

磁场中夸克物质的黏滞系数*

周霞¹⁾ 田海俊 郑小平

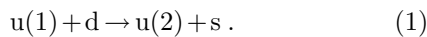
(华中师范大学天体物理研究所 武汉 430079)

摘要 研究了磁场中夸克非轻子弱作用过程的反应率和黏滞系数. 改进了在弱磁场情况下的近似计算方法, 给出了非轻子过程的反应率与夸克物质的体黏滞系数的表达式, 显示出在弱磁场情况下, 黏滞系数的温度依赖关系与零磁场情况下一致, 但黏滞系数的大小依赖磁场的强度.

关键词 磁场 弱作用过程 反应率 黏滞系数

1 引言

Witten 提出由大致等量的 u, d, s 夸克组成的奇异夸克物质 (SQM) 有可能是重子物质的稳态或者亚稳态^[1]之后, 人们普遍相信脉冲星是或部分为奇异星. 在对奇异星的性质和结构的研究中, 如何区分奇异星与中子星是一个重要的研究课题. Andersson^[2] 和 Friedman^[3] 发现的 r 模不稳定性在区分中子星和奇异星方面有重要意义, 然而致密星的 r 模不稳定性与星体物质的黏滞性有密切关系^[4]. 对于中子星来说, 它的黏滞性来自于 β 衰变过程, 普遍认为修改 Urca 过程起重要作用^[5], 当中子星的核密度足够高的时候, 直接 Urca 过程^[6] 或超子^[7] 的影响会变得重要起来, 会提高中子物质的黏滞性. 另一方面, 如果中子星内存在奇异夸克物质或纯粹奇异星存在, 非轻子弱作用过程:



产生的体黏滞是非常重要的^[4]. 以前的许多工作^[8, 9] 讨论了在零磁场情况下的弱作用过程的黏滞性, 认为奇异夸克物质的黏滞性比中子星要大得多. 但是实际上, 研究奇异夸克物质的组分及反应过程的一个不可忽略的参数是磁场. 脉冲星表面都是带有磁场的, 普通射电脉冲星的表面磁场为 10^{11-12}G , 而磁星的表面磁场高达 10^{14-15}G . Shapiro(1983)^[10] 指出, 如果脉冲星的表面磁场为 $B \sim 10^{12-14} \text{G}$, 根据 Virial 定理中子星的内部磁场可以达到 $B \sim 10^{14-18} \text{G}$. 在磁场中, 带

电粒子的回旋运动被量子化到 Landau 能级, 当磁场 $B_m^{(c)} \geq m_i^2 c^3 / (q_i \hbar)$ (由回旋能 $qB/(mc)$ 等于 mc^2 得到, 其中 m_i 和 q_i 分别表示粒子的质量和电量, \hbar , k 和 c 分别表示 Planck 常量、Boltzman 常量和光速) 时, 这个量子化效应就显得十分重要. 但是由于致密夸克物质密度极大 (化学势 $\mu > 300 \text{MeV}$), 最大的 Landau 能级数 $\nu_{\max} = \text{Int} \left(\frac{\mu^2 - m_q^2}{2eB} \right)$ 非常大, 所以可以看成弱场近似. 在弱磁场的情况下计算弱反应过程的反应率的时候, 考虑两个近似条件: (1) 反应的矩阵元受磁场的影响忽略; (2) 粒子运动方向取随机近似. 本文的安排如下: 第二节给出 Dirac 方程在磁场中的解, 第三节计算了非轻子弱相互作用过程在磁场中的反应率, 第四节给出非轻子弱相互作用过程在磁场中的黏滞系数, 结论在第五节中给出.

2 磁场中 Dirac 方程的解

为了求磁场下奇异夸克物质相关反应的矩阵元, 需要求解磁场中 Dirac 方程的精确解. 在奇异星内部, 因为密度很高, 夸克和电子都是相对论性的. 一个质量为 m 的粒子, 在无磁场的情况下, 其哈密顿量可以写为

$$\hat{H} = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m. \quad (2)$$

如果粒子在电磁场中运动, 电磁场由四维矢势 A^μ 表示. 根据最小耦合原理, 在自由的哈密顿量中以

2006 - 04 - 11 收稿

* 国家自然科学基金(10373007, 97303007)资助

1) E-mail: zhoux@phy.cnu.edu.cn

$\hat{p}^\mu - q\hat{A}^\mu$ 代替 \hat{p}^μ , 就可以得到电磁场中粒子的哈密顿量, 其中 q 是带电粒子的电量, 则磁场中的哈密顿量可以写成

$$\hat{H} = \alpha \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + \beta m + q\phi, \quad (3)$$

这里令静电势 $\phi = 0$, 考虑带电粒子在沿 z 轴方向的恒定、均匀的磁场中运动, 选择朗道规范 $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$. 根据对称性选择一个任意形式的波函数

$$\psi(t, \mathbf{x}) = f(x) \exp(-i\varepsilon t + ip_y y + ip_z z), \quad (4)$$

其中 ε 表示粒子的能量. 把方程(4)的波函数代入 Dirac 方程

$$(i\partial t - \hat{H})\psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

可以得到能量的表达式以及朗道规范下磁场中波函数的具体形式. 能量为 $\varepsilon = \sqrt{p_z^2 + m^2 + 2\nu qB}$, 式中 ν 是朗道能级. 它是简并的并且可以用轨道和自旋量子数 l, s 来表示: $\nu = l + \frac{1}{2}(1 \pm s)$ 上式中的 \pm 号分别表示的是对应负电荷和正电荷的情形.

对于电荷为 q 的粒子, 其波函数为

$$\psi_+(t, \mathbf{x}) = \frac{\exp[-i\varepsilon t + ip_y y + ip_z z]}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m)L_y L_z}} \times \begin{pmatrix} (\varepsilon + m)I_{\nu; p_z}(x) \\ 0 \\ p_z I_{\nu; p_z}(x) \\ -i\sqrt{2\nu qB}I_{\nu-1; p_z}(x) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

上式对应的是自旋向上的解, 相应的自旋向下的解为

$$\psi_-(t, \mathbf{x}) = \frac{\exp[-i\varepsilon t + ip_y y + ip_z z]}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m)L_y L_z}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ (\varepsilon + m)I_{\nu-1; p_z}(x) \\ i\sqrt{2\nu qB}I_{\nu; p_z}(x) \\ -p_z I_{\nu-1; p_z}(x) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

在方程(6)和(7)中, L_y 和 L_z 分别是 y 方向和 z 方向的尺度. 在上面的两个方程(6)和(7)中

$$I_{\nu; p_z} = \left(\frac{qB}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}qB\left(x - \frac{p_y}{qB}\right)^2\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\nu\nu!}} H_\nu \left[\sqrt{qB}\left(x - \frac{p_y}{qB}\right)\right], \quad (8)$$

其中 H_ν 是厄米多项式. 为了后面的计算方便和简洁, 这个地方定义一个量:

$$\xi = (qB)^{1/2} \left(x - \frac{p_y}{qB}\right), \quad (9)$$

于是方程(8)可以改写成更为简洁的形式

$$I_{\nu; p_z} = \left(\frac{qB}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\nu\nu!}} H_\nu(\xi). \quad (10)$$

3 弱磁场中的非轻子过程反应率

如果给定反应(1)的矩阵元, 根据^[8, 9]可以给出反应(1)在单位体积内的反应率

$$\Gamma(u_1 d \rightarrow su_2) = \frac{36}{2} \left[\prod_i \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\varepsilon_i} \right] |M_s|^2 S (2\pi)^4 \times \delta^4(P_1 + P_d - P_2 - P_s), \quad (11)$$

其中相空间的积分包括所有的粒子态, $S = f_1 f_d (1 - f_2)(1 - f_s)$ 为统计分布函数, 方程(1)中的夸克分布由费米-狄拉克分布描述

$$f_i(\varepsilon_i) = \left[1 + \exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu_i}{T}\right) \right]^{-1}, \quad i = 1, 2, d, s, \quad (12)$$

其中 μ_i 是粒子的化学势.

考虑弱磁场的情况, 此时, 夸克并没有被极化到最低 Landau 能级. 夸克弱作用过程的反应矩阵元不受磁场影响, 仅考虑 u 夸克的相空间被磁场改变^[11], 这里因为 u 夸克的质量最小, 我们仅记及磁场对它的影响.

对弱作用过程中粒子的初态求平均和末态求和可以得到矩阵元表达式为^[8]

$$|M_s|^2 = 64G_F^2 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c (P_1 \cdot P_d)(P_2 \cdot P_s). \quad (13)$$

这里 $P_i = (\varepsilon_i - \mathbf{p}_i)$ 表示夸克 i 的四动量, $G_F = 1.166 \times 10^{-11} \text{MeV}^{-2}$ 是费米常数, θ_c 表示 Cabibbo 角 ($\cos^2 \theta_c = 0.948$). 我们忽略 u, d 夸克的质量, 然后得到 $\varepsilon_1 = p_1, \varepsilon_2 = p_2, \varepsilon_d = p_d, E_s = (p_s^2 + m_s^2)^{1/2}$. 所以四动量的乘积可以表示为^[8, 9]

$$(P_1 \cdot P_d)(P_2 \cdot P_s) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_d \varepsilon_s (1 - \cos \theta_{1d}) \left(1 - \frac{p_s}{\varepsilon_s} \cos \theta_{2s}\right), \quad (14)$$

其中 θ_{ij} 表示 i 和 j 夸克动量之间的夹角.

在弱磁场中, 考虑 u 夸克的相空间被改变为

$$2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{qB}{(2\pi)^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} (2 - \delta_{\nu,0}) \int dp_z. \quad (15)$$

因此, 弱作用过程的反应率可以写成

$$\Gamma(u_1 d \rightarrow su_2) = \frac{18}{(2\pi)^6} G_F^2 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c (eB)^2 \sum_{\nu_1=0}^{\nu_{\max}} (2 - \delta_{\nu_1,0}) \sum_{\nu_2=0}^{\nu_{\max}} (2 - \delta_{\nu_2,0}) \int p_d^2 dp_d p_s^2 dp_s \int dp_{1z} \int dp_{2z} S \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_d - \varepsilon_2 - \varepsilon_s) I, \quad (16)$$

其中

$$I = \int \left(\prod_i^{d,s} \right) d\Omega_i (1 - \cos\theta_{1d}) \left(1 - \frac{p_s}{\varepsilon_s} \cos\theta_{2s} \right) \times \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s). \quad (17)$$

我们知道, 两个矢量的夹角在球坐标系中可以表示为倾角和方位角的函数:

$$\begin{aligned} \cos\theta_{1d} &= \cos\theta_1 \cos\theta_d + \sin\theta_1 \sin\theta_d \cos(\varphi_1 - \varphi_d), \\ \cos\theta_{2s} &= \cos\theta_2 \cos\theta_s + \sin\theta_2 \sin\theta_s \cos(\varphi_2 - \varphi_s). \end{aligned} \quad (18)$$

Goyal(2001)^[12] 曾计算中子 β 衰变过程中处理过这个积分, 但在那里由于仅仅电子被极化, 质子和中子取静态极限, (15) 式中求和和积分是自然退耦. 而在这里情况不同, 在磁场中, 夸克的倾角 $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ 随着朗道能级 (ν_1, ν_2) 和 z 方向的动量 (p_{1z}, p_{2z}) 的变化而变化. 因此 (16) 式中的积分与求和是耦合在一起的, 无法直接求解. 但是, 既然弱磁场对 u 夸克的运动方向的影响很小, 因此在 (16) 式的积分中假定 u 夸克的运动取向是随机的, 因此作位相平均可以得到

$$2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \longrightarrow \frac{qB}{(2\pi)^3} \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} (2 - \delta_{\nu,0}) \int' dp_z \int' d\Omega, \quad (19)$$

其中 \sum' 和 \int' 表示各自独立的求和和积分, 求和和积分退耦, (16) 式和 (17) 式可以重新写成

$$\begin{aligned} \Gamma(u_1 d \rightarrow su_2) &= \frac{18}{(2\pi)^8} G_F^2 \sin^2\theta_c \cos^2\theta_c (eB)^2 \times \\ &\sum_{\nu_1=0}^{\nu_{1\max}} (2 - \delta_{\nu_1,0}) \sum_{\nu_2=0}^{\nu_{2\max}} (2 - \delta_{\nu_2,0}) \int p_d^2 dp_d p_s^2 dp_s \times \\ &\int dp_{1z} \int dp_{2z} S \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_d - \varepsilon_2 - \varepsilon_s) I', \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$I' = \int \left(\prod_i^{1,2,d,s} \right) d\Omega_i (1 - \cos\theta_{1d}) \left(1 - \frac{p_s}{\varepsilon_s} \cos\theta_{2s} \right) \times \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s). \quad (21)$$

因为 $\mu_i \gg T$, 只有那些费米面附近的粒子才能参加反应. 采用文献 [13,14] 中的方法来完成对 I' 的积分:

$$\delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}), \quad (22)$$

因此可以得到

$$I' = \frac{2^7 \pi^2}{p_{F_1} p_{F_2} p_{F_d} p_{F_s}} \int \frac{dx}{x^2} \left[\prod_i^{1,2,d,s} \sin(p_{F_i} x) + a \sin(p_{F_1} x) \sin(p_{F_d} x) f(p_{F_2} x) f(p_{F_s} x) + \sin(p_{F_2} x) \sin(p_{F_s} x) f(p_{F_1} x) f(p_{F_d} x) + a \prod_i^{1,2,d,s} f(p_{F_i} x) \right], \quad (23)$$

$$I' \equiv \frac{2^7 \pi^2}{p_{F_1} p_{F_2} p_{F_s}} J, \quad (24)$$

其中 $a = \frac{p_{F_s}}{\mu_s}$, $f(p_{F_i} x) = \cos(p_{F_i} x) - \frac{\sin(p_{F_i} x)}{p_{F_i} x}$ 并且积分 J 根据 (23) 式和 (24) 式可以通过数值计算得出结果.

由 d 夸克转化到 s 夸克的净反应率可以写成^[8]

$$\Gamma(d \rightarrow s) = \left[1 - \exp\left(\frac{\mu_d - \mu_s}{T}\right) \right] \Gamma(u_1 d \rightarrow su_2). \quad (25)$$

按照文献 [10,12] 中的方法, 将方程 (20), (21) 和 (24) 代入到 (25) 式可以得到

$$\begin{aligned} \Gamma(d \rightarrow s) &= \frac{3}{2\pi^6} G_F^2 \sin^2\theta_c \cos^2\theta_c (qB)^2 \times \\ &\sum_{\nu_1=0}^{\nu_{1\max}} (2 - \delta_{\nu_1,0}) \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 2\nu_1 qB}} \times \\ &\sum_{\nu_2=0}^{\nu_{2\max}} (2 - \delta_{\nu_2,0}) \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 2\nu_2 qB}} \times \\ &\mu_d^2 \mu_s \Delta\mu (\Delta\mu^2 + 4\pi^2 T^2) J. \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\nu_{i\max} = \text{Int}\left(\frac{\mu_i^2}{2qB}\right), \quad i=1,2, \quad \Delta\mu = \mu_d - \mu_s. \quad (27)$$

当 $B \rightarrow 0$ 时, 求和可以用对 ν 的积分代替, 弱磁场中的结果可以表示为^[13]

$$\begin{aligned} \Gamma(d \rightarrow s) &= \frac{6}{\pi^6} G_F^2 \sin^2\theta_c \cos^2\theta_c \mu_d^2 \mu_s^2 \times \\ &\Delta\mu (\Delta\mu^2 + 4\pi^2 T^2) J, \end{aligned} \quad (28)$$

这正是零磁场中的结果.

4 弱磁场中夸克非轻子弱作用过程的黏滞系数

这里, 主要讨论了在弱磁场中的奇异夸克物质的体黏滞. 为了计算体黏滞, 考虑物质中的一个周期性

振荡, 它引起单位质量的该物质的体积 v 随时间变化

$$v(t) = v_0 + \Delta v \sin(2\pi t/\tau), \quad (29)$$

其中 v_0 是系统处于平衡态时的单位质量体积, Δv 是振荡所引起的单位质量体积变化的振幅, τ 是振荡的周期. 根据 Madsen^[8] 所采用的方法, 可以得到体黏滞的表达式为

$$\zeta = -2 \left(\frac{v_0}{\Delta v} \right) \left(\frac{\tau}{2\pi} \right) \frac{m_s^2}{3\mu_d v \tau} \times \int_0^\tau \left[\int_0^t \frac{dn_d}{dt} \right] \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} \right), \quad (30)$$

其中考虑到 $m_d = 0$, 并且令平衡时 (零时刻) 的化学势 $\mu_s = \mu_d = \mu$. 当 $2\pi T \gg \delta\mu$ 时, 反应率中 $\delta\mu^3$ 项在这样的一个高温极限下的影响可以忽略, 最后可得到体黏滞:

$$\zeta = \frac{\alpha T^2}{\omega^2 + \beta T^4} \left[1 - \frac{1 - e^{-\beta^{1/2} T^2 \tau}}{\omega^2 + \beta T^4} \frac{2\beta^{1/2} T^2}{\tau} \right], \quad (31)$$

其中 $\omega = 2\pi/\tau$,

$$\alpha = \frac{2}{3\pi^4} G_F^2 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c (qB)^2 \mu m_s^4 J \times \sum_{\nu_1=0}^{\nu_{1\max}} (2 - \delta_{\nu_1,0}) \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 2\nu_1 qB}} \times \sum_{\nu_2=0}^{\nu_{2\max}} (2 - \delta_{\nu_2,0}) \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 2\nu_2 qB}}, \quad (32)$$

$$\beta = \frac{4}{\pi^4} G_F^4 \sin^4 \theta_c \cos^4 \theta_c (qB)^4 \frac{\mu^2 [(\mu^2 - m^2)^{1/2} + \mu]^2}{\mu^2 - m^2} \times J^2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\nu_{1\max}} (2 - \delta_{\nu_1,0}) \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 2\nu_1 qB}} \times \sum_{\nu_2=0}^{\nu_{2\max}} (2 - \delta_{\nu_2,0}) \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 2\nu_2 qB}} \right)^2. \quad (33)$$

当 $2eB \ll \mu^2$ 时, 求和将被积分代替:

$$\alpha \rightarrow \alpha(B=0) = \frac{2}{3\pi^4} G_F^4 \sin^4 \theta_c \cos^4 \theta_c \mu^3 m_s^4 J, \quad (34)$$

$$\beta \rightarrow \beta(B=0) = \frac{4}{\pi^4} G_F^4 \sin^4 \theta_c \cos^4 \theta_c \times \frac{\mu^4 [(\mu^2 - m^2)^{1/2} + \mu]^2}{\mu^2 - m^2} J^2. \quad (35)$$

5 结论

我们推导了在弱磁场下, 夸克非轻子弱作用反应率和相应的夸克物质体黏滞系数. 给出了反应率和黏滞系数与磁场和温度的依赖关系. 在弱磁场中, 奇异夸克物质的体黏滞系数对温度的依赖关系与零磁场中的相同, 对磁场的依赖关系仅仅体现在系数 α , β 中, 即黏滞性的大小上. 在更强的磁场中, 考虑夸克物质被极化到最低朗道能级, 得到的相关反应率和黏滞系数, 与磁场的依赖关系会明显增强^[15], 但是在目前所观测到脉冲星体的磁场无法达到夸克被极化到最低朗道能级所需要的, 仅计算的弱磁场中的夸克物质的体黏滞系数对奇异星演化性是有意义的.

参考文献(References)

- 1 Witten E. Phys. Rev., 1984, **D30**: 272
- 2 Andersson N. Astrophys. J., 1998, **708**: 502
- 3 Friedman J L, Morsink S M. Astrophys. J., 1998, **714**: 502
- 4 WANG Q D, LU T. Phys. Lett., 1984, **B148**: 211
- 5 Swayer R F, Soui A M. Astrophys. J., 1979, **859**: 230
- 6 Haensel P, Schaeffer R. Phys. Rev., 1992, **D4708**: 45
- 7 Haensel P, Levenfish K P. Astron. Astrophys., 2000, **1157**: 357
- 8 Madsen J. Phys. Rev., 1993, **D47**: 325
- 9 Heiselberg H. Phys. Scr., 1992, **46**: 485
- 10 Shapiro S L, Teukolsky S A. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars, The physics of Compact Objects. New York: Wiley, 1983
- 11 Chakrabarty S, Bandyopadhyay D, Pal S. Phys. Rev. Lett., 1997, **78**: 2898
- 12 Goyal A, Gupta V K, Goswami K et al. Int. J. Mod. Phys., 2001, **A16**: 347—368
- 13 DAI Zi-Gao, LU Tan. Z. Phys., 1996, **A355**: 415—420
- 14 Iwamoto N. Annals. Phys., 1982, **141**: 1
- 15 LIU Xue-Wen, ZHENG Xiao-Ping, HOU De-Fu. Astropart. Phys., 2005, **92**: 24

Bulk Viscosity of Quark Matter in Magnetic Field^{*}

ZHOU Xia¹⁾ TIAN Hai-Jun ZHENG Xiao-Ping

(Institution of Astrophysics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract The reaction rate of non-leptonic quark weak interaction and the bulk viscosity of quark matter in the magnetic field are investigated. The approximation method for calculating the reaction rate in a weak magnetic field is improved, the results of the reaction rate of non-leptonic process and the bulk viscosity of quark matter are given. It is shown that the relationship between the bulk viscosity and the temperature in the weak magnetic field case is the same as that in the zero magnetic field case, but the magnitude of bulk viscosity is affected by the strength of the magnetic field.

Key words magnetic field, weak interaction, reaction rate, bulk viscosity

Received 11 April 2006

^{*} Supported by National Natural Science Foundation of China (10373007, 97303007)

1) E-mail: zhoux@phy.cnu.edu.cn