phi_1(x,t)$ 和 $\phi_2(x,t)$ 满足同样的运动方程, 用新变量表示边界条件

$$\delta\phi_1(x,t)\big|_{x=0,\pi}=0,\quad \delta\phi_2(x,t)\big|_{x=0,\pi}=0, \tag{20}$$

$$\partial_x\phi_1(x,t)\big|_{x=0,\pi}=0,\quad \partial_x\phi_2(x,t)\big|_{x=0,\pi}=0, \tag{21}$$

前者为Dirihlet边界, 后者为Neumann边界. 可以检验, 满足运动方程和Dirichlet边界(20)式的解是

$$\begin{aligned}\phi(x,t) = &\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\{\mathrm{i}[(a_1(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}\sin kx+\\ &a_1(-k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\sin(-kx))-[a_2(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}\sin kx+\\ &a_2(-k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\sin(-kx))]\},\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\phi^+(x,t)=&\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\{\mathrm{i}[(a_1(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}\sin kx+\\ &a_1(-k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\sin(-kx)]+[a_2(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}\sin kx+\\ &a_2(-k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\sin(-kx)]]\},\end{aligned} \tag{23}$$

取自然单位, $c=\hbar=1$, 那么 $\omega_k=\sqrt{m^2+k^2}$. 其中 $a_1(k),a_2(k),a_1(-k),a_2(-k)$ 是傅里叶模(可以解释为谐振子坐标或者动量表象的坐标). 因为 $\phi_1(x,t)$, $\phi_2(x,t)$ 为实数, 于是有

$$a^*(k)=a(-k)\ . \tag{24}$$

利用上面的关系, 重新定义

$$a_1(k,t)=a_1(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}, \tag{25}$$

$$a_1^*(k,t)=a_1^*(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}, \tag{26}$$

$$a_2(k,t)=a_2(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}, \tag{27}$$

$$a_2^*(k,t)=a_2^*(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}. \tag{28}$$

这些含时的傅里叶模可以作为新的动力学变量, 拉格朗日可以变换为新变量的1-形式. 用含时傅里叶模表示的场变量:

$$\begin{aligned}\phi(x,t) = &\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}[\mathrm{i}(a_1(k,t)-a_1^*(k,t))\sin kx-\\ &(a_2(k,t)-a_2^*(k,t))\sin kx],\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\phi^+(x,t) = &\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}[\mathrm{i}(a_1(k,t)-a_1^*(k,t))\sin kx+\\ &(a_2(k,t)-a_2^*(k,t))\sin kx].\end{aligned} \tag{30}$$

与场变量相对应的共轭动量则为

$$\begin{aligned}\Pi(x,t) = &\sum_{k\geqslant 0}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}[(a_1(k,t)+a_1^*(k,t))\sin kx-\\ &\mathrm{i}(a_2(k,t)+a_2^*(k,t))\sin kx],\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\Pi^+(x,t) = &\sum_{k\geqslant 0}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}[(a_1(k,t)+a_1^*(k,t))\sin kx+\\ &\mathrm{i}(a_2(k,t)+a_2^*(k,t))\sin kx].\end{aligned} \tag{32}$$

现在把(29), (30), (31), (32)代入原始拉格朗日量公式(9)中并对空间积分, 则经典解空间连续积分变为离散波矢空间求和, 而基本动力学变量就是傅里叶模. 可以算出相应的哈密顿量:

$$\begin{aligned}H = &\int_0^{\pi}\mathrm{d}x[\Pi(x,t)\Pi^+(x,t)+\partial_x\phi(x,t)\partial_x\phi^+(x,t)+\\ &m^2\phi^+(x,t)\phi(x,t)]=\frac{\pi}{2}\sum_{k\geqslant 0}[a_1(k)a_1^*(k)+\\ &a_1^*(k)a_1(k)+a_2(k)a_2^*(k)+a_2^*(k)a_2(k)]\omega_k.\end{aligned} \tag{33}$$

为了获得傅里叶模的对易关系, 可以使用标准正则量子化方法, 也可以使用FJ方法[11]. 为了使用FJ方法, 需要将拉格朗日量改写成1-形式

$$L=a_n(\xi)\dot{\xi}^n-H\,, \tag{34}$$

ξ^n 代表所有的正则变量, $a_n(\xi)$ 就是相应的1-形式. 如果矩阵

$$f_{mn}=\frac{\partial a_n(\xi)}{\partial\xi^m}-\frac{\partial a_m(\xi)}{\partial\xi^n}\ . \tag{35}$$

可逆, 则可以从其逆矩阵直接得到所有正则变量的泊松括号. 复标量场的1-形式拉格朗日量为

$$\begin{aligned}L = &\int_0^{\pi}\mathrm{d}x[\Pi(x,t)\partial_t\phi(x,t)+\Pi^+(x,t)\partial_t\phi^+(x,t)]-H=\\ &\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\sum_{k\geqslant 0}\{[a_1(k,t)+a_1^*(k,t)][\dot{a}_1(k,t)-\dot{a}_1^*(k,t)]+\\ &[a_2(k,t)+a_2^*(k,t)][\dot{a}_2(k,t)-\dot{a}_2^*(k,t)]\}-H.\end{aligned} \tag{36}$$

从(36)读出所有的正则变量 $\xi^k=\{a_1(k,t)$, $a_1^*(k,t)$, $a_2(k,t)$, $a_2^*(k,t)\}$, 相应1-形式为

$$\begin{aligned}a_k(\xi)=\Big\{&\frac{\mathrm{i}\pi}{2}[a_1(k,t)+a_1^*(k,t)],-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}[a_1(k,t)+a_1^*(k,t)],\\ &\frac{\mathrm{i}\pi}{2}[a_2(k,t)+a_2^*(k,t)],\frac{-\mathrm{i}\pi}{2}[a_2(k,t)+a_2^*(k,t)]\Big\},\end{aligned}$$

计算辛矩阵 f_{kl} 得

$$f_{kl}=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{i}\pi\delta_{kl} & 0 & 0\\ -\mathrm{i}\pi\delta_{kl} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\pi\delta_{kl}\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\pi\delta_{kl} & 0\end{bmatrix}. \tag{37}$$

显然辛矩阵 f_{kl} 是可逆的, 其逆矩阵为

$$f_{kl}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathrm{i}}{\pi}\delta_{kl} & 0 & 0 \\ \frac{-\mathrm{i}}{\pi}\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{i}}{\pi}\delta_{kl} \\ 0 & 0 & \frac{-\mathrm{i}}{\pi}\delta_{kl} & 0 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

根据FJ方法直接从上面的矩阵读出所有新变量的泊松括号, 不为零的泊松括号有

$$\{a_1(k,t),a_1^*(l,t)\}=\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\delta_{kl}\ , \tag{39}$$

$$\{a_2(k,t),a_2^*(l,t)\}=\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\delta_{kl}\ . \tag{40}$$

利用(25), (26), (27), (28)式的定义可以计算傅里叶模的泊松括号:

$$\{a_1(k),a_1^*(l)\}=\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\delta_{kl}\ , \tag{41}$$

$$\{a_2(k),a_2^*(l)\}=\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\delta_{kl}\ . \tag{42}$$

到此已经完成了动量表象中的量子化过程, 利用上面的结果, 很容易计算原始场变量及其共轭动量的泊松括号, 不为零的泊松括号有

$$\{\phi(x,t),\Pi(x',t)\}=\frac{1}{\pi}\sum_{k\neq 0}\sin kx\sin kx'\ , \tag{43}$$

$$\{\phi^+(x,t),\Pi^+(x',t)\}=\frac{1}{\pi}\sum_{k\neq 0}\sin kx\sin kx'\ , \tag{44}$$

表面上看来, 结果与标准的泊松括号还有一定差距, 事实上, (43), (44)右边的无穷级数恰好就是定义 $[0,\pi]$ 区间 $\delta(x-x')$ 的傅里叶展开, 于是我们把结果重新标记为

$$\{\phi(x,t),\Pi(x',t)\}=\delta_{\mathrm{D}}(x-x')\ , \tag{45}$$

$$\{\phi^+(x,t),\Pi^+(x',t)\}=\delta_{\mathrm{D}}(x-x')\ . \tag{46}$$

这里讨论的是Dirihlet边界, 对于Neumann边界, 运动方程的解变为用 $\cos kx$ 展开的级数形式, 可按照相同的程序进行.

4　讨论

文中用FJ方法分析有边界条件的有质量复标量场的量子化, 与无边界条件场不同, 由于边界条件的原因, 无法在整个空间定义泊松括号, 如何处理边界条件是关键. 如果运用Dirac方法, 则需要处理无穷个次级约束. 应用我们的方法可以在经典解空间对这个模型进行量子化. 当我们在经典解空间写出拉格朗日量时, 原来在坐标空间的连续积分转变成波矢空间的求和, 基本动力学变量就是傅里叶模, 且不再有约束存在, 可以进行量子化. 这样处理优点是明显的, 在整个讨论过程中, 无须对约束分为第一类和第二类, 也没有初级约束和次级约束的问题, 避免了利用Dirac方法引起的一些问题. 尽管我们只研究了1+1维的复标量场, 但是可以直接推广到更高维情形.

参考文献(References)

1 Sheikh-Jabbari M M, Shirzad A. Eur. Phys. J., 2001, **C19**: 383

2 CHU C S, Ho P M. Nucl. Phys., 1999, **B550**: 151

3 CHU C S, Ho P M. Nucl. Phys., 2000, **B568**: 447

4 Ardalan F, Arfaei H, Sheikh-Jabbari M M. Nucl. Phys., 2000, **B576**: 578

5 LONG Z W, JING J. Phys. Lett., 2003, **B560**: 128; JING J, LONG Z W. Phys. Rev., 2005, **D72**: 126002

6 Dirac P A M. Lecture Notes on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva University, 1964

7 LONG Z W, LIU B. Europhys. Lett., 2002. **58**: 1; LONG Zheng-Wen, LIU Bo, LI Zi-Ping. HEP & NP, 2003, **27**(10): 866(in Chinese); LONG Zheng-Wen, LI Zi-Ping. HEP & NP, 2004, **28**(2): 134(in Chinese)
(隆正文, 刘波, 李子平. 高能物理与核物理, 2003, **27**(10): 866; 隆正文, 李子平. 高能物理与核物理, 2004, **28**(2): 134)

8 JING Jian. Eur. Phys. J., 2005, **C39**: 123

9 JING Jian. Phys. Rev., 2005, **D71**: 025023

10 Loran F. Phys. Lett., 2002, **B544**: 199

11 Fadeev L D, Jackiw R. Phys. Rev. Lett., 1988, **60**: 1691

Canonical Quantization of Complex Scalarfield Theory with Boundaries*

LONG Zheng-Wen[1] CHEN Lin

(Laboratory for Photoelectric Technology and Application Department of Physics,
Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract Canonical quantizaion of the complex scalar field theory with boundaries is studied. Contrary to the previous discussions where the boundary conditions are taken as primary Dirac constraints, we shall study this problem in the classical solution space. Fadeev-Jackiw method is applied to get the commutation relations among the Fourier modes. Ambiguities in the Dirac method are avoided by using our approach.

Key words canonical quantization, Dirac constraints, boundary conditions, Fourier modes

---

Received 16 March 2006

* Supported by NSFC (10247009), Outstanding Youth Foundation of Guizhou Province (20050530), Foundation of Governor (2005364) and NSF of Guizhou Province of China (20043018)

1) E-mail: longshc@hotmail.com