第2卷 第1期　　高能物理与核物理　　Vol. 2, No. 1
1978年1月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　January, 1978

研究简报

关于 $SU(2)$ 瞬子方程的一点注记

吴 泳 时　　彭 家 贵
(中国科学院物理研究所)　　(中国科学技术大学)

近来,四维欧氏空间 E^4 中的 $SU(2)$ 瞬子解,即 $SU(2)$ 无源规范场方程的具有有限作用量的自对偶或反自对偶解[1],引起了人们很大的兴趣. 从数学上看,这是一组二阶非线性偏微分方程(无源的杨-Mills 方程)的带有拓扑示性数(第二陈类或 Pontrjagin 类,又叫做 $SU(2)$ 对偶荷或瞬子数)的孤子解. 从物理上看,它对于研究非 Abel 规范理论的真空的结构以及真空隧道效应有极密切的关系[2],并且可能与微扰论的高阶行为有关[3].

关于 $SU(2)$ 瞬子方程及其解的研究,已经取得不少重要的进展. 在资料 [4—7] 中,先后找到对偶荷为任意整数的精确解. 资料 [8—10] 证明了对偶荷 $q = n$ 的瞬子解最多可包含 $(8n - 3)$ 个参数.

杨振宁[11]将自对偶条件在适当的规范(R 规范)下化为三个非线性的类调和方程. 本文将杨方程变形,使已有的解的定解假设(Ansatz)取极简单的形式,从而使已有的解与杨方程的关系更为明显. 此外并试图求得新解.

以下沿用文 [11] 的记号. 引入复坐标

$$\begin{cases}\sqrt{2}\,y = x_1 + ix_2, & \sqrt{2}\,\bar{y} = x_1 - ix_2\\ \sqrt{2}\,z = x_3 - ix_4, & \sqrt{2}\,\bar{z} = x_3 + ix_4\end{cases} \tag{1}$$

代替 E^4 中的直角坐标 $x_\mu(\mu = 1, 2, 3, 4)$. 文 [11] 中证明,取适当的规范——R 规范,自对偶场的 $SU(2)$ 规范势 $\mathbf{b}_\mu$ 在新坐标系下的分量可表为

$$\begin{cases}\varphi\mathbf{b}_y = (i\rho_y, \rho_y, -i\varphi_y), & \varphi\mathbf{b}_{\bar{y}} = (-i\bar{\rho}_{\bar{y}}, \bar{\rho}_{\bar{y}}, i\varphi_{\bar{y}}),\\ \varphi\mathbf{b}_z = (i\rho_z, \rho_z, -i\varphi_z), & \varphi\mathbf{b}_{\bar{z}} = (-i\bar{\rho}_{\bar{z}}, \bar{\rho}_{\bar{z}}, i\varphi_{\bar{z}}),\end{cases} \tag{2}$$

其中 φ、ρ、$\bar{\rho}$为未知函数. 此时自对偶方程为

$$\begin{cases}\varphi(\varphi_{y\bar{y}} + \varphi_{z\bar{z}}) - \varphi_y\varphi_{\bar{y}} - \varphi_z\varphi_{\bar{z}} + \rho_y\bar{\rho}_{\bar{y}} + \rho_z\bar{\rho}_{\bar{z}} = 0\\ \varphi(\rho_{y\bar{y}} + \rho_{z\bar{z}}) - 2\rho_y\varphi_{\bar{y}} - 2\rho_z\varphi_{\bar{z}} = 0\\ \varphi(\bar{\rho}_{y\bar{y}} + \bar{\rho}_{z\bar{z}}) - 2\bar{\rho}_{\bar{y}}\varphi_y - 2\bar{\rho}_{\bar{z}}\varphi_z = 0.\end{cases} \tag{3}$$

在方程(2)和(3)中,φ_y 代表 $\partial\varphi/\partial y$, $\rho_{z\bar{z}}$ 代表 $\partial^2\rho/\partial z\partial\bar{z}$, 等等. 已有的解是满足下列条件的特解:

$$\begin{cases}\rho_y = \varphi_{\bar{z}}, & \rho_z = -\varphi_{\bar{y}},\\ \bar{\rho}_{\bar{y}} = \varphi_z, & \bar{\rho}_{\bar{z}} = -\varphi_y,\\ \varphi_{y\bar{y}} + \varphi_{z\bar{z}} = 0\end{cases} \tag{4}$$

这就是 't Hooft 定解假设在杨方程(3)中所取的形式.

我们注意到自对偶方程组(3)的后两个方程可以写成散度形式:

本文 1977 年 11 月 3 日收到.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\dfrac{1}{\varphi^2}\rho_y\right)+\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{1}{\varphi^2}\rho_z\right)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\varphi^2}\bar{\rho}_{\bar{y}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{\varphi^2}\bar{\rho}_{\bar{z}}\right)=0. \end{cases} \tag{5}$$

由此可知，存在函数 f、$\bar{f}$ 满足

$$\begin{cases} f_{\bar{z}}=-\dfrac{1}{\varphi^2}\rho_y, \quad f_{\bar{y}}=\dfrac{1}{\varphi^2}\rho_z \\ \bar{f}_z=-\dfrac{1}{\varphi^2}\bar{\rho}_{\bar{y}}, \quad \bar{f}_y=\dfrac{1}{\varphi^2}\bar{\rho}_{\bar{z}} \end{cases} \tag{6}$$

将 (6) 代入 (2)，则得

$$\begin{cases} \varphi\mathbf{b}_y=(-i\varphi^2 f_{\bar{z}},\ -\varphi^2 f_{\bar{z}},\ -i\varphi_y) \\ \varphi\mathbf{b}_{\bar{y}}=(i\varphi^2\bar{f}_z,\ -\varphi^2\bar{f}_z,\ i\varphi_{\bar{y}}) \\ \varphi\mathbf{b}_z=(i\varphi^2 f_{\bar{y}},\ \varphi^2 f_{\bar{y}},\ -i\varphi_z) \\ \varphi\mathbf{b}_{\bar{z}}=(-i\varphi^2\bar{f}_y,\ \varphi^2\bar{f}_y,\ i\varphi_{\bar{z}}), \end{cases} \tag{7}$$

我们称由 $(\varphi, f, \bar{f})$ 确定的规范为 $\tilde{R}$ 规范，(7) 式即 $\tilde{R}$ 规范下 $SU(2)$ 规范势的表达式.

在 $\tilde{R}$ 规范下，自对偶方程组 (3) 化为

$$\begin{cases} \varphi(\varphi_{y\bar{y}}+\varphi_{z\bar{z}})-\varphi_y\varphi_{\bar{y}}-\varphi_z\varphi_{\bar{z}}+\varphi^4(f_{\bar{z}}\bar{f}_z+f_{\bar{y}}\bar{f}_y)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\varphi^2 f_{\bar{y}})+\dfrac{\partial}{\partial z}(\varphi^2 f_{\bar{z}})=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{y}}(\varphi^2\bar{f}_y)+\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(\varphi^2\bar{f}_z)=0. \end{cases} \tag{8}$$

方程组 (8) 显然有特解

$$f=\bar{f}=\frac{1}{\varphi}, \qquad \varphi_{y\bar{y}}+\varphi_{z\bar{z}}=0, \tag{9}$$

此即 't Hooft 的定解假设 (4) 在 $\tilde{R}$ 规范下的形式.

下面，我们试图把定解假设 (4) 推广到

$$f=\bar{f}=f(\varphi) \tag{10}$$

的情形.

将 (10) 代入自对偶方程组 (8)，经过一些计算，可得 $f(\varphi)$ 作为 φ 的函数所应满足的方程为

$$(\varphi^2 f')'=(\varphi f')[\varphi^4 f'^2-1], \tag{11}$$

其中一撇表示 f 对 φ 的导数. 令

$$\varphi^2 f'=g, \tag{12}$$

则方程 (11) 化为

$$g'=\frac{1}{\varphi}g(g^2-1), \tag{13}$$

由此得到 $f(\varphi)$ 的一般形式为

$$f(\varphi)=\frac{1}{\varphi}\sqrt{1+C\varphi^2}, \tag{14}$$

其中 C 为任意常数. 由上式及 (7) 式，当 $\varphi\to\lambda\varphi$ (λ 为任意实数) 时，规范势不变. 也

就是说，当常数 C 经受不改变符号的伸缩变换时，规范势不变. 因此，解 (14) 的类型只取决于 C 的符号. 不妨取

$$C = +1, 0, -1. \tag{15}$$

$C = 0$ 的情形，相当于 't Hooft 解 (9). 对于 $C = \pm 1$，分别讨论如下：

(1) $C = 1$ 的情形

再做一次变换，令

$$\varphi = \operatorname{sh} u, \tag{16}$$

则由 (14) 知

$$f = \operatorname{cth} u, \tag{17}$$

代入自对偶方程 (8)，函数 u 必须满足方程

$$u_{y\bar{y}} + u_{z\bar{z}} = 0. \tag{18}$$

(2) $C = -1$ 的情形

可用与上类似的方法得到如下解

$$\begin{cases} \varphi = \sin\theta, & f = \operatorname{ctg}\theta \\ \theta_{y\bar{y}} + \theta_{z\bar{z}} = 0 \end{cases} \tag{19}$$

我们知道，'t Hooft 解乃是取方程 (9) 的如下特解：

$$\varphi = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{(x - a_i)^2}, \tag{20}$$

它在每个奇点 $x_\mu = a_{i\mu}$ 处的奇性，可由适当的规范变换消除. 如果对于方程(18)或(19)，关于函数 u 或 θ 也取形如 (20) 的解，可以证明其奇性不可能用适当的规范变换消除（其作用量为无穷大）.

关于这二组解 (18) 和 (19) 的性质以及自对偶方程的上述变形，有待进一步讨论.

作者曾在 1977 年基本粒子理论暑期座谈会上报告过本文的结果，并与杨振宁教授进行了有益的讨论，在此表示衷心的感谢. 作者感谢王启明同志多次有益的讨论.

参　考　资　料

[1] A. A. Belavin et al., *Phys. Lett.*, **59B** (1975), 85.

[2] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.*, **37** (1976), 8; *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 3432; R. Jackiw & C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, **37** (1976), 172; C. Callan, R. Dashen & D. Gross, *Phys. Lett.*, **63B** (1976), 334.

[3] E. Brézin, J. C. LeGuillou & J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 1558.

[4] E. Witten, *Phys. Rev. Lett.*, **38** (1977), 121.

[5] 彭家贵, Scientia Sinica, **20** (1977), 345.

[6] G. 't Hooft (未发表)

[7] R. Jackiw, C. Nohl & C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 1642.

[8] A. S. Schwarz, *Phys. Lett.*, **67B** (1977), 172.

[9] R. Jackiw & C. Rebbi, *Phys. Lett.*, **67B** (1977), 189.

[10] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin & I. M. Singer, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (*U. S. A.*), **74** (1977), 2662.

[11] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **38** (1977), 1377.

A NOTE ON THE EQUATIONS OF *SU*(2) INSTANTONS

Wu Yong-shi　　Peng Chia-kwei

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)　(*University of Science and Techonology of China*)