第4卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 4, No. 2
1980年3月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　March, 1980

$SU(2)$ 规范理论中标量场方程的球对称解

陶福臻　　姚起元　区　智　　何志强
(中山大学)　(华南工学院)　(暨南大学)

摘　要

本文用幂级数方法给出了非线性场方程 $\partial^2\phi(x) = c\phi^3(x)$ 全部的球对称的严格解,方程的球对称通解只有三种: i) $\phi(r)=\sqrt{\frac{-1}{c}}\frac{1}{r}$; ii) $\phi(r) = \frac{a}{r^2 + A^2}$; iii) $\phi(r) = \frac{a'}{r^2 - A^2}$.

A. A. Belavin 等从自对偶条件出发找到了杨-米尔场方程的瞬子解[1]. E. Corrigan 等给出了满足罗伦兹规范的 $SU(2)$ 标量场方程，并指出瞬时子是方程的一个无奇点的解[2]. 本文用幂级数方法找出了方程在球对称情况下的通解，证明方程的球对称解只有三种：一种对应 BPST 瞬子；另一种在 $r = 0$ 时是奇异的，V. De. Alfaro 等曾讨论过这种奇异解[3]，指出这一奇异解可以推引出闵氏空间的一种新的解——DFF 半子解. 李华钟等在文献[4]中,曾用商空间的方法在 $O(4)$ 规范群下也求得这两种类型的解;方程还有第三种解,这解在 $r^2 = A^2$ 时是奇异的,关于这种解的物理讨论将在下一工作进行.

一、$SU(2)$ 规范理论中的标量场方程

杨-米尔场方程

$$D_\mu F_{a\mu\nu} \equiv \partial_\mu F_{a\mu\nu} + \varepsilon_{abc}A_{b\mu}F_{c\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

其中: $a, b, c = 1, 2, 3$. $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

$$F_{a\mu\nu} = \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} + \varepsilon_{abc}A_{b\mu}A_{c\nu}. \tag{2}$$

对罗伦兹规范:

$$\partial_\mu A_{a\mu} = 0, \tag{3}$$

下述的猜测解将自动满足

$$A_{a\mu} = \eta_{a\mu\sigma}\partial_\sigma \Pi_{ab}(x). \tag{4}$$

其中 $\Pi_{ab}(x)$ 是时空坐标的函数，$\eta_{a\mu\sigma}$ 是 t' Hoof 引入的记号,并有:

$$\eta_{a\mu\sigma} = \varepsilon_{0a\mu\sigma} + \delta_{\mu a}\delta_{\nu 0} - \delta_{\mu 0}\delta_{\nu a} \tag{5}$$

特别当 $\Pi_{ab}(x) = h(x)\delta_{ab}$ 时,规范势,规范场强分别变为:

$$A_{a\mu} = \eta_{a\mu\sigma}h_\sigma, \quad (h_\sigma \equiv \partial_\sigma h) \tag{6}$$

本文1979年2月1日收到.

$$F_{a\mu\nu}=\eta_{a\mu\nu}(h_\sigma)^2-\eta_{a\mu\sigma}(h_{\sigma\nu}+h_\sigma h_\nu)+\eta_{a\nu\sigma}(h_{\sigma\mu}+h_\sigma h_\mu), \tag{7}$$

同时杨-米尔方程变为:

$$\eta_{a\nu\sigma}[(h_{\mu\mu}-h_\mu^2)_\sigma+2h_\sigma(h_{\mu\mu}-h_\mu^2)]=0.^{1)} \tag{8}$$

我们选择 $h(x)=-\ln\phi(x)$, 方程 (8) 可积分为:

$$\partial^2\phi(x)=c\phi^3(x). \tag{9}$$

方程是在四维欧氏空间写出的,其中 c 为积分常数.

二、$\partial^2\phi(x)=c\phi^3(x)$ 的球对称解

选择四维球坐标: $\phi(\boldsymbol{x})=\phi(r,\theta,\varphi,\psi)$, 其中

$$x=r\sin\psi\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\psi\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\sin\psi\cos\theta,\quad t=r\cos\psi.$$

且有

$$r^2=x^2+y^2+z^2+t^2.$$

四维拉普拉斯算子

$$\partial^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{1}{r^3\sin^2\psi\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\sin\psi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{r}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(r\sin^2\psi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right]. \tag{10}$$

在球对称的情形下

$$\phi(\boldsymbol{x})=\phi(r).$$

方程 (9) 变为

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}=c\phi^3(r). \tag{11}$$

在 $r=\infty$ 时, 要求 $A_{a\mu}=0$, 即为: $A_{a\mu}=-\eta_{a\mu\sigma}\frac{\phi_\sigma}{\phi}=0$, 当 $r=\infty$, 故 ϕ 的边界条件可定为

$$当\quad r=\infty,\quad \phi=常数.$$

我们将这个实变量的方程放在以 r 轴为实轴的复平面上去求解,令

$$\zeta=r+i\xi. \tag{12}$$

方程 (11) 相应变为

$$\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2}+\frac{3}{\zeta}\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta}=c\phi^3(\zeta). \tag{13}$$

我们先求方程 (13) 的解,令 $\xi=0$ 即得方程 (11) 的解.

先考虑 $\phi(\zeta)$ 在 $\zeta=\infty$ 处解析的解. 将 $\phi(\zeta)$ 在 $\zeta=\infty$ 处展开:

$$\phi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^{-n}. \tag{14}$$

代入方程 (13) 可得

1) 文献 [2] 中此式有误.

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n(n+1)-3n]a_n\zeta^{-(n+2)}=c\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^{-n}\Big)^3, \tag{15}$$

比较 (15) 式左右之系数，以确定 a_0, a_n.

易见　$a_0\equiv 0$.

当 $n=1$ 时，$1/\zeta^3$ 之系数有下列关系：

$$-a_1=ca_1^3,\quad 即\quad a_1(ca_1^2+1)=0,$$

故得　$a_1=0$ 或 $a_1=\sqrt{\dfrac{-1}{c}}$.

(i) 讨论 $a_1=\sqrt{\dfrac{-1}{c}}$ 情况：

当 $n=2$, $1/\zeta^4$ 之系数有下列关系：

$$0=3ca_1^2a_2.$$

所以，$a_2=0$;

当 $n=3$, $1/\zeta^5$ 之系数有下列关系：

$$3a_3=-3a_3,$$

所以，$a_3=0$;

设　$n=k-1$ 时，$a_{k-1}=0$,

则当 $n=k$ 时，$1/\zeta^{k+2}$ 之系数有下列关系：

$$(k(k+1)-3k)a_k=3ca_1^2a_k,$$

即

$$[(k-1)^2+2]a_k=0,$$

所以，$a_k=0$.

综合上述，即已用归纳法证得：

当 $a_1=\sqrt{\dfrac{-1}{c}}$ 时，若 $k\geqslant 2$, 必有 $a_k=0$. 故求得方程 (11) 其中之一解为：

$$\phi(r)=\sqrt{\frac{-1}{c}}\,\frac{1}{r}. \tag{16}$$

(ii) 讨论 $a_1=0$ 的情况：

当 $n=2$, $1/\zeta^4$ 之系数有下列关系：

$$(b-b)a_2=3ca_1^2a_2,$$

所以由此式无法确定 a_2.

当 $n=3$, (13) 式右边 $1/\zeta^5$ 之系数为 0，所以：$a_3=0$.

当 $n=4$, $1/\zeta^6$ 之系数有下列关系：

$$8a_4=ca_2^3,$$

所以得

$$a_4=\frac{ca_2^2}{8}a_2.$$

当 $n=5$, (13) 式右边 $1/\zeta^7$ 之系数为 0，所以得：$a_5=0$.

当 $n=6$, 比较 $1/\zeta^8$ 之系数得：

$$a_6=\left(\frac{ca_2^2}{8}\right)^2a_2;\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

设 a_{2n-2} 已经求得,且 $a_1=a_3=\cdots=a_{2n-3}=0$,
则 a_{2n-1} 是方程(13)左边 $1/\zeta^{2n-1}$ 之系数,由于 $(\phi(\zeta))^3$ 中,$\phi(\zeta)$ 在 $k\leqslant(2n-1)$ 时出现之 $1/\zeta^k$ 中,k 必为偶数,故 a_{2n-1} 必为零。

故在 $\phi(\zeta)$ 中,$n=$ 奇数之系数全为零. 即

$$\phi(\zeta)=\frac{a_2}{\zeta^2}+\frac{a_4}{\zeta^4}+\frac{a_6}{\zeta^6}+\cdots+\frac{a_{2n}}{\zeta^{2n}}+\cdots.$$

下面继续用归纳法求 a_{2n}.

设 a_{2n-2} 已求得为 $a_{2n-2}=\left(\frac{ca_2^2}{8}\right)^{n-2}a_2$,于是

$$\phi(\zeta)=\frac{a_2}{\zeta^2}\left(1+\frac{ca_2^2}{\zeta^2}+\left(\frac{ca_2^2}{8}\right)^2\frac{1}{\zeta^4}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{ca_2^2}{8}\right)^{n-2}\frac{1}{\zeta^{2(n-2)}}+a'_{2n}\frac{1}{\zeta^{2n-2}}+\cdots\right).\tag{17}$$

其中 $a_{2n}=a_2a'_{2n}$. 若令 $A=\frac{ca_2^2}{8}$, $x_1=\frac{1}{\zeta^2}$. 当 n 取 $2n$ 时,方程(13)之左边为 $4n(n-1)a_{2n}\frac{1}{\zeta^{2n+2}}$,右边为 $ca_2^3x_1^3(1+Ax_1+A^2x_1^2+\cdots+A^{n-2}x_1^{n-2}+a'_{2n}x_1^{n-1}+\cdots)^3$,
注意到 $c\phi^3$ 含有 $(1/\zeta^2)^{n+1}$ 的项只能在

$$ca_2^3x_1^3(1+Ax_1+A^2x_1^2+\cdots+A^{n-2}x_1^{n-2})^3$$

中出现,而以后的项所贡献的指数一定较高,对 $(1/\zeta^2)^{n+1}$ 项的系数无贡献.

故我们可令:

$$F(x_1)=ca_2^3x_1^3(1+Ax_1+A^2x_1^2+\cdots+A^{n-2}x_1^{n-2})^3,$$

于是找寻 $c\phi^3$ 中 $(1/\zeta^2)^{n+1}$ 之系数,变为求 $F(x_1)$ 展开式中 x_1^{n+1} 之系数 $F^{(n+1)}(0)/(n+1)!$. 对比(13)式左右两边 χ_1^{n+1} 之系数,得到下列关系:

$$4n(n-1)a_{2n}=\frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}.\tag{18}$$

因为

$$(1+Ax_1+A^2x_1^2+\cdots+A^{n-2}x_1^{n-2})=\frac{1-(Ax_1)^{n-1}}{1-(Ax_1)},$$

所以

$$F(x_1)=ca_2^3x_1^3\left[\frac{1-(Ax_1)^{n-1}}{1-(Ax_1)}\right]^3,$$

即为

$$F(x_1)-3Ax_1F(x_1)+3A^2x_1^2F(x_1)-A^3x_1^3F(x_1)$$
$$=ca_2^3x_1^3-3ca_2^3x_1^3(Ax_1)^{n-1}+3ca_2^3x_1^3(Ax_1)^{2n-2}-ca_2^3x_1^3(Ax_1)^{3(n-1)}.$$

两边对 x_1 求 $(n+1)$ 阶导数,然后令 $x_1=0$,易证该等式右边为零. 在计算左边时先由归纳法可证得关系:

$$(x_1F)^{(n+1)}=(n+1)F^{(n)}+x_1F^{(n+1)},$$

$$(x_1^2F)^{(n+1)} = n(n+1)F^{(n-1)} + 2(n+1)x_1F^{(n)} + x_1^2F^{(n+1)},$$
$$(x_1^3F)^{(n+1)} = n(n-1)(n+1)F^{(n-2)} + 3n(n+1)x_1F^{(n-1)} + 3(n+1)x_1^2F^{(n)} + x_1^3F^{(n+1)}.$$

利用上述关系，等式左边整理为：

$$F^{(n+1)}(0) - 3A(n+1)F^{(n)}(0) + 3A^2n(n+1)F^{(n-1)}(0) - A^3n(n-1)(n+1)F^{(n-2)}(0)$$

注意到右边为零，由此可得：

$$\frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = 3A\frac{F^{(n)}(0)}{n!} - 3A^2\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + A^3\frac{F^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}. \tag{19}$$

将 (18) 式中的 n 分别取值为 $n, n-1, n-2, n-3$ 得

$$\frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = 4n(n-1)a_{2n}, \quad \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = 4(n-1)(n-2)a_{2(n-1)}$$
$$\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} = 4(n-2)(n-3)a_{2(n-2)}, \quad \frac{F^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} = 4(n-3)(n-4)a_{2(n-3)}. \tag{20}$$

将 (20) 式代入 (19) 式得：

$$a_{2n} = A^{n-1}a_2 = \left(\frac{ca_2^2}{8}\right)^{n-1}a_2.$$

于是，我们证明了，当 $a_1 = 0$ 时，方程 (13) 在 $\zeta = \infty$ 处解析的解为

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ca_2^2}{8}\right)^{n-1}a_2\zeta^{-2n}. \tag{21}$$

此级数之收敛半径为

$$\rho = \frac{ca_2^2}{8}. \tag{22}$$

当 $\zeta > \rho$ 时，级数 (21) 收敛，并可写为

$$\phi(\zeta) = \frac{a_2}{\zeta^2 - \frac{ca_2^2}{8}}. \tag{23}$$

再考虑 $\phi(\zeta)$ 在 $\zeta = 0$ 处解析的解，将 $\phi(\zeta)$ 在 $\zeta = 0$ 处展开

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^n, \tag{24}$$

代入方程 (13) 可得

$$3b_1\frac{1}{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+4)b_{n+2}\zeta^n = c\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^n\right)^3. \tag{25}$$

比较 (25) 式的同次幂系数，用类似以前的方法，可得

$$b_n = 0, \quad (\text{当} \quad n = 2k+1, \quad k = 1, 2, \cdots) \tag{26}$$

$$b_{2m} = \left(\frac{cb_0^2}{8}\right)^{2m}b_0, \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{27}$$

即

$$\phi(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cb_0^2}{8}\right)^n b_0\zeta^{2n}. \tag{28}$$

级数 (28) 之收敛半径为 $\rho=\frac{8}{cb_0^2}$, 当 $\zeta<\frac{8}{cb_0^2}$ 级数收敛,并可写为

$$\phi(\zeta)=\frac{b_0}{1-\frac{cb_0^2}{8}\zeta^2}=\frac{-\frac{8}{cb_0}}{\zeta^2-\frac{8}{cb_0^2}}. \tag{29}$$

对比 (23) 与 (29) 式,若令

$$\eta=\frac{ca_2^2}{8}=\frac{8}{cb_0^2}, \tag{30}$$

并选取 a_2 与 b_0 反号,则 (23) 与 (29) 可表为相同的表达式:

$$\phi(\zeta)=\pm\sqrt{\frac{8\eta}{c}}\frac{1}{\zeta^2-\eta}. \tag{31}$$

即除 $\zeta^2=\eta$ 外,在整个复平面上 (31) 式是方程 (13) 的解. 于是我们求得在 $r=\infty$ 处解析(满足边界条件)的方程 (9) 的全部球对称解为

$$\phi(r)=\sqrt{\frac{-1}{c}}\cdot\frac{1}{r}, \tag{32}$$

与

$$\phi(r)=\pm\sqrt{\frac{8\eta}{c}}\frac{1}{r^2-\eta}. \tag{33}$$

当选择常数 a_2, 使得 $\frac{ca_2^2}{8}<0$, 则 (33) 式可写为

$$\phi(r)=\frac{a_2}{r^2+A^2}, \quad 其中 \quad A^2>0. \tag{34}$$

当选择常数 a_2, 使得 $\frac{ca_2^2}{8}>0$, 则 (33) 式可写为

$$\phi(r)=\frac{a_2}{r^2-A^2}. \quad 其中 \quad A^2>0 \tag{35}$$

三、讨　论

我们证明了 $\partial^2\phi=c\phi^3$ 非线性方程的球对称解有且只有三种:

1. $\phi(r)=\frac{a_2}{r^2+A^2}$,

这解在 E^4 空间是处处正则的,并且就是 BPST 瞬子解.

2. $\phi(r)=\sqrt{\frac{-1}{c}}\cdot\frac{1}{r}$,

这解在 $r=0$ 处奇异,在 M^4 空间,这是一个在光锥上以光速传播的 Soliton[5].

V. De. Alfaro 等曾论证[3]，从这奇异解出发，通过共形变换，可以推引出杨-米尔场在 M^4 空间的一种新解——半子解.

$$3.\ \phi(r) = \frac{a_2}{r^2 - A^2},$$

此解当 $r^2 = A^2$ 时奇异，对它的物理讨论将在下一工作中进行.

我们的讨论是在 E^4 空间中进行的，但在 M^4 空间结论是一样的.

我们仅讨论了非线性方程 $\partial^2\phi = c\phi^3$ 的球对称解，但这方程是否还有其它非球对称的 Soliton 解？值得我们进一步考虑.

参　考　文　献

[1] A. A. Belavin et al., *Phys. Lett.*, **59B** (1975), 85.
[2] E. Corrigan et al., *Phys. Lett.*, **67B** (1977), 69.
[3] V. De. Alfaro et al., *Phys. Lett.*, **65B** (1976), 163.
[4] 李华钟、冼鼎昌、郭硕鸿，高能物理与核物理，**2** (1978), 23.
[5] 卢文等："非线性偏微分方程的 Soliton 解"，中山大学引力研究室预印本，1977 年 10 月.

THE SPHERICAL SOLUTIONS OF THE SCALAR FIELD EQUATION IN *SU* (2) GAUGE FIELD THEORY

TAO FU-ZHEN
(*Zhongshan University*)

YAO QI-YUAN　OU ZHI
(*Huanan Institute of Technology*)

HE ZHI-QIANG
(*Jinan University*)

ABSTRACT

In this paper, using the method of power series expansion, all spherical symmetric exact solutions of the non-linear equation $\partial^2\phi(x) = c\phi^3(x)$ are given. These solutions fall into three types:

$$\text{i)}\ \phi(r) = \sqrt{\frac{-1}{c}}\,\frac{1}{r}\,;\quad \text{ii)}\ \phi(r) = \frac{a}{r^2 + A^2}\,;\quad \text{iii)}\ \phi(r) = \frac{a'}{r^2 - A^2}\,.$$