第4卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 1
1980年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1980

$2\pi \longrightarrow 2$K的散射和πK的弹性散射

陆景贤
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文利用场流关系和低能定理求得$2\pi \to 2$K低能散射的截面，并利用交叉对称性得到低能πK弹性散射截面和散射长度.

一、引 言

$\pi\pi$相互作用在中能强子物理已经作过不少讨论[1]. 本文利用文献[2]给出的场流关系即把PCAC推广到了K介子并利用低能定理把$\pi\pi \to$ KK的强作用过程和K_{l4}的弱衰变中的赝矢弱流联系起来求得$2\pi \to 2$K的截面. 并在此基础上利用交叉对称性可以得到π-K弹性散射的截面和S波的散射长度.

二、$\pi\pi \to$ KK散射的同位旋分析

由于$\pi\pi \to$ KK是强作用过程，同位旋是守恒的，利用C-G系数得到物理过程的振幅与同位旋振幅的关系：

$$
\begin{aligned}
T(\pi^+\pi^- \to K^+K^-) &= \frac{1}{2}a^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{6}}a^{(0)},\\
T(\pi^+\pi^- \to K^0\bar{K}^0) &= \frac{1}{2}a^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{6}}a^{(0)},\\
T(\pi^0\pi^0 \to K^+K^-) &= -\frac{1}{\sqrt{6}}a^{(0)},\\
T(\pi^0\pi^0 \to K^0\bar{K}^0) &= \frac{1}{\sqrt{6}}a^{(0)},\\
T(\pi^+\pi^0 \to K^+\bar{K}^0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}a^{(1)},\\
T(\pi^-\pi^0 \to K^-K^0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}a^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(1)式中$a^{(0)}$表示同位旋为0部份的振幅，$a^{(1)}$表示同位旋为1部份的振幅.

本文1978年10月6日收到.

从(1)式我们可以看到六个反应道独立的振幅只有两个 $a^{(0)}$ 和 $a^{(1)}$，因此只要求得 $a^{(0)}$ 和 $a^{(1)}$，六个道的振幅也就相应得到.

三、π-π 散射同位旋振幅和截面的计算

从(1)式可以看到我们只要求得 $\pi^0\pi^0\to K^+K^-$ 和 $\pi^+\pi^0\to K^+\bar{K}^0$ 两个物理振幅就可得到同位旋振幅 $a^{(0)}$ 和 $a^{(1)}$.

利用场流关系化简 $\pi\pi\to KK$ 过程的矩阵元

$$
\begin{aligned}
&\langle K(p_1)K(p_2)|S-1|\pi(q_1)\pi(q_2)\rangle \\
&= i\int d^4x f_{p_2}^*(x)\langle k(p_1)|J_K(x)|\pi(q_1)\pi(q_2)\rangle \\
&= i\int d^4x \frac{e^{-ip_2x}}{\sqrt{2p_{20}}}\frac{m_K^2-\Box}{c}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\langle k(p_1)|A_\lambda(x)|\pi(q_1)\pi(q_2)\rangle \\
&= -i\int d^4x \frac{e^{-hp_2x}}{\sqrt{2p_{20}}}\frac{m_K^2-\Box}{c}e^{i(q_1+q_2-p_1)x}\langle K(p_1)|A_\lambda(0)|\pi(q_1)\pi(q_2)\rangle \\
&\quad\times i(q_1+q_2-p_1)_\lambda \\
&= \frac{m_K^2-\Box}{c\sqrt{2p_{20}}}(-p_1+q_1+q_2)_\lambda(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2) \\
&\quad\times\langle K(p_1)|A_\lambda(0)|\pi(q_1)\pi(q_2)\rangle.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(2)式中 q_1, q_2, p_1, p_2 分别是 $\pi_1\pi_2$ 和 k_1k_2 的四动量，c 是 PCAC 的常数(这里将 PCAC 推广到K介子)

$$c=f_Km_K^2,\quad f_K=1.21m\pi^{[3]}.$$

(2)式中 $\langle K(p_1)|A_\lambda(0)|\pi(q_1)\pi(q_2)\rangle$ 恰好是 K_{l4} 中的赝矢矩阵元. 由罗仑兹不变性的分析我们得到(2)的一般表达式为:

$$
\begin{aligned}
&\langle\pi(q_1)\pi(q_2)|A_\lambda(0)|K(p_1)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{8q_{10}q_{20}p_{10}}}\left[\frac{F_1(s,\eta,q^2)}{m_K}(q_1+q_2)_\lambda+\frac{F_2(s,\eta,q^2)}{m_K}(q_1-q_2)_\lambda\right. \\
&\quad\left.+\frac{F_3(s,\eta,q^2)}{m_K}(p_1-q_1-q_2)_\lambda\right].
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(3)式中 F_1, F_2, F_3，是无量纲的形状因子依赖于下面的不变量

$$
\begin{aligned}
s&=-(q_1+q_2)^2,\\
q^2&=(q_1+q_2-p_1)^2=p_2^2,\\
\eta&=-q(q_1-q_2).
\end{aligned}
$$

将(3)式代入(2)并利用低能定理得到 $2\pi\to 2K$ 散射的矩阵元为:

$$
\begin{aligned}
&\langle K(p_1)K(p_2)|s-1|\pi(q_1)\pi(q_2)\rangle \\
&\approx(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)\frac{m_K^2(-p_1+q_1+q_2)_\lambda}{4c\sqrt{p_{10}p_{20}q_{10}q_{20}}}\left[\frac{F_1(s,\eta,q^2)}{m_K}(q_1+q_2)_\lambda\right. \\
&\left.+\frac{F_2(s,\eta,q^2)}{m_K}(q_1-q_2)_\lambda+\frac{F_3(s,\eta,q^2)}{m_K}(p_1-q_1-q_2)_\lambda\right].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

1. $\pi^0\pi^0 \to K^+K^-$ 的低能散射截面和同位旋振幅 $a^{(0)}$ 的计算

(4) 式中 F_1, F_2, F_3 的形状因子原则上可由实验定出，由于目前实验还不能全部定出形状因子，故采用流代数的计算[4]. 对于 $\pi^0\pi^0 \to K^+K^-$ 中所计算对应的 K_{l4} 形状因子为:

$$
\begin{aligned}
&F_1^{00}(s, \eta, q^2) \approx F_1^{00}(0, 0, q^2) = -\frac{m_K^2}{f_\pi}\sqrt{2}\, f_+(q)^2|_{q^2=-m_K^2} = A, \\
&F_2^{00}(s, \eta, q^2) \approx F_2^{00}(0, 0, q^2) = 0, \\
&F_3^{00}(s, \eta, q^2) \approx F_3^{00}(0, 0, q^2) = \frac{-f_K m_K}{2f_\pi^2} = B.
\end{aligned} \tag{5}
$$

经计算得到

$$
\begin{aligned}
A &= -5.43, \\
B &= -2.28.
\end{aligned} \tag{6}
$$

将(5)(6)代入(4)得(下面均在质心系中进行运算)

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{q}|}\frac{m_K^2}{c^2 p_0 q_0}\{A(p_1^2 + p_1\cdot p_2) + B(-p_1^2)\}^2, \tag{7}
$$

$$
\sigma = \frac{m_K^2}{64\pi c^2}\frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{q}|}\frac{1}{E^2}(-2E^2 A + Bm_K^2)^2. \tag{8}
$$

上式中 $|\mathbf{q}|$ 是入射 π 介子动量，$|\mathbf{p}|$ 是出射K介子的动量，E 为入射粒子能量，考虑阈能行为 $|\mathbf{q}| \sim 480\text{MeV}$ $\sigma_{\blacksquare} \approx 2.4\mu b$

由(1)和(7)式可得:

$$
a^{(0)} = -\sqrt{6}\; T(\pi^0\pi^0 \to K^+K^-) = \frac{i(2\pi)^4\sqrt{6}\; m_K}{4c\, p_{10} q_{10}}\{A(p_1^2 + p_1\cdot p_2) + B(-p_1^2)\}. \tag{9}
$$

2. $\pi^+\pi^0 \to K^+\bar{K}^0$ 的低能散射截面和同位旋振幅 $a^{(1)}$ 的计算

由流代数的计算[4]得到对应于 $\pi^+\pi^0 \to K^+\bar{K}^0$ 所对应的 K_{l4} 形状因子为:

$$
\begin{aligned}
&F_1^{+0}(s, \eta, q^2) \approx F_1^{+0}(0, 0, -m_K^2) = 0, \\
&F_2^{+0}(s, \eta, q^2) \approx F_2^{+0}(0, 0, -m_K^2) = \sqrt{2}\,A, \\
&F_3^{+0}(s, \eta, q^2) \approx F_3^{+0}(0, 0, -m_K^2) = \sqrt{2}\; B\,\frac{p_1(q_1 - q_2)}{p_1(q_1 + q_2)}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

将(10)式代入(4)得到

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_K^2|\mathbf{p}|}{256\pi^2c^2|\mathbf{q}|E^2}\left(-2\sqrt{2}\,A|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\theta + \sqrt{2}\;Bm_K^2\frac{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\theta}{E^2}\right)^2, \tag{11}
$$

$$
\sigma = \frac{m_K^2|\mathbf{p}|}{128\pi c^2|\mathbf{q}|E^2}\left(\frac{16}{3}A^2|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2 + \frac{4}{3}B^2m_K^4|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2/E^4 - \frac{16}{3}AB|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2\right)
$$

在阈能时 $|\mathbf{q}| \approx 480\text{MeV}$ 求得 $\sigma_{\blacksquare} \approx 1\mu b$

由(1)和(11)得

$$
a^{(1)} = -\sqrt{2}\;T(\pi^+\pi^0 \to K^+\bar{K}^0) \tag{12}
$$

$$
= \frac{i(2\pi)^4 m_K}{4c\,p_{10}q_{10}}\left(-\sqrt{2}\,A|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\theta + \sqrt{2}\;Bm_K^2\frac{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\theta}{E^2}\right). \tag{13}
$$

由(9)和(13)求得的 $a^{(0)}$ 和 $a^{(1)}$ 则可求出(1)式其他几个道的物理振幅和散射截面.

四、πK 弹 性 散 射

利用物理上的交叉对称性(4)式可以用来计算 πK 弹性散射的截面，并求得低能散射情况下的相应散射长度.

对 πK 弹性散射同样作同位旋分析其物理振幅和同位旋振幅关系如下：

$$
\begin{aligned}
T(K^{\pm}\pi^{\pm}\to K^{\pm}\pi^{\pm}) &= a^{3/2},\\
T(K^{\pm}\pi^{\mp}\to K^{\pm}\pi^{\mp}) &= \frac{1}{3}a^{3/2}+\frac{2}{3}a^{1/2},\\
T(K^{\pm}\pi^{0}\to K^{\pm}\pi^{0}) &= \frac{2}{3}a^{3/2}+\frac{1}{3}a^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

(14)式中 $a^{1/2}$、$a^{3/2}$ 代表同位旋为 1/2 和 3/2 的振幅，只要求得 $a^{1/2}$ 和 $a^{3/2}$ 上述物理过程的振幅也随之得到.

如把 $\pi^+(q_1)+\pi^-(q_2)\to K^+(p_1)+K^-(p_2)$ 作为 S 道则对应的 t 道为 $\pi^+(q_1)+K^-(-p_1)\to\pi^+(-q_2)+K^-(p_2)$. 把 $-p_1$ 记作 q_2'，而 $-q_2$ 记作 p_1' 利用 $\pi^+\pi^-\to K^+K^-$ 振幅表达式并利用交叉对称性即可以得到 $\pi^+K^-\to\pi^+K^-$ 的振幅为

$$
\begin{aligned}
a^{3/2} = \frac{i(2\pi)^4 m_K}{4cq_{10}q_{10}'}\Big\{&\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[Ap_2(q_1-q_2')+\frac{p_1'(q_1-q_2')}{p_1'(q_1+q_2')}Bp_2\cdot(p_1'-q_1-q_2')\Big]\\
&+\frac{1}{\sqrt{6}}\Big[A(p_1'^2+p_1'\cdot p_2)+B(-p_1'^2)\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

同理得到

$$
\begin{aligned}
a^{1/2} &= 3T(\pi^0K^+\to\pi^0K^+)-2T(\pi^+K^-\to\pi^+K^-)\\
&= \frac{-i(2\pi)^4}{4cq_{10}q_{20}'}\Big\{3[A(p_1'^2+p_1'\cdot p_2)+B(-p_1'^2)]-\sqrt{2}\Big[Ap_2(q_1-q_2')\\
&\quad+\frac{Bp_1'(q_1-q_2')}{p_1'(q_1+q_2')}p_2(p_1'-q_1-q_2')\Big]-\frac{2}{\sqrt{6}}[A(p_1'^2+p_1'\cdot p_2)\\
&\quad+B(-p_1'^2)]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

由(15)和(16)我们可以求得 πK 弹性散射中同位旋为 1/2 部份和 3/2 部份的振幅，从而得到一系列的物理过程的振幅.

考虑低能散射时 $|\mathbf{q}|\to 0$，s 分波为主则

$$
\begin{aligned}
\sigma_0^{1/2} \approx \frac{m_K^2}{16\pi c^2}\frac{1}{(m_\pi+m_K)^2}\Big\{&3[A(-m_\pi^2-m_\pi m_K)+Bm_\pi^2]\\
&-\sqrt{2}[A(-m_\pi m_K+m_K^2)+Bm_\pi^2]\\
&-\frac{2}{\sqrt{6}}[A(-m_\pi^2-m_\pi m_K)+Bm_\pi^2]\Big\}^2.
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_0^{1/2}\approx 10\mu b, \tag{17}
$$

$$\sigma_0^{3/2} \approx \frac{m_K^2}{16\pi c^2(m_\pi + m_K)^2}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}[A(-m_\pi m_K + m_K^2) - Bm_K^2]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{6}}[A(-m_\pi^2 - m_\pi m_K) + Bm_\pi^2]\right\}^2,$$

$$\sigma_0^{3/2} \approx 0.47\mu b. \tag{18}$$

由分波近似得 $\sigma_0 \approx 4\pi a_0^2$,

故由(17)、(18)求得

$$a_0^{1/2} \approx 0.1m_\pi^{-1}.$$
$$a_0^{3/2} \approx -0.01m_\pi^{-1}.$$

关于低能 πK 弹性散射有过不少讨论[5]在文献[5]中用色散关系求得 $a_0^{1/2} \approx 0.2m_\pi^{-1}$ $a_0^{3/2} \approx -0.01m_\pi^{-1}$. 由于 π 作靶没有实现，大多数是在一些理论方面进行探讨，本文也是一种理论讨论之一，不过是将场流关系中的 PCAC 推广到K介子的一种尝试，待将来实验工作的发展，进一步对理论工作进行鉴别和讨论.

作者对何祚庥和张肇西同志有益的讨论表示感谢.

参考文献

[1] B. R. Martin, D. Morgan and G. Shaw. "Pion-Pion interaction in particle physics" London, 1976.

[2] 何祚庥、黄涛，物理学报，23(1974)，409；科学通报，21(1976)，35.

[3] R. E. Marshak, Rizaddiv, C. P. Ryan, "Theory of weak interaction in particle physics", New York, Interscience, 1969, p 446; 453.

[4] R. E. Marshak, Rizaddiv, C. P. Ryan, "Theory of weak interaction in particle physics", New York, Interscience, 1969, p 494.

[5] N. Johannesson and L. Sollin, "A Solvable realistic model for low-energy πK scattering", N. C. 43A (1978), 389.

$2\pi \rightarrow 2$K SCATTERING AND πK ELASTIC SCATTERING

Liu Jing-xian

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

Abstract

The $2\pi \rightarrow 2$K low energy scattering cross-section was obtained using the relation between field and current. The low energy πK elastic scattering cross-section and its scattering length were also obtained using cross symmetry.