第4卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 4, No. 2
1980年3月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　March, 1980

秩2紧致单纯李群的不可约表示(II)

孙洪洲
(北京大学)

摘　要

本文分析了 C_2 群无穷小算子的对易关系，发现 C_2 群的10个无穷小算子可以表示为两组相互对易的角动量算符 ν_1, ν_0, ν_{-1}; $\tau_1, \tau_0, \tau_{-1}$，一组秩为 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ 的双不可约张量算符 $U_{\pm 1/2 \pm 1/2}$. 利用 C_2 群无穷小算子的这个性质，我们求出了 C_2 群的所有有限维不可约表示，C_2 群的约化系数等等.

本文给出了在 C_2 群的不可约表示 $(\lambda\mu)$ 中无穷小算子对应的矩阵，从而完全确定了不可约表示 $(\lambda\mu)$ 及其表示空间 $R^{(\lambda\mu)}$. 我们还给出了 C_2 群约化系数标量因子所满足的方程组，对称关系，并给出了 $(\lambda\mu)\otimes(10)$, $(\lambda\mu)\times(01)$, $(\lambda\mu)\otimes(20)$ 约化系数标量因子的代数表达式.

在本文最后，我们定义了 C_2 群的不可约张量算符并证明了相应的 Wigner-Eckart 定理.

一、C_2 群的不可约表示

1. C_2 群的无穷小算子

C_2 群的根图由图1给出，我们取 C_2 群的10个无穷小算子为

$$\nu_1 \equiv X_1 = -\sqrt{3}\ E_2, \qquad \nu_0 \equiv X_2 = \sqrt{3}\ H_1, \qquad \nu_{-1} \equiv X_3 = \sqrt{3}\ E_{-2};$$
$$\tau_1 \equiv X_4 = -\sqrt{3}\ E_4, \qquad \tau_0 \equiv X_5 = \sqrt{3}\ H_2, \qquad \tau_{-1} \equiv X_6 = \sqrt{3}\ E_{-4};$$
$$U_{1/2\,1/2} \equiv X_7 = \sqrt{3}\ E_3, \qquad U_{-1/2\,1/2} \equiv X_8 = \sqrt{3}\ E_{-1},$$
$$U_{1/2\,-1/2} \equiv X_9 = -\sqrt{3}\ E_1, \qquad U_{-1/2\,-1/2} \equiv X_{10} = \sqrt{3}\ E_{-3}. \tag{1.1-1}$$

它们满足以下的对易关系

$$[\nu_0, \nu_{\pm1}] = \pm\nu_{\pm1}, \quad [\nu_1, \nu_{-1}] = -\nu_0;$$
$$[\tau_0, \tau_{\pm1}] = \pm\tau_{\pm1}, \quad [\tau_1, \tau_{-1}] = -\tau_0;$$
$$[\nu_s, \tau_r] = 0; \qquad [\nu_0, U_{p,q}] = pU_{p,q},$$
$$[\tau_0, U_{p,q}] = qU_{p,q},$$
$$[\nu_{\pm1}, U_{p,q}] = \mp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp p\right)\left(\frac{1}{2}\pm p+1\right)\right\}^{1/2} U_{p\pm1,q}$$

本文1978年12月8日收到.

$$[\tau_{\pm1}, U_{p,q}] = \mp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp q\right)\left(\frac{1}{2}\pm q+1\right)\right\}^{1/2} U_{p,q\pm1}. \tag{1.1-2}$$

$U_{p,q}$, $U_{p'q'}$ 间的对易关系可以写为

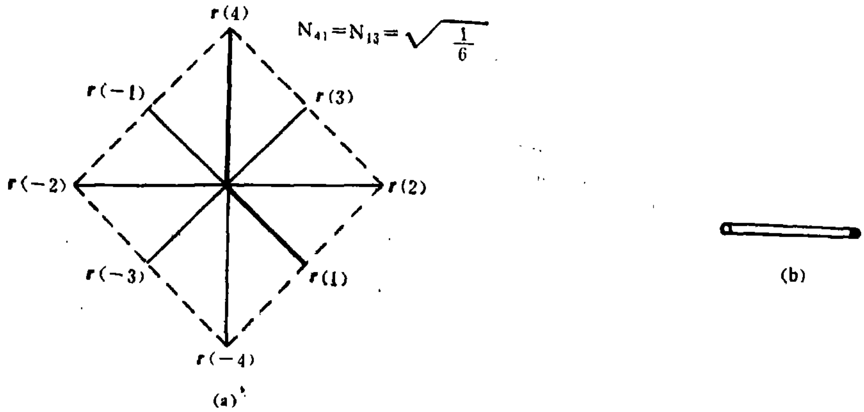

图 1

(a) C_2 群的根图(黑线为素根) (b) C_2 群的邓金图

$$\{UU\}^{1,0}_{s,0} = \nu_s,$$
$$\{UU\}^{0,1}_{0,s} = \tau_s, \tag{1.1-3}$$

其中

$$\{UU\}^{\xi,\eta}_{s,r} = \sum_{pp'qq'} \langle \tfrac12 p \tfrac12 p' | \xi s\rangle \langle \tfrac12 q \tfrac12 q' | \eta r\rangle U_{p,q} U_{p',q'}. \tag{1.1-3'}$$

由 (1.1-1) 可得

$$U_{p,q} = (-)^{1+p+q}(U_{-p,-q})^+. \tag{1.1-4}$$

C_2 群的 Casimir 算子可以写为

$$C = \frac{1}{3}\{\nu^2 + \tau^2 + 2(UU)^{0,0}_{0,0}\}. \tag{1.1-5}$$

2. C_2 群的不可约表示

为了完全标记 C_2 群不可约表示 $(\lambda\mu)$ 表示空间 $R^{(\lambda\mu)}$ 的基矢，除了 ν_0, τ_0 以外还需要 $f=\frac{1}{2}(10-3\times 2)=2$ 个外加算符[1-3]. 我们选 ν^2, τ^2 作为这两个外加算符，即选 ν^2, ν_0, τ^2, τ_0 的共同本征函数

$$\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle,$$

作为 $R^{(\lambda\mu)}$ 的基矢，它们满足

$$\nu^2\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \alpha(\alpha+1)\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\nu_0\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \epsilon\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\tau^2\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \Lambda(\Lambda+1)\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\tau_0\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = K\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle. \tag{1.2-1}$$

这时无穷小算子 ν_0, $\nu_{\pm1}$, τ_0, $\tau_{\pm1}$, $U_{p,q}$ 所对应的矩阵为

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\varepsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|\nu_0\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \varepsilon\delta(\alpha',\alpha)\delta(\varepsilon',\varepsilon)\delta(\Lambda',\Lambda)\delta(K',K),$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\varepsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|\nu_{\pm1}\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \mp\left\{\frac{1}{2}(\alpha\mp\varepsilon)(\alpha\pm\varepsilon+1)\right\}^{1/2}\cdot \delta(\alpha',\alpha)\delta(\varepsilon',\varepsilon\pm1)\delta(\Lambda',\Lambda)\delta(K',K);$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\varepsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|\tau_0\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = K\delta(\alpha',\alpha)\delta(\varepsilon',\varepsilon)\delta(\Lambda',\Lambda)\delta(K',K),$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\varepsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|\tau_{\pm1}\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \mp\left\{\frac{1}{2}(\Lambda\mp K)(\Lambda\pm K+1)\right\}^{1/2}\cdot \delta(\alpha',\alpha)\delta(\varepsilon',\varepsilon)\delta(\Lambda',\Lambda)\delta(K',K\pm1);$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\varepsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|U_{pq}\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\varepsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\Lambda'\end{matrix}\right\|U\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle\cdot \frac{\langle\alpha\varepsilon\tfrac{1}{2}p|\alpha'\varepsilon'\rangle\langle\Lambda K\tfrac{1}{2}q|\Lambda'K'\rangle}{\sqrt{(2\alpha'+1)(2\Lambda'+1)}}. \tag{1.2-2}$$

由 (1.1-4) 可得

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\Lambda'\end{matrix}\right\|U\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle = (-)^{1+\alpha'+\Lambda'-\alpha-\Lambda}\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\|U\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\Lambda'\end{matrix}\right\rangle. \tag{1.2-3}$$

由 (1.1-3) 可得

$$D_\alpha(\Lambda'\Lambda',\Lambda\tilde{\Lambda}) = F_0\delta(\Lambda,\tilde{\Lambda}) + F_1D_{\alpha+1/2}(\Lambda\tilde{\Lambda},\Lambda-1/2\ \Lambda-1/2) + F_2D_{\alpha+1/2}(\Lambda\tilde{\Lambda},\Lambda+1/2\ \Lambda+1/2). \tag{1.2-4}$$

其中

$$D_\alpha(\Lambda'\tilde{\Lambda}',\Lambda\tilde{\Lambda}) = \left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha-1/2\ \Lambda'\end{matrix}\right\|U\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha-1/2\ \tilde{\Lambda}'\end{matrix}\right\|U\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\tilde{\Lambda}\end{matrix}\right\rangle \tag{1.2-4'}$$

系数 F_0, F_1, F_2 由表 1 给出.

表 1　系数 F_0, F_1, F_2

$\Lambda'\ \Lambda\tilde{\Lambda}$	F_0	F_1	F_2
$\Lambda-1/2\ \Lambda\Lambda$	$(2\alpha+1)\Lambda(\alpha+\Lambda+1)$	$-\frac{(2\alpha+1)+(2\Lambda+1)}{(2\alpha+2)(2\Lambda+1)}$	$\frac{(2\alpha+1)(2\Lambda)}{(2\alpha+2)(2\Lambda+1)}$
$\Lambda+1/2\ \Lambda\Lambda$	$(2\alpha+1)(\Lambda+1)(\alpha-\Lambda)$	$\frac{(2\alpha+1)(2\Lambda+2)}{(2\alpha+2)(2\Lambda+1)}$	$\frac{2\alpha-2\Lambda}{(2\alpha+2)(2\Lambda+1)}$
$\Lambda+1/2\ \Lambda\ \Lambda+1$			1

C_2 群不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的表示空间 $R^{(\lambda\mu)}$ 的基矢间有以下关系

$$\sqrt{(2\alpha'+1)(2\Lambda'+1)}\left\{U\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right.\right\rangle\Big\}_{\alpha'\epsilon'\Lambda'K'}=\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\Lambda'\end{matrix}\right\|U\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\epsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right\rangle, \quad (1.2\text{-}5)$$

其中

$$\left\{U\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle\right\}_{\alpha'\epsilon'\Lambda'K'}=\sum_{\epsilon pKq}\langle\alpha\epsilon 1/2\, p|\alpha'\epsilon'\rangle\langle\Lambda K 1/2\, q|\Lambda'K'\rangle.$$

$$U_{p,q}\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle. \quad (1.2\text{-}5')$$

由[3]可得 C_2 群不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的最高权 $\mathbf{W}$ 满足

$$2\mathbf{W}\cdot\mathbf{r}(1)/|\mathbf{r}(1)|^2=\lambda.$$
$$2\mathbf{W}\cdot\mathbf{r}(3)/|\mathbf{r}(3)|^2=\mu. \quad (1.2\text{-}6)$$

这对应于

$$\alpha_{\max}=\frac{1}{2}(\lambda+\mu),\qquad \Lambda_0=\frac{1}{2}\mu \quad (1.2\text{-}6')$$

其中 $\alpha_{\max}$ 是 $R^{(\lambda\mu)}$ 中 α 的最大可取值，而 Λ_0 是 $\alpha=\alpha_{\max}$ 时 Λ 所取的值，将 (1.2-6′) 代入 (1.2-4) 经计算得[4]:

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha-1/2\ \Lambda+1/2\end{matrix}\right\|U\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\{(a+2)(a+1-\mu)(\lambda+\mu-a)(\lambda+2\mu+1-a)\}^{1/2},$$

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha-1/2\ \Lambda-1/2\end{matrix}\right\|U\left\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\{(b+1)(\mu-b)(\lambda+\mu+1-b)(\lambda+2\mu+2-b)\}^{1/2}. \quad (1.2\text{-}7)$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)-\frac{1}{2}(a+b),$$
$$\Lambda=\frac{1}{2}(a-b). \quad (1.2\text{-}7')$$

在 (1.2-7′) 中 a, b 的可取值为

$$a=\mu,\ \mu+1,\ \cdots,\ \mu+\lambda,$$
$$b=0,\ 1,\ \cdots,\ \mu. \quad (1.2\text{-}7'')$$

利用 (1.2-7″) 可得 C_2 群的不可约表示 $(\lambda\mu)$ 的维数为

$$d^{(\lambda\mu)}=(1+\lambda)(1+\mu)\left(1+\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda+2\mu}{2}\right). \quad (1.2\text{-}8)$$

在不可约表示 $(\lambda\mu)$ 中，C_2 群的 Casimir 算子所对应的矩阵为

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha'\epsilon'\Lambda'K'\end{matrix}\right|C\left|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\epsilon\Lambda K\end{matrix}\right\rangle=\frac{1}{12}\{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+4)+\mu(\mu+2)\}.$$
$$\delta(\alpha',\alpha)\delta(\epsilon',\epsilon)\delta(\Lambda',\Lambda)\delta(K',K). \quad (1.2\text{-}9)$$

这样，我们就完全确定了 C_2 群的不可约表示 $(\lambda\mu)$.

二、C_2 群的约化系数

1. C_2 群的约化系数

(a) C_2 群约化系数及其对称关系

设 C_2 群的两个不可约表示 $(\lambda_1\mu_1)$, $(\lambda_2\mu_2)$ 的表示空间是 $R^{(\lambda_1\mu_1)}$, $R^{(\lambda_2\mu_2)}$. 它们的基矢分别是 $\left|\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1)\\ \alpha_1\epsilon_1\Lambda_1K_1\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}(\lambda_2\mu_2)\\ \alpha_2\epsilon_2\Lambda_2K_2\end{matrix}\right\rangle$. 为了书写方便，我们分别用 Γ_1, Γ_2, γ_1, γ_2 来标记 $(\lambda_1\mu_1)$, $(\lambda_2\mu_2)$, $\alpha_1\epsilon_1\Lambda_1K_1$, $\alpha_2\epsilon_2\Lambda_2K_2$.

一般讲，R^{Γ_1} 和 R^{Γ_2} 的直乘 $R^{\Gamma_1}\otimes R^{\Gamma_2}$ 可以分解为 C_2 群的一些不可约表示 Γ 的表示空间 R^Γ 的直和，而 R^Γ 的基矢可以写为

$$\left|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle=\sum_{\gamma_1\gamma_2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\end{matrix}\right\rangle, \tag{2.1-1}$$

组合系数 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle$ 即是 C_2 群的约化系数，其中 n 是简并指标.

容易看出 C_2 群的约化系数 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle$ 满足以下方程组

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma'\end{matrix}\middle|X_i\middle|\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\\ &=\sum_{\gamma_1'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\end{matrix}\middle|X_{1i}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1' & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle+\sum_{\gamma_2'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\end{matrix}\middle|X_{2i}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\\ &\qquad i=1, 2, \cdots, 10.\end{aligned} \tag{2.1-2}$$

我们规定相因子，使得约化系数是实数并且

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \hat{\gamma}_2 & \tilde{\gamma}_1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \hat{\gamma}\end{matrix}\right\rangle>0. \tag{2.1-3}$$

其中 $\hat{\gamma}$ 表示对应最高权态的一组 $\alpha\epsilon\Lambda K$ 值，而 $\tilde{\gamma}$ 表示 ϵ, K 确定时 α, Λ 取最大可取值时的一组 $\alpha\epsilon\Lambda K$ 值.

约化系数所满足的正交归一化条件为

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma_1\gamma_2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'\Gamma'\\ \gamma'\end{matrix}\right\rangle=\delta(n, n')\delta(\Gamma, \Gamma')\delta(\gamma, \gamma'),\\ &\sum_{n\Gamma}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1' & \gamma_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle=\delta(\gamma_1\gamma_1')\delta(\gamma_2, \gamma_2').\end{aligned} \tag{2.1-4}$$

解 (2.1-2), (2.1-3) 即可得到 C_2 群的约化系数 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\Gamma\\ \gamma\end{matrix}\right\rangle$.

从 (2.1-2) 可以看出 C_2 群的约化系数满足以下的对称关系:

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_2 & \Gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\Gamma_3 \\ \gamma_3 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{n'} A'_n \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n'\Gamma_3 \\ \gamma_3 \end{matrix} \right\rangle,$$

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_3 \\ \gamma_1 & \bar{\gamma}_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\Gamma_2 \\ \bar{\gamma}_2 \end{matrix} \right\rangle = (-)^{\alpha_1+\epsilon_1+\Lambda_1+K_1} \sqrt{\frac{d^{(\Gamma_2)}}{d^{(\Gamma_3)}}} \sum_{n'} C_{n'} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n'\Gamma_3 \\ \gamma_3 \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.1-5}$$

其中 $d^{(\Gamma)}$ 是不可约表示 Γ 的维数. $\bar{\gamma}$ 标记 $\alpha - \epsilon\Lambda - K$, 而 $A_{n'}$, $C_{n'}$ 满足

$$\sum_{n'} A^2_{n'} = \sum_{n'} C^2_{n'} = 1. \tag{2.1-5'}$$

(b) 约化系数标量因子及其对称关系

从 (2.1-2) 可以看出 C_2 群的约化系数可以写为

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\Gamma \\ \alpha\Lambda \end{matrix} \right\rangle \langle \alpha_1\epsilon_1\alpha_2\epsilon_2 | \alpha\epsilon \rangle \langle \Lambda_1K_1\Lambda_2K_2 | \Lambda K \rangle, \tag{2.1-6}$$

系数 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\Gamma \\ \alpha\Lambda \end{matrix} \right\rangle$ 称为 C_2 群约化系数标量因子.

约化系数标量因子所满足的方程为

$$\sum_{\alpha'_1\Lambda'_1\alpha'_2\Lambda'_2} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2 \end{matrix} \alpha\Lambda \middle\| U_1 + U_2 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \alpha'_1\Lambda'_1 & \alpha'_2\Lambda'_2 \end{matrix} \alpha'\Lambda' \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \alpha'_1\Lambda'_1 & \alpha'_2\Lambda'_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\ \Gamma \\ \alpha'\Lambda' \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\ \Gamma \\ \alpha\ \Lambda \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma \\ \alpha\Lambda \end{matrix} \middle\| U \middle\| \begin{matrix} \Gamma \\ \alpha'\Lambda' \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.1-7}$$

其中

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2 \end{matrix} \alpha\Lambda \middle\| U_1 + U_2 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \alpha'_1\Lambda'_1 & \alpha'_2\Lambda'_2 \end{matrix} \alpha'\Lambda' \right\rangle$$

$$= f(\alpha_1\alpha_2\alpha,\ \alpha'_1\alpha'_2\alpha') f(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda,\ \Lambda'_1\Lambda'_2\Lambda') \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \alpha_1\Lambda_1 \end{matrix} \middle\| U_1 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \alpha'_1\Lambda'_1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$+ g(\alpha_1\alpha_2\alpha,\ \alpha'_1\alpha'_2\alpha') g(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda,\ \Lambda'_1\Lambda'_2\Lambda') \left\langle \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \alpha_2\Lambda_2 \end{matrix} \middle\| U_2 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \alpha'_2\Lambda'_2 \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.1-7'}$$

其中

$$f(\alpha_1\alpha_2\alpha,\ \alpha'_1\alpha'_2\alpha') = (-)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha'+1/2} \sqrt{(2\alpha'+1)(2\alpha+1)} \cdot \begin{Bmatrix} 1/2 & \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \alpha_2 & \alpha' & \alpha \end{Bmatrix} \delta(\alpha_2, \alpha'_2),$$

$$g(\alpha_1\alpha_2\alpha,\ \alpha'_1\alpha'_2\alpha') = (-)^{\alpha_1+\alpha'_2+\alpha'+1/2} \sqrt{(2\alpha'+1)(2\alpha+1)} \cdot \begin{Bmatrix} 1/2 & \alpha_2 & \alpha'_2 \\ \alpha_1 & \alpha' & \alpha \end{Bmatrix} \cdot \delta(\alpha_1, \alpha'_1) \tag{2.1-7''}$$

约化系数标量因子的相因子选择为

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \hat{\alpha}_1\tilde{\Lambda}_1 & \hat{\alpha}_2\tilde{\Lambda}_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\ \Gamma \\ \hat{\alpha}\ \Lambda \end{matrix} \right\rangle > 0 \tag{2.1-8}$$

约化系数标量因子所满足的正交归一化条件为

$$\sum_{\alpha_1\Lambda_1\alpha_2\Lambda_2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma\\ \alpha & \Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n' & \Gamma'\\ \alpha & \Lambda\end{matrix}\right\rangle=\delta(n,n')\delta(\Gamma,\Gamma'),$$

$$\sum_{n\Gamma}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma\\ \alpha & \Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1'\Lambda_1' & \alpha_2'\Lambda_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma\\ \alpha & \Lambda\end{matrix}\right\rangle=\delta(\alpha_1,\alpha_1')\delta(\Lambda_1,\Lambda_1')\delta(\alpha_2,\alpha_2')\delta(\Lambda_2,\Lambda_2'). \tag{2.1-9}$$

解 (2.1-7) 比解 (2.1-2) 简单得多. 解 (2.1-7),(2.1-8)我们得到了 $(\lambda_1\mu_1)\otimes(10)$ 约化系数标量因子,结果在表 2 中给出.

由 (2.1-5) 可以得到约化系数标量因子所满足的对称关系

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 & \Gamma_1\\ \alpha_2\Lambda_2 & \alpha_1\Lambda_1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma_3\\ \alpha_3 & \Lambda_3\end{matrix}\right\rangle=(-)^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3}\sum_{n'}A_{n'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n' & \Gamma_3\\ \alpha_3 & \Lambda_3\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_3\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_3\Lambda_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma_2\\ \alpha_2 & \Lambda_2\end{matrix}\right\rangle=(-)^{\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2+\Lambda_1+\Lambda_3-\Lambda_2}\sqrt{\frac{d^{(\Gamma_2)}(2\alpha_3+1)(2\Lambda_3+1)}{d^{(\Gamma_3)}(2\alpha_2+1)(2\Lambda_2+1)}}\cdot$$

$$\sum_{n'}C_{n'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n' & \Gamma_3\\ \alpha_3 & \Lambda_3\end{matrix}\right\rangle, \tag{2.1-10}$$

当 $R^{\Gamma_1}\otimes R^{\Gamma_2}$ 仅包含 R^{Γ_3} 一次时, (2.1-10) 变为

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 & \Gamma_1\\ \alpha_2\Lambda_2 & \alpha_1\Lambda_1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \alpha_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle=\pm(-)^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\Lambda_1+\Lambda_2-\Lambda_3}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \alpha_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_3\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_3\Lambda_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\right\rangle=\pm(-)^{\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2+\Lambda_1+\Lambda_3-\Lambda_2}\sqrt{\frac{d^{(\Gamma_2)}(2\alpha_3+1)(2\Lambda_3+1)}{d^{(\Gamma_3)}(2\alpha_2+1)(2\Lambda_2+1)}}\cdot$$

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \alpha_3\Lambda_3\end{matrix}\right\rangle, \tag{2.1-10'}$$

其中的正负号可以从 (2.1-8) 式决定.

(C) 约化系数标量因子的一个递推关系

与 SU_3 群类似可以得到 C_2 群约化系数标量因子的一个递推关系

$$\sum_{n}\langle n''\Gamma''n\Gamma|n'\Gamma'\bar{n}\Gamma\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma''\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n & \Gamma\\ \alpha & \Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$=F(\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\bar{n}\Gamma,\ n'\Gamma'n''\Gamma''), \tag{2.1-11}$$

其中

$$\langle n''\Gamma''n\Gamma|n'\Gamma'\bar{n}\Gamma\rangle\equiv\langle[\Gamma_1(\Gamma_2\Gamma_3)n''\Gamma'']n\Gamma|[(\Gamma_1\Gamma_2)n'\Gamma'\Gamma_3]\bar{n}\Gamma\rangle$$

$$F(\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\bar{n}\Gamma,\ n'\Gamma'n''\Gamma'')=\sum_{\alpha_2\Lambda_2\alpha_3\Lambda_3\alpha'\Lambda'}(-)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha+\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda}\cdot$$

$$\sqrt{(2\alpha'+1)(2\alpha''+1)(2\Lambda'+1)(2\Lambda''+1)}\begin{Bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha'\\ \alpha_3 & \alpha & \alpha''\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda'\\ \Lambda_3 & \Lambda & \Lambda''\end{Bmatrix}\cdot$$

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n' & \Gamma'\\ \alpha' & \Lambda'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma' & \Gamma_3\\ \alpha'\Lambda' & \alpha_3\Lambda_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\bar{n} & \Gamma\\ \alpha & \Lambda\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 & \Gamma_3\\ \alpha_2\Lambda_2 & \alpha_3\Lambda_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n'' & \Gamma''\\ \alpha'' & \Lambda''\end{matrix}\right\rangle. \tag{2.1-11'}$$

将 $\Gamma_1=(\lambda_1\mu_1)$, $\Gamma_2=(10)$, $\Gamma_3=(10)$, $\Gamma''=(01)$, $\Gamma'=(\lambda'\mu')$ 代入 (2.1-11) 得:

$$\langle(01)(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1) & (01) \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$= F((\lambda_1\mu_1)(10)(10)(\lambda\mu),(\lambda'\mu')(01)). \qquad (2.1\text{-}12)$$

系数 $\langle(01)(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')(\lambda\mu)\rangle$ 可以看作是归一化常数，应用 (2.1-12) 我们求得了 C_2 群 $(\lambda_1\mu_1)\otimes(01)$ 约化系数标量因子，结果在表 2 中给出.

将 $\Gamma_1=(\lambda_1\mu_1)$, $\Gamma_2=(10)$, $\Gamma_3=(10)$, $\Gamma''=(20)$, $\Gamma'=(\lambda'\mu')$ 代入 (2.1-11) 式，当 $\Gamma\equiv(\lambda\mu)\neq(\lambda_1\mu_1)$ 时有

$$\langle(20)(\lambda\mu)|(\lambda'\mu')(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1) & (20) \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$= F((\lambda_1\mu_1)(10)(10)(\lambda\mu),(\lambda'\mu')(20)); \qquad (2.1\text{-}13)$$

当 $\Gamma\equiv(\lambda\mu)=(\lambda_1\mu_1)$ 时，有

$$\langle(20)1(\lambda\mu)|(\lambda-1\mu)(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu) & (20) \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$= F((\lambda\mu)(10)(10)(\lambda\mu),(\lambda-1\mu)(20));$$

$$\langle(20)1(\lambda\mu)|(\lambda-1\mu+1)(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda\ \mu) & (20) \\ \alpha_1\ \Lambda_1 & \alpha''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$+\langle(20)2(\lambda\mu)|(\lambda-1\mu+1)(\lambda\mu)\rangle\left\langle\begin{matrix}(\lambda\mu) & (20) \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha''\Lambda''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}2(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle$$
$$= F((\lambda\mu)(10)(10)(\lambda\mu),(\lambda-1\mu+1)(20)); \qquad (2.1\text{-}13')$$

应用 (2.1-13), (2.1-13′) 即可求出 C_2 群 $(\lambda\mu)\otimes(20)$ 约化系数标量因子，结果在表 2 中给出.

表 2 C_2 群约化系数标量因子

$$\left\langle\begin{matrix}(\lambda_1\mu_1) & (\lambda_2\mu_2) \\ \alpha_1\Lambda_1 & \alpha_2\Lambda_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n(\lambda\mu)\\ \alpha\Lambda\end{matrix}\right\rangle\equiv\left\langle\begin{matrix}p_1\ q_1\ 0 & p_2\ q_2\ 0 \\ a_1\ b_1 & a_2\ b_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\ p\ q\ r\\ a\,b\end{matrix}\right\rangle$$

其中 $\lambda=p-q$, $\mu=q-r$, $\alpha=\frac{1}{2}(p+q-a-b)$, $\Lambda=\frac{1}{2}(a-b)$, $a=q,q+1,\cdots,p$, $b=r,\ r+1,\ \cdots,\ q$.

(a) $\left\langle\begin{matrix}p\ q\ 0 & 1\ 0\ 0 & p'\ q'\ r' \\ a_1\ b_1 & a_2\ b_2 & a\ b\end{matrix}\right\rangle$

$a_1\ b_1 \quad a_2\ b_2$ \ $p'\ q'\ r'$			$p+1 \quad q \quad 0$
$a-1$	$b-1$	$0\ 0$	$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q)b(q+1-b)}{(p+2)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+2-a-b)}}$
a	b	$0\ 0$	$\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(p+q+2-a)(p+2-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+2-a-b)}}$
a	$b-1$	$1\ 0$	$\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(p+q+2-a)b(q+1-b)}{(p+2)(p+1-q)(p+q+3)(a+1-b)}}$
$a-1$	b	$1\ 0$	$\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q)(p+2-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(p+1-q)(p+q+3)(a+1-b)}}$

p　　$q+1$　　0
$\sqrt{\dfrac{(a+1)(p+1-a)b(p+2-b)}{(q+1)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(a-q)(p+q+2-a)(q+1-b)(p+q+3-b)}{(q+1)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(a-q)(p+q+2-a)b(p+2-b)}{(q+1)(p+1-q)(p+q+3)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(p+1-a)(q+1-b)(p+q+3-b)}{(q+1)(p+1-q)(p+q+3)(a+1-b)}}$

p　　$q+1$　　1
$\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(p+q+2-a)(p+2-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q)b(q+1-b)}{(p+2)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+2-a-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q)(p+2-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(p+1-q)(p+q+3)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(p+q+2-a)b(q+1-b)}{(p+2)(p+1-q)(p+q+3)(a+1-b)}}$

$p+1$　　q　　1
$-\sqrt{\dfrac{(a-q)(p+q+2-a)(q+1-b)(p+q+3-b)}{(q+1)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(a+1)(p+1-a)b(p+2-b)}{(q+1)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+2-a-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(p+1-a)(q+1-b)(p+q+3-b)}{(q+1)(p+1-q)(p+q+3)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{(a-q)(p+q+2-a)b(p+2-b)}{(q+1)(p+1-q)(p+q+3)(a+1-b)}}$

(b) $\left\langle \begin{matrix} p & q & 0 & 1 & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & & a_2 & b_2 & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p' & q' & r' \\ & a & b \end{matrix} \right\rangle$

$a_1\ b_1\quad a_2\ b_2$ \ $p'\ q'\ r'$	$p+1$　　$q+1$　　0
$a-1\quad b-2\quad 1\quad 0$	$\sqrt{\dfrac{(a+1)(p+q+3-a)(b-1)b(p+3-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$a-2\quad b-1\quad 1\quad 0$	$\sqrt{\dfrac{a(a+1)(a-q-1)(p+2-a)b(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$a\quad b-1\quad 1\quad 0$	$-\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)b(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b\quad 1\quad 0$	$\sqrt{\dfrac{(a+1)(p+q+3-a)(p+2-b)(q+1-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b-1\quad 1\quad 1$	$\sqrt{\dfrac{2(a+1)(p+q+3-a)b(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+3)(p+q+4)}}$

$p+1 \qquad q+1 \qquad 1$
$(p+q+2-2a)\sqrt{\dfrac{2(b-1)(p+3-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$(p+q+4-2b)\sqrt{\dfrac{2a(p+2-a)(a-q-1)(p+q+3-a)}{(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$(p+q+4-2b)\sqrt{\dfrac{2(a+1)(p+1-a)(a-q)(p+q+2-a)}{(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-(p+q+2-2a)\sqrt{\dfrac{2b(p+2-b)(q+1-b)(p+q+3-b)}{(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{(p+q+2-2a)(p+q+4-2b)}{\sqrt{(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)}}$

$p+2 \qquad q \qquad 1$
$-\sqrt{\dfrac{(p+2-a)(a-q)(b-1)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{a(a-q-1)(a-q)(p+q+3-a)(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(p+2-a)(a-q)b(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{2(p+2-a)(a-q)(p+3-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)}}$

$p \qquad q+2 \qquad 1$
$-\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(a-q-1)(b-1)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{a(p+1-a)(p+2-a)(p+q+3-a)(p+2-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(p+2-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(p+1-a)(a-q-1)b(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{2(p+1-a)(a-q-1)(p+2-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)}}$

$p+1 \qquad q+1 \qquad 2$
$\sqrt{\dfrac{a(p+q+2-a)(p+3-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{(p+2-a)(a-q-1)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{a(a+1)(p+1-a)(a-q)(b-1)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{a(p+q+2-a)(b-1)b(p+2-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{2a(p+q+2-a)(b-1)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p+q+2)(p+q+3)}}$

(c) $\left\langle \begin{matrix} p\ q\ 0 & 2\ 0\ 0 \\ a_1\ b_1 & a_2\ b_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p'\ q'\ r' \\ a\ b \end{matrix} \right\rangle$

$a_1\ b_1\ \ a_2\ b_2$ \ $p'\ q'\ r'$	$p+2\quad q\quad 0$
$a-2\quad b-2\quad 0\ 0$	$\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q-1)(a-q)(b-1)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$a-1\quad b-1\quad 0\ 0$	$-\sqrt{\frac{2(a+1)(p+2-a)(a-q)(p+q+3-a)b(p+3-b)(q+1-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$a\quad b\quad 0\ 0$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$a-1\quad b-2\quad 1\ 0$	$-\sqrt{\frac{2(a+1)(p+2-a)(a-q)(p+q+3-a)(b-1)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$a-2\quad b-1\quad 1\ 0$	$-\sqrt{\frac{2a(a+1)(a-q-1)(a-q)b(p+3-b)(q+1-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$a\quad b-1\quad 1\ 0$	$\sqrt{\frac{2(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+q+3-a)b(p+3-b)(q+1-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b\quad 1\ 0$	$\sqrt{\frac{2(a+1)(p+2-a)(a-q)(p+q+3-a)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$a\quad b-2\quad 2\ 0$	$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$a-1\quad b-1\quad 2\ 0$	$\sqrt{\frac{2(a+1)(p+2-a)(a-q)(p+q+3-a)b(p+3-b)(q+1-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+2-b)(a-b)}}$
$a-2\quad b\quad 2\ 0$	$\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(p+3)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+1-b)(a-b)}}$

$p+2 \qquad q \qquad 1$
$\sqrt{\dfrac{2a(a-q-1)(a-q)(p+q+3-a)(b-1)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$\dfrac{-\{(p+q+4)(p+q+2-a-b)+2(a+1)b\}\sqrt{(p+2-a)(a-q)(p+3-b)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{2(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)b(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\dfrac{-(p+q+2-2a)\sqrt{(p+2-a)(a-q)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-(p+q+4-2b)\sqrt{a(a-q-1)(a-q)(p+q+3-a)(p+3-b)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-(p+q+4-2b)\sqrt{(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+3-b)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-(p+q+2-2a)\sqrt{(p+2-a)(a-q)b(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{2(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(b-1)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-\{(p+q+4)(a-b)+(p+q+3-a)b\}\sqrt{(p+2-a)(a-q)(p+3-b)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+2-b)(a-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{2a(a-q-1)(a-q)(p+q+3-a)b(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+1-b)(a-b)}}$

$p+2 \quad q \quad 2$
$\sqrt{\frac{(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$-\sqrt{\frac{2a(p+2-a)(a-q)(p+q+2-a)(b-1)(p+3-b)(q+1-b)(p+q+3-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(b-1)b(p+2-b)(p+3-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\frac{2a(p+2-a)(a-q)(p+q+2-a)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{2(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)(p+3-b)(q+1-b)(p+q+3-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\frac{2a(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(b-1)(p+3-b)(q+1-b)(p+q+3-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\frac{2a(p+2-a)(a-q)(p+q+2-a)(b-1)b(p+2-b)(p+3-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{2a(p+2-a)(a-q)(p+q+2-a)(b-1)(p+3-b)(q+1-b)(p+q+3-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+2-b)(a-b)}}$
$\sqrt{\frac{(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)b(p+2-b)(p+3-b)}{q(q+1)(p+1-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+1-b)(a-b)}}$

$p \quad q+2 \quad 0$
$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(b-1)b(p+2-b)(p+3-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$\sqrt{\frac{2(a+1)(p+1-a)(a-q-1)(p+q+3-a)b(p+2-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\frac{(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\frac{2(a+1)(p+1-a)(a-q-1)(p+q+3-a)(b-1)b(p+2-b)(p+3-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\frac{2a(a+1)(p+1-a)(p+2-a)b(p+2-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{2(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)b(p+2-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\frac{2(a+1)(p+1-a)(a-q-1)(p+q+3-a)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)b(p+2-b)(p+3-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{2(a+1)(p+1-a)(a-q-1)(p+q+3-a)b(p+2-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+2-b)(a-b)}}$
$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+1-a)(p+2-a)(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(q+1)(q+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+1-b)(a-b)}}$

$p \quad q+2 \quad 1$
$\sqrt{\dfrac{2a(p+1-a)(p+2-a)(p+q+3-a)(b-1)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$\dfrac{\{(p+q+4)(p+q+2-a-b)+2(a+1)b\}\sqrt{(p+1-a)(a-q-1)(p+2-b)(q+2-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{2(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)b(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\dfrac{(p+q+2-2a)\sqrt{(p+1-a)(a-q-1)(b-1)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+4-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-(p+q+4-2b)\sqrt{a(p+1-a)(p+2-a)(p+q+3-a)(p+2-b)(q+2-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-(p+q+4-2b)\sqrt{(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(p+2-b)(q+2-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{(p+q+2-2a)\sqrt{(p+1-a)(a-q-1)b(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+q+2-a)(b-1)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{\{(p+q+4)(a-b)+2(p+q+3-a)b\}\sqrt{(p+1-a)(a-q-1)(p+2-b)(q+2-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+2-b)(a-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{2a(p+1-a)(p+2-a)(p+q+3-a)b(q+1-b)(q+2-b)(p+q+3-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+1-b)(a-b)}}$

$p \quad q+2 \quad 2$
$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$\sqrt{\frac{2a(p+1-a)(a-q-1)(p+q+2-a)(b-1)(p+2-b)(q+2-b)(p+q+3-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q-1)(a-q)(b-1)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$-\sqrt{\frac{2a(p+1-a)(a-q-1)(p+q+2-a)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{2(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)(p+2-b)(q+2-b)(p+q+3-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\frac{2a(a+1)(a-q-1)(a-q)(b-1)(p+2-b)(q+2-b)(p+q+3-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{2a(p+1-a)(a-q-1)(p+q+2-a)(b-1)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{a(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\frac{a(p+1-a)(a-q-1)(p+q+2-a)(b-1)(p+2-b)(q+2-b)(p+q+3-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+2-b)(a-b)}}$
$\sqrt{\frac{(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+2)(p-q)(p+1-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+1-b)(a-b)}}$

$p+1 \quad q+1 \quad 0$
$\sqrt{\dfrac{2a(a+1)(p+2-a)(a-q-1)(b-1)(p+3-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$\dfrac{\{(p+2-q)(p+q+2-a-b)-2(a-q)(q+1-b)\}\sqrt{(a+1)(p+q+3-a)b(p+q+4-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{2(p+1-a)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(p+2-b)(q+1-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\dfrac{(p+q+2-2a)\sqrt{(a+1)(p+q+3-a)(b-1)b(p+3-b)(q+2-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{(p+q+4-2b)\sqrt{a(a+1)(a-q-1)(p+2-a)b(p+q+4-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{(p+q+4-2b)\sqrt{(p+1-a)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)b(p+q+4-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-(p+q+2-2a)\sqrt{(a+1)(p+q+3-a)(p+2-b)(q+1-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{2(p+1-a)(a-q)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)b(p+3-b)(q+2-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-\{(p+2-q)(a+2-b)-2(a-q)(p+3-b)\}\sqrt{(a+1)(p+q+3-a)b(p+q+4-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+2-b)(a-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{2a(a+1)(p+2-a)(a-q-1)(p+2-b)(q+1-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+3)(p+q+4)(a+1-b)(a-b)}}$

$p+1 \qquad q+1 \qquad 2$
$-\sqrt{\frac{2(p+2-a)(a-q-1)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(p+3-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$\frac{\{(p+2-q)(p+q+2-a-b)-2(a-q)(q+1-b)\}\sqrt{a(p+q+2-a)(b-1)(p+q+3-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\frac{2a(a+1)(p+1-a)(a-q)(b-1)b(p+2-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\frac{-(p+q+2-2a)\sqrt{a(p+q+2-a)(p+3-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\frac{-(p+q+4-2b)\sqrt{(p+2-a)(a-q-1)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)(p+q+3-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\frac{-(p+q+4-2b)\sqrt{a(a+1)(p+1-a)(a-q)(b-1)(p+q+3-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\frac{(p+q+2-2a)\sqrt{a(p+q+2-a)(b-1)b(p+2-b)(q+1-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\frac{a(a+1)(p+1-a)(a-q)(p+3-b)(q+2-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$\frac{-\{(p+2-q)(a+2-b)-2(a-q)(p+3-b)\}\sqrt{a(p+q+2-a)(b-1)(p+q+3-b)}}{\sqrt{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+2-b)(a-b)}}$
$\sqrt{\frac{2(p+2-a)(a-q-1)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)b(p+2-b)(q+1-b)}{(p+2)(q+1)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+3)(a+1-b)(a-b)}}$

$(p+1 \quad q+1 \quad 1)_2$
$\sqrt{\dfrac{2C_0a(a+1)(a-q-1)(a-q)(b-1)b(p+2-b)(q+1-b)}{(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+3-a-b)}}$
$\dfrac{X/(p+q+3-a-b)}{\sqrt{C_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{2C_0(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(p+q+2-a-b)}}$
$\dfrac{\{(p+3)(q+2)(p+q)(p+q+4)-2C_0(a+1)(p+q+3-a)\}\sqrt{(b-1)(p+3-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}}{\sqrt{C_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{\{(p+3)(q+2)(p+q)(p+q+4)-2C_0b(p+q+4-b)\}\sqrt{a(a-q-1)(p+2-a)(p+q+3-a)}}{\sqrt{C_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{-\{(p+3)(q+2)(p+q)(p+q+4)-2C_0b(p+q+4-b)\}\sqrt{(a+1)(p+1-a)(b-1)(q+2-b)}}{\sqrt{C_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{\{(p+3)(q+2)(p+q)(p+q+4)-2C_0(a+1)(p+q+3-a)\}\sqrt{b(p+2-b)(q+1-b)(p+q+3-b)}}{\sqrt{C_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{2C_0(p+1-a)(p+2-a)(p+q+2-a)(p+q+3-a)(b-1)b(q+1-b)(q+2-b)}{(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+2-b)(a+1-b)}}$
$\dfrac{Y/(a+1-b)}{\sqrt{C_0(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+2-b)(a-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{2C_0a(a+1)(a-q-1)(a-q)(p+2-b)(p+3-b)(p+q+3-b)(p+q+4-b)}{(p+1)(p+3)q(q+2)(p-q)(p+2-q)(p+q+2)(p+q+4)(a+1-b)(a-b)}}$

$(p+1 \quad q+1 \quad 1)_1$
0
$\sqrt{\dfrac{(p+q+4-a-b)(p+q+2-a-b)}{p(p+4)+q(q+2)}}$
0^*
$\sqrt{\dfrac{(b-1)(p+3-b)(q+2-b)(p+q+4-b)}{[p(p+4)+q(q+2)](p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{a(a-q-1)(p+2-a)(p+q+3-a)}{[p(p+4)+q(q+2)](p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$-\sqrt{\dfrac{(a+1)(a-q)(p+1-a)(p+q+2-a)}{[p(p+4)+q(q+2)](p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
$\sqrt{\dfrac{b(p+2-b)(q+1-b)(p+q+3-b)}{[p(p+4)+q(q+2)](p+q+3-a-b)(a+1-b)}}$
0
$-\sqrt{\dfrac{(a+2-b)(a-b)}{p(p+4)+q(q+2)}}$
0

其中 $C_0=p(p+4)+q(q+2)$

$$\begin{aligned}X=&\{C_1(p+2-a)(p+q+3-a)(p+3-b)(p+q+4-b)-C_2a(a-q-1)(b-1)(q+2-b)\\&-C_3(a-q-1)(p+q+3-a)(q+2-b)(p+q+4-b)+C_4a(p+2-a)(b-1)(p+3-b)\}\\&\times(p+q+2-a-b)-\{C_1(a+1)(a-q)b(q+1-b)-C_2(p+1-a)(p+q+2-a)(p+2-b)\\&\times(p+q+3-b)-C_3(a+1)(p+1-a)b(p+2-b)+C_4(a-q)(p+q+2-a)(q+1-b)\\&\times(p+q+3-b)\}(p+q+4-a-b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y=&\{C_1(p+2-a)(p+q+3-a)b(q+1-b)-C_2a(a-q-1)(p+2-b)(p+q+3-b)\\&-C_3(a-q-1)(p+q+3-a)b(p+2-b)+C_4a(p+2-a)(q+1-b)(p+q+3-b)\}\\&\times(a+2-b)-\{C_1(a+1)(a-q)(p+3-b)(p+q+4-b)-C_2(p+1-a)(p+q+2-a)\\&\times(b-1)(q+2-b)-C_3(a+1)(p+1-a)(q+2-b)(p+q+4-b)+C_4(a-q)\\&\times(p+q+2-a)(b-1)(p+3-b)\}(a-b).\end{aligned}$$

其中

$$C_1=\frac{(p+1)q(q+2)(p-q)(p+q+2)}{2(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}$$

$$C_2=\frac{(p+3)q(q+2)(p+2-q)(p+q+4)}{2(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}$$

$$C_3=\frac{(p+1)(p+3)q(p+2-q)(p+q+2)}{2(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}$$

$$C_4=\frac{(p+1)(p+3)(q+2)(p-q)(p+q+4)}{2(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}.$$

(d) C_2 群 Racah 系数

$\langle[pq0,\ (100,\ 100)p''q''r''\tilde{\Gamma}|[(pq0,\ 100)p'q'r',\ 100]\tilde{\Gamma}\rangle$

$\tilde{\Gamma}=p+2\ q\ 0$

Γ'' \ Γ'	$p+1 \quad q \quad 0$
200	1

$\widetilde{\Gamma} = p+2 \ q \ 1$

$\Gamma'' \backslash \Gamma'$	$p+1 \ q \ 0$	$p+1 \ q \ 1$
110	$\sqrt{\frac{p+q+4}{2(p+q+3)}}$	$-\sqrt{\frac{p+q+2}{2(p+q+3)}}$
200	$\sqrt{\frac{p+q+2}{2(p+q+3)}}$	$\sqrt{\frac{p+q+4}{2(p+q+3)}}$

$\widetilde{\Gamma} = p+2 \ q \ 2$

$\Gamma'' \backslash \Gamma'$	$p \ q+1 \ 1$
200	1

$\widetilde{\Gamma} = p \ q+2 \ 0$

$\Gamma'' \backslash \Gamma'$	$p \ q+1 \ 0$
200	

$\widetilde{\Gamma} = p \ q+2 \ 1$

$\Gamma'' \backslash \Gamma'$	$p \ q+1 \ 0$	$p \ q+1 \ 1$
110	$-\sqrt{\frac{p+q+4}{2(p+q+3)}}$	$\sqrt{\frac{p+q+2}{2(p+q+3)}}$
200	$\sqrt{\frac{p+q+2}{2(p+q+3)}}$	$\sqrt{\frac{p+q+4}{2(p+q+3)}}$

$\widetilde{\Gamma} = p \ q+2 \ 2$

$\Gamma'' \backslash \Gamma'$	$p \ q+1 \ 1$
200	1

$\widetilde{\Gamma} = p+1 \ q+1 \ 0$

$\Gamma'' \backslash \Gamma'$	$p+1 \ q \ 0$	$p \ q+1 \ 0$
110	$\sqrt{\frac{p+2-q}{2(p+1-q)}}$	$-\sqrt{\frac{p-q}{2(p+1-q)}}$
200	$\sqrt{\frac{p-q}{2(p+1-q)}}$	$\sqrt{\frac{p+2-q}{2(p+1-q)}}$

$\widetilde{\Gamma} = p+1 \ q+1 \ 2$

$\Gamma'' \backslash \Gamma'$	$p \ q+1 \ 1$	$p+1 \ 2 \ 1$
110	$\sqrt{\frac{p-q}{2(p+1-q)}}$	$-\sqrt{\frac{p+2-q}{2(p+1-q)}}$
200	$\sqrt{\frac{p+2-q}{2(p+1-q)}}$	$\sqrt{\frac{p-q}{2(p+1-q)}}$

$\tilde{\Gamma} = p+1\ q+1\ 1$

Γ'' \ Γ'	$p+1\ \ q\ \ 0$	$p\ \ q+1\ \ 0$	$p+1\ \ q\ \ 1$	$p\ \ q+1\ \ 1$
000	$+\sqrt{\frac{(p+3)(p+2-q)(p+q+4)}{4(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$-\sqrt{\frac{(q+2)(p-q)(p+q+4)}{4(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$\sqrt{\frac{q(p+2-q)(p+q+2)}{4(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$-\sqrt{\frac{(p+1)(p-q)(p+q+2)}{4(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}}$
110	$\sqrt{\frac{(p+3)(p-q)(p+q+2)}{4(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$\sqrt{\frac{(q+2)(p+2-q)(p+q+2)}{4(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$-\sqrt{\frac{q(p-q)(p+q+4)}{4(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$-\sqrt{\frac{(p+1)(p+2-q)(p+q+4)}{4(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}}$
200_1	$p\sqrt{\frac{(p+3)(p+2-q)(p+q+4)}{2C_0(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$-(q-1)\sqrt{\frac{(q+2)(p-q)(p+q+4)}{2C_0(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$-(q+3)\sqrt{\frac{q(p+2-q)(p+q+2)}{2C_0(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$(p+4)\sqrt{\frac{(p+1)(p-q)(p+q+2)}{2C_0(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}}$
200_2	$\sqrt{\frac{(p+1)q(q+2)(p-q)(p+q+2)}{2C_0(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$\sqrt{\frac{(p+1)(p+3)q(p+2-q)(p+q+2)}{2C_0(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$\sqrt{\frac{(p+1)(p+3)(q+2)(p-q)(p+q+4)}{2C_0(q+1)(p+1-q)(p+q+3)}}$	$\sqrt{\frac{(p+3)q(q+2)(p+2-q)(p+q+4)}{2C_0(p+2)(p+1-q)(p+q+3)}}$

其中， $C_0 = p(p+4) + q(q+2)$

2. C_2 群的不可约张量算符与 Wigner-Eckart 定理

引入 C_2 群的 Γ 秩不可约张量算符 T^{Γ}_{γ}，它满足以下对易关系

$$[X_i, T^{\Gamma}_{\gamma}] = \sum_{\gamma'} T^{\Gamma}_{\gamma'} \left\langle \begin{matrix}\Gamma \\ \gamma'\end{matrix} \middle| X_i \middle| \begin{matrix}\Gamma \\ \gamma\end{matrix} \right\rangle, \quad i = 1, 2, \cdots, 10. \tag{2.2-1}$$

容易证明 C_2 群的 10 个无穷小算子构成了 C_2 群的 (20) 秩不可约张量算符

$$T^{(20)}_{1r00} = \nu_r,$$
$$T^{(20)}_{\frac{1}{2}q\ \frac{1}{2}p} = U_{pq},$$
$$T^{(20)}_{001r} = -\tau_r.$$

我们还可以看出，两个不可约张量 $T^{\Gamma_1}_{\gamma_1}$，$T^{\Gamma_2}_{\gamma_2}$ 可以通过下述法则构成一个不可约张量 $T^{n\Gamma}_{\gamma}$

$$T^{n\Gamma}_{\gamma} \equiv \{T^{\Gamma_1} T^{\Gamma_2}\}^{n\Gamma}_{\gamma}$$
$$= \sum_{\gamma_1\gamma_2} \left\langle \begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2\end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\Gamma \\ \gamma\end{matrix} \right\rangle T^{\Gamma_1}_{\gamma_1} T^{\Gamma_2}_{\gamma_2}. \tag{2.2-2}$$

从 (2.2-1) 可以看出 C_2 群的不可约张量 T^{Γ}_{γ} 的矩阵元 $\left\langle \begin{matrix}\Gamma_3 \\ \gamma_3\end{matrix} \middle| T^{\Gamma}_{\gamma} \middle| \begin{matrix}\Gamma_1 \\ \gamma_1\end{matrix} \right\rangle$ 与 C_2 群的约化系数 $\left\langle \begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma \\ \gamma_1 & \gamma\end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\Gamma_3 \\ \gamma_3\end{matrix} \right\rangle$ 满足的方程相同，于是有

$$\left\langle \begin{matrix}\Gamma_3 \\ \gamma_3\end{matrix} \middle| T^{\Gamma}_{\gamma} \middle| \begin{matrix}\Gamma_1 \\ \gamma_1\end{matrix} \right\rangle = \sum_{n} \langle n\Gamma_3 \| T^{\Gamma} \| \Gamma_1 \rangle \left\langle \begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma \\ \gamma_1 & \gamma\end{matrix} \middle| \begin{matrix} n\Gamma_3 \\ \gamma_3\end{matrix} \right\rangle, \tag{2.2-3}$$

系数 $\langle n\Gamma_3 \| T^{\Gamma} \| \Gamma_1 \rangle$ 称为不可约张量 T^{Γ}_{γ} 的约化矩阵元．公式 (2.2-3) 即是 C_2 群的 Wigner-Eckart 定理．

参　考　文　献

[1] G. Racah, Group Theory and Spectroscopy, Princeton, 1951.
[2] R. E. Behrends et al., *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 1.
[3] A. Salam, Theoretical Physics, p. 173, Viena, (1963).
[4] 杨国桢等，北京大学学报(自然科学版)，**10**(1964)，269.

ON THE IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF THE COMPACT SIMPLE LIE GROUPS OF RANK 2(II)

SUN HONG-ZHOU

(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, we analyse the commutation relations of the infinitesimal operators of the group C_2 and find that the ten infinitesimal operators of the group can be written as two mutually commuting sets of angular momentum operators (ν_1, ν_0, ν_{-1}), $(\tau_1, \tau_0, \tau_{-1})$, and one set of dual irreducible tensor operators of rank $(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$, $U_{\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}$. By means of their commutation relations, all irreducible representations of the group C_2 can be easily obtained.

In this paper, the matrices corresponding to the irreducible representation $(\lambda\mu)$ are given; therefore the irreducible representation $(\lambda\,\mu)$ and its representation space $R^{(\lambda\mu)}$ are completely defined. Besides, a method for calculating the scalar factors of the reduction coefficients and the symmetric relations of these factors are also given. As examples, the algebriac formulae of the scalar factors of the reduction coefficients of $(\lambda\mu) \otimes (10)$, $(\lambda\mu) \otimes (01)$ and $(\lambda\mu) \otimes (20)$ are derived.

In the last part of this paper, we define the irreducible tensor operators of the group C_2 and prove the corresponding Wigner-Eckart Theory.