第4卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 4
1980年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1980

自逆反易矩阵和变换法求本征值

朱 栋 培
（中国科学技术大学）

摘 要

我们找出了由反易自逆矩阵荷载的转动群表示，统一地推广处理了 Foldy-Wouthuysen, Cini-Tauschek, Chakrabarti 等提出的各种变换；建立了一个几何图像，借助于它可以很容易地找到所要求的变换；举例说明了这方法在本征值问题中的应用。

一、引 言

在场论中，有许多方程是用自逆的、相互反对易的矩阵表示的。例如著名的 Dirac 方程

$$(i\gamma_\mu p_\mu + m)\phi = 0 \tag{1}$$

中的 γ_μ 就是四个自逆反易矩阵。又如 Taketani 和 Sakata[1] 等得到的 0^-、1^- 粒子在电磁场中运动的方程

$$\left.\begin{aligned} &i\partial_t\phi = H\phi, \\ &H = e\phi + \sigma_3\left\{m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right\} \\ &\qquad + i\sigma_1\left\{\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2/m - \frac{e}{2m}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

中的 σ_3、σ_1 即为反易自逆的 Pauli 矩阵。另外，Weaver, Hammer 和 Good[2] 也提出过一种高自旋方程

$$i\partial_t\phi = H_s\phi. \tag{3}$$

对于 1^- 粒子和 $\frac{3}{2}^-$ 粒子，H_s 中所包含的矩阵 $\boldsymbol{\alpha}'$ 和 β' 之间也是反对易的。

求这样一些方程的本征值，当然可以直接解方程，但是也可以用一些变换把方程对角化，从而比较容易地求出本征值来。在 Dirac 方程的情形，著名的 Foldy-Wouthuysen 变换[3]、Cini-Touschek 变换[4]以及其它如 Chakrabarti 变换[5]等都是属于这一类。在有相互作用的时候，如何应用这一类变换，也有过不少讨论，但只限于荷电粒子在均匀稳定磁场中的运动。一个有意义的方向是，如何把这类变换用到强子结构问题中去。

鉴于这类变换在解问题上的方便性和它在理论上的意义，在 F-W 变换提出以后，不少人提出了各种各样的变换，有的是么正的，有的则不是，并且证明了存在无穷多种变换。但是这些变换的提出都是孤立的，缺乏用统一的观点来推求这些结果。本文试图用一个

本文1979年3月6日收到。

统一的出发点来处理这个问题.

其实,很大一部分本征值问题可以归结为下面算符 I 的本征值问题

$$I = \sum_{i=1}^{l+1} e_i f_i. \tag{4}$$

这里 e_i 是时空坐标或其它宗量的算符, f_i 则是满足自逆反易关系的 n 阶矩阵

$$\{f_i, f_j\} = 2\delta_{ij}. \tag{5}$$

因此,用变换法求本征值,就是求使 (4) 对角化的变换矩阵.

在第二节中,我们从同步不变的观点证明了 f_i 可以荷载一个 O_{l+1} 群的表示,并求得表示的矩阵;特别讨论了把 (4) 转到一个轴上的转动; 用到 Dirac 情形,除了得到先前提出过的各种变换外,还可以得到一个新的变换.

在第三节中,讨论了带不可易算子的 I 的对角化变换,为有相互作用时的应用作准备.

在第四节中具体讨论了这个一般模式的若干应用.

二、反易自逆矩阵荷载的转动群表示

在本节中,假定 e_i 之间彼此可以对易; 对反易自逆矩阵 f_i, 可不失一般性地假定: $l+1$ 个 f_i 是不可约的反易自逆矩阵组. 因此,如果矩阵的阶 $n = 2^q$, 则 $l \leqslant 2q$[6].

(4) 中的 e_i, f_i 可看作二个空间中的矢量, I 是它们的"内积". 如果在转动下,这二个矢量按同一方式同时转动,则 I 不变. 这种在二个空间中作同步变换而不变的量可以称为同步不变量. 我们用这一个观点来寻找 f_i 所荷载的转动群表示.

e_i 在转动 O 下如 $(l+1)$ 维矢量那样变换

$$e_i' = O e_i O^{-1} = a_{ij} e_j \equiv \sum_{j=1}^{l+1} a_{ij} e_j. \tag{6}$$

这里, a_{ij} 是 $l+1$ 维复空间转动群 O_{l+1} 的矢量表示矩阵元

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}. \tag{7}$$

要求 I 在 O_{l+1} 下同步不变,则当有

$$O I O^{-1} = I. \tag{8}$$

利用 (6) 和 (7) 得

$$O f_i O^{-1} = a_{ij} f_j. \tag{9}$$

为了求出 f 矩阵荷载的转动 O 的具体表示 T, 我们可以考虑无穷小变换,这时

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}, \tag{10}$$

相应于 a, 在矩阵空间诱导的表示为

$$T = 1 + \frac{i}{2} \epsilon_{ij} S_{ij}, \quad T^{-1} = 1 - \frac{i}{2} \epsilon_{ij} S_{ij}, \tag{11}$$

其中, S_{ij} 满足关系

$$i[S_{jk}, f_i] = \delta_{ij} f_k - \delta_{ik} f_j. \tag{12}$$

(12) 的解为

$$S_{jk}=\frac{i}{2}(f_jf_k-\delta_{jk})=\frac{i}{4}[f_j,f_k],\tag{13}$$

它是厄米的。

这样，我们确实找到了一个表示，在此变换下，f_i 如同一个 $(l+1)$ 维矢量那样变换。

在一般有限变换下，有

$$T=\exp\left(\frac{i}{2}\epsilon_{ij}S_{ij}\right),\quad S_{ij}=\frac{i}{4}[f_i,f_j],\quad Tf_iT^{-1}=a_{ij}f_j.\tag{14}$$

由于 f_i 中有的是对角的(或块对角的)，称为偶的或好的[3]，有的是斜对角的，称为奇的或坏的。那么，把 I 对角化的问题，就化为寻找适当的 $\epsilon_{ij}(a_{ij})$ 把 I 转到偶的 f 的轴上去。

我们首先考虑 I 到一个轴的变换。从反易矩阵的一般知识知道，只有一个 f 阵是全对角的。不妨设此阵为 f_{l+1}，我们考虑转到 f_{l+1} 轴上的转动。由 ϵ_{ij} 的意义知道，这时只要取

$$\epsilon_{ij}=0,\quad (i,j=1,2,\cdots,l)\qquad \epsilon_{i\,l+1}=-\epsilon_{l+1\,i}\neq 0$$

就行了。为方便起见，令

$$\epsilon_{i\,l+1}=\xi_i,\quad S_{i\,l+1}=\frac{1}{2}Q_i\quad (i=1,2,\cdots,l)\tag{15}$$

于是，由 (14) 得

$$Q_i=if_if_{l+1},\quad \{Q_i,Q_j\}=2\delta_{ij}.\tag{16}$$

Q_i 是 l 个反易自逆矩阵。(14) 变为

$$T=\exp\left(\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{l}\xi_iQ_i\right)\equiv\exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{Q}\right),\tag{17}$$

$$\boldsymbol{\xi}\equiv(\xi_1,\cdots,\xi_l),\quad \boldsymbol{Q}\equiv(Q_1,\cdots,Q_l).$$

把 (17) 展开为

$$T=\cos\frac{\xi}{2}+\frac{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{Q}}{\xi}\sin\frac{\xi}{2},\tag{18}$$

这里，$\xi^2=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}$。

在变换 (18) 下，f_i 作如下变化

$$Tf_iT^{-1}=f_i-\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\delta_{i\,l+1}+2\frac{\sin^2\dfrac{\xi}{2}}{\xi^2}\xi_i\right)\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{f}+\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\xi_i-2\sin^2\frac{\xi}{2}\delta_{i\,l+1}\right)f_{l+1},\tag{19}$$

(记住，$\xi_{l+1}=0$)。同时我们有

$$TIT^{-1}=e_iTf_iT^{-1}=\left[\boldsymbol{e}-\left(\frac{\sin\xi}{\xi}e_{l+1}+\frac{2\sin^2\dfrac{\xi}{2}}{\xi^2}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\xi})\right)\boldsymbol{\xi}\right]\cdot\boldsymbol{f}$$
$$+\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\xi}+\cos\xi e_{l+1}\right)f_{l+1}\tag{20}$$

这里 $\boldsymbol{e}=(e_1,\cdots,e_l)$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_l)$。

(20) 是我们的基本式子，我们由此来讨论各种变换。

1. 全对角化．此时，要求 I 在转动后，没有 $\boldsymbol{f}$ 上的投影，即

$$\boldsymbol{e}-\left(\frac{\sin\xi}{\xi}e_{l+1}+\frac{2\sin^2\frac{\xi}{2}}{\xi^2}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\xi}=0. \tag{21}$$

以 $\boldsymbol{\xi}$ 点乘，考虑到 $\boldsymbol{\xi}$ 平行 $\boldsymbol{e}$，可得

$$\operatorname{tg}\xi=\frac{|\boldsymbol{e}|}{e_{l+1}}. \tag{22}$$

这样，(20) 式中 f_{l+1} 前的系数为

$$\frac{\sin\xi}{\xi}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\xi}+\cos\xi e_{l+1}=\sqrt{\boldsymbol{e}^2+e_{l+1}^2}=|I| \tag{23}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&T=\exp\left(-\frac{\xi}{2}\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f}}{|\boldsymbol{e}|}f_{l+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2|I|(|I|+e_{l+1})}}(|I|+e_{l+1}-\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f}f_{l+1}),\\&Te_if_iT^{-1}=\frac{e_{l+1}}{\cos\xi}f_{l+1}=\sqrt{|\boldsymbol{e}|^2+e_{l+1}^2}\,f_{l+1},\ \operatorname{tg}\xi=\frac{|\boldsymbol{e}|}{e_{l+1}}.\end{aligned}\right. \tag{24}$$

我们来看这一变换的几何意义．I 可被看作 f 空间的一个矢量，它的模方为

$$I^2=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}+e_{l+1}^2. \tag{25}$$

可见，e_{l+1} 是它在 f_{l+1} 轴上的投影，而 $\boldsymbol{e}$ 则是它在垂直于 f_{l+1} 轴的超平面内的投影．因此，ξ 就是 I 与 f_{l+1} 轴的夹角（图 1）．

$$e_{l+1}/\cos\xi=|I|=\sqrt{\boldsymbol{e}^2+e_{l+1}^2} \tag{26}$$

即为矢量 I 的模．变换 (24) 的几何意义为：把 I 绕垂直于 f_{l+1} 的方向作一旋转，转过 I 与 f_{l+1} 之间的夹角，就把 I 转到了 f_{l+1} 轴上．当然，这时 I 在 f_{l+1} 轴上的投影就是 I 的模长．借助于这种几何图象，我们可以容易地找到所需要的变换．

另外还要说明一点．如果在 $M(l,1)$ 空间，即有一维纯虚（相应算符反厄米），此时，I^2 可能为负数，我们规定

$$\sqrt{I^2}=i\sqrt{-I^2}=iI_0,\quad I_0=\sqrt{-I^2}. \tag{27}$$

利用关系

$$\operatorname{tg}^{-1}(-iw)=-i\operatorname{th}^{-1}w \tag{28}$$

及

$$\operatorname{ch}(iw)=\cos w,\quad \operatorname{sh}(iw)=i\sin w, \tag{29}$$

就可以得到相应的变换．例如，如果上面 $\boldsymbol{e}$ 是厄米的，而 e_{l+1} 是反厄米的，那么

$$\xi=\operatorname{tg}^{-1}\frac{|\boldsymbol{e}|}{e_{l+1}}=-iw,\quad w=\operatorname{th}^{-1}[|\boldsymbol{e}|/(-ie_{l+1})],\quad \cos\xi=\cos(-iw)=\operatorname{ch}w, \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}&T=\exp\left(\frac{w}{2}\frac{i\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f}}{|\boldsymbol{e}|}f_{l+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2I_0(I_0+|e_0|)}}(I_0+|e_0|+\varepsilon(e_0)\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{Q}),\\&Te_if_iT^{-1}=\frac{e_{l+1}}{\operatorname{ch}w}f_{l+1}=i\varepsilon(e_0)\sqrt{-I^2}f_{l+1},\\&\operatorname{th}w=\frac{|\boldsymbol{e}|}{-ie_{l+1}}=\frac{|\boldsymbol{e}|}{e_0},\quad e_0=-ie_{l+1},\quad \varepsilon(e_0)=\frac{e_0}{|e_0|},\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

但这时，变换 (31) 不是么正的了．

2. 块对角化．从 (20) 看，显然还有一种变换，可以说与上面的变换互余，即把 I 转到与 f_{l+1} 轴垂直的超面中去．这时，只要令 f_{l+1} 前的系数为零就可以了，我们有

$$\boldsymbol{e}\cdot\frac{\boldsymbol{\xi}'}{\xi'}\operatorname{tg}\xi' = -e_{l+1}, \tag{32}$$

满足此方程的 ξ' 很多，为容易解起见，不妨假定 $\boldsymbol{\xi}'$ 反平行于 $\boldsymbol{e}$，此时

$$\operatorname{tg}\xi' = \frac{e_{l+1}}{|\boldsymbol{e}|}. \tag{33}$$

$\boldsymbol{f}$ 前的系数为

$$\boldsymbol{e} - \left(\sin\xi' e_{l+1} + 2\sin^2\frac{\xi'}{2}\boldsymbol{e}\cdot\frac{\boldsymbol{\xi}'}{\xi'}\right)\frac{\boldsymbol{\xi}'}{\xi'} = \frac{\boldsymbol{e}}{\cos\xi'}, \tag{34}$$

于是最后有

$$\begin{gathered} T = \exp\left(-\frac{i}{2}\xi'\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{Q}}{|\boldsymbol{e}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2|I|(|I|+\epsilon|\boldsymbol{e}|)}}\left(|I| + \epsilon|\boldsymbol{e}| + \frac{|e_{l+1}|}{|\boldsymbol{e}|}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f}f_{l+1}\right), \\ Te_if_iT^{-1} = \frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f}}{\cos\xi'} = \epsilon\sqrt{\boldsymbol{e}^2+e_{l+1}^2}\,\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f}}{|\boldsymbol{e}|},\quad \operatorname{tg}\xi' = \frac{e_{l+1}}{|\boldsymbol{e}|},\quad \epsilon = \epsilon(e_{l+1}) = \frac{e_{l+1}}{|e_{l+1}|}. \end{gathered} \tag{35}$$

和前面一样，这个转角 ξ' 正是前面转角的余角，不过转的方向相反，故转角前还要出一个负号．

3. 如果 I 中没有包含全部 n 阶反易自逆矩阵，那么还可以有其它形式的变换使之全对角化．因为这时 I 在 f 矩阵空间中只在某个超面里，有的轴上没有分量，我们可以把 I 全转到这种轴上．例如，

设
$$I = \sum_{i=1}^{l+1} e_if_i,\quad l < 2q, \tag{36}$$

设 f_{2q+1} 是另一个与 $f_i(i=1,2,\cdots,l+1)$ 反易的自逆矩阵，那么转 $\frac{\pi}{2}$ 角就把 I 转到 f_{2q+1} 轴上（符号 ϵ 为保证正向转动）

$$T = \exp\left(\frac{i}{2}\frac{\pi}{2}\frac{i\epsilon I}{|I|}f_{2q+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\epsilon}{|I|}f_{2q+1}I\right), \tag{37}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\epsilon}{|I|}f_{2q+1}I\right), \tag{38}$$

$$TIT^{-1} = \epsilon|I|f_{2q+1} = \epsilon\sqrt{e_ie_i}\,f_{2q+1}. \tag{39}$$

由于 T 中因子 $I/|I|$ 不变 I，所以

$$T' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{I}{|I|} + \epsilon f_{2q+1}\right) \tag{40}$$

就可达到同一转动效果．

三、带不可易算子的转动

如果 (4) 中的 e_i 不是全可对易的，那么就不能像前面那样变换．不妨把不可对易的

算子记为 K_i，可易的则仍记为 e_i. 相应地把 I 改写为

$$I=\sum_{i=1}^{m}K_if_i+\sum_{j=m+1}^{l+1}e_jg_j, \tag{41}$$

这里

$$g_j\equiv f_j,\quad (j=m+1,\cdots,l+1),$$

e_i 与 K_i 之间可以对易. 这时

$$I^2=K^2+\boldsymbol{e}^2+e_{l+1}^2,\ K^2=\left(\sum_{i=1}^{m}K_if_i\right)^2=(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{f})^2,\ \boldsymbol{e}=(e_{m+1},\cdots,e_l),$$
$$\boldsymbol{e}^2=(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{g})^2 \tag{42}$$

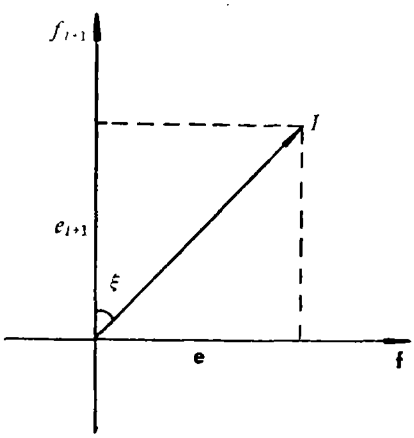

图 1

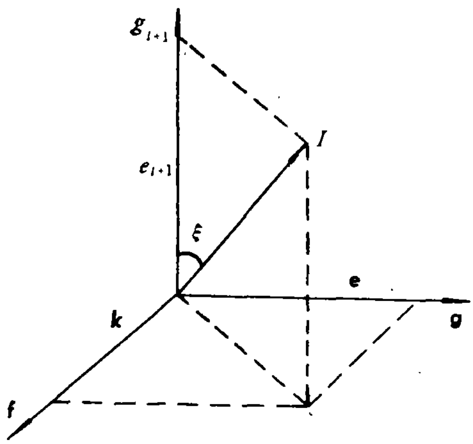

图 2

易证 K^2 与 e_jg_j 可以对易，因而与 I 本身也可以对易. 从 (42) 可以看出，I 可看作以 (K, $\boldsymbol{e}$, e_{l+1}) 为坐标的矢量 (图 2). 如果要把 I 转到 g_{l+1} 轴上，则相应变换为

$$T=\exp\left(-\frac{1}{2}\xi\frac{(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{f}+\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{g})}{\sqrt{K^2+\boldsymbol{e}^2}}g_{l+1}\right),\ TIT^{-1}=\frac{e_{l+1}}{\cos\xi}g_{l+1},\ \mathrm{tg}\,\xi=\sqrt{\boldsymbol{e}^2+K^2}/e_{l+1}. \tag{43}$$

四、应 用 举 例

应用各种变换去解决本征值问题，已涉及到各种自旋的情形. 由于最大量的问题是讨论 Dirac 电子，作为上面的一般框架的应用的一个例子，我们也只讨论 Dirac 电子.

1. 自由电子

Dirac 方程 (1) 的哈密顿形式为

$$p_0\psi=i\partial_t\psi=H\psi,\quad H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m. \tag{44}$$

(i) 先看 p_0 线性形式的变换. 这时选

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\alpha},\quad f_{l+1}=f_4=\beta,\quad \boldsymbol{e}=\boldsymbol{p},\quad e_{l+1}=e_4=m,\quad I=H,$$

于是，把 H 全转到 β 轴上的变换为 (由 (24) 式)

$$\left.\begin{aligned} &T=\exp\left(\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}\right)\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{p}|}\right),\quad \boldsymbol{\gamma}=i\boldsymbol{\alpha}\beta,\\ &\mathrm{tg}\,\xi=\frac{|\boldsymbol{p}|}{m},\quad THT^{-1}=|I|\beta=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\beta. \end{aligned}\right\}\tag{45}$$

Dirac 方程变为

$$i\partial_t\psi'=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\beta\psi',\quad \psi'=T\psi\tag{46}$$

(45) 中的变换就是熟知的 Foldy-Wouthuysen 变换。

(ii) 如果把H转到$\boldsymbol{\alpha}$平面中，则由 (35) 式。变换为

$$\left.\begin{aligned} &T=\exp\left(-\frac{i}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}\right)\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{p}|}\right),\quad \mathrm{tg}\,\xi'=\frac{m}{|\boldsymbol{p}|},\\ &THT^{-1}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{p}|}. \end{aligned}\right\}\tag{47}$$

这就是 Cini-Touschek 变换。

(iii) 由于 Dirac 方程中只含有 4 个反易自逆阵而四阶矩阵中共有 $2\times2+1=5$ 个这样的矩阵，因此可以按照第二节 3 中的办法把H全转到它所没有分量的一个轴上。不妨选此第 5 轴为

$$\alpha_5=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta=-i\gamma_5\beta.\tag{48}$$

由 (37) 这个变换为

$$T=\exp\left(i\frac{\pi}{4}\frac{iH}{|H|}\alpha_5\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+m\beta}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}}+\alpha_5\right)\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}},\tag{49}$$

$$THT^{-1}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\,\alpha_5,\tag{50}$$

于是方程变为

$$i\partial_t\psi'=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\,\alpha_5\psi'.\tag{51}$$

由于 (49) 中最后一个因子不变 H，于是由 (40)，这个变换也可选为

$$T'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{H}{|H|}+\alpha_5\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}}+\alpha_5\right).\tag{52}$$

结果是一样的，但这样缺乏明确的转动意义。(52) 就是 Moss[7] 等所采用过的变换。

(iv) 再来看m线性的情形。此时可用形式 (1)，选

$$\left.\begin{aligned} &I=\gamma_\mu p_\mu,\\ &\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\gamma},\quad \boldsymbol{e}=\boldsymbol{p},\quad f_4=\gamma_4,\quad e_4=p_4=ip_0. \end{aligned}\right\}\tag{53}$$

由于 p_4 是反厄米算符，由 (31) 式，转到 γ_4 轴上的变换为

$$\left.\begin{aligned} &T=\exp\left(-\frac{w}{2}\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)=\frac{1}{\sqrt{2I_0(I_0+|p_0|)}}(I_0+|p_0|-\varepsilon(p_0)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}),\\ &\mathrm{th}\,w=\frac{|\boldsymbol{p}|}{p_0},\quad I_0=\sqrt{p_0^2-\boldsymbol{p}^2}=\sqrt{-p_\mu p_\mu},\\ &TIT^{-1}=i\varepsilon(p_0)\cdot\sqrt{p_0^2-\boldsymbol{p}^2}\,\gamma_4. \end{aligned}\right\}\tag{54}$$

方程变为

$$m\psi' = \epsilon(p_0)\sqrt{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2}\,\gamma_4\psi', \tag{55}$$

变换 (54) 就是 Chakrabarti[5] 所用的变换.

(v) 同样，由于 I 中只用了四个反易自逆阵，我们可以采用另一种变换把 I 全转到 γ_5 轴上去.

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \quad T = \exp\left(i\frac{\pi}{4} i\epsilon(p_0)\frac{I\gamma_5}{|I|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + i\epsilon(p_0)\frac{I\gamma_5}{I_0}\right), \tag{56}$$

$$TIT^{-1} = i\epsilon(p_0)I_0\gamma_5 = i\epsilon(p_0)\sqrt{-p_\mu p_\mu}\,\gamma_5, \tag{57}$$

方程变为

$$m\psi' = \epsilon(p_0)\sqrt{-p_\mu p_\mu}\,\gamma_5\psi'. \tag{58}$$

变换 (56) 还没有见人用过. 显然,下面的去了因子 $\frac{I}{I_0}$ 的变换可达到同样目的:

$$T' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{I}{I_0} - i\epsilon(p_0)\gamma_5\right). \tag{59}$$

有了 m 线性形式,其它 p_i 线性形式也可以得到,这里不再重复.

2. 电子在均匀静磁场中运动

此时电子的运动方程为

$$i\partial_t\psi = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + m\beta)\psi, \tag{60}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0,\right), \\ &\boldsymbol{B} = (0, 0, B), \\ &\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp + \alpha_3\pi_3, = \boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi} + \alpha_3 p_3 (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 = \boldsymbol{\pi}_\perp^2 + p_3^2 - e\Sigma_3 B, \\ &\Sigma_3 = -i\gamma_1\gamma_2. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

$\boldsymbol{A}$ 为矢势, B 为外磁场, Σ_3 为自旋算符第三分量的二倍.

要求电子的能量,可以直接解本征值问题,也可先作变换. 再读出本征值来. 取

$$I = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + m\beta = \boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp + \alpha_3 p_3 + m\beta, \tag{62}$$

这里遇到了带不可易算子的分量,因为

$$[\pi_1, \pi_2] = ieB, \tag{63}$$

于是根据第三节 (43) 式,把 I 转到 β 轴上的变换为

$$T = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2}}{m}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}\beta}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2}}\right), \tag{64}$$

$$TIT^{-1} = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + m^2}\,\beta = \sqrt{\pi_\perp^2 - e\Sigma_3 B + p_3^2 + m^2}\,\beta. \tag{65}$$

方程 (60) 变为

$$i\partial_t\psi' = \sqrt{\pi_\perp^2 - e\Sigma_3 B + p_3^2 + m^2}\,\beta\psi', \tag{66}$$

这时, $\pi_\perp^2$, $\Sigma_3 B$, p_3 都是可以互相对易的,可以用它们的共同本征波函数求解. 利用量子化条件

$$\pi_\perp^2 = (2n+1)eB, \quad n = 0, 1, \cdots \tag{67}$$

可得电子在均匀常磁场中的能量本征值为

$$E_n = \pm\{m^2 + p_3^2 + (2n + 1 - \Sigma_3)eB\}^{\frac{1}{2}}. \tag{68}$$

这里 Σ_3 是代表算符 Σ_3 的本征值,取 ± 1.

由于 (62) 中只有四个四阶反易自逆阵,因此还可以用变换 (37) 把 I 转到第 5 轴上,得到的结果是一样的.

3. 电子有反常磁矩的情形

在均匀常磁场中的电子有一反常磁矩,此时运动方程为

$$\begin{aligned} p_0\psi = i\partial_t\psi &= \left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + m\beta + \frac{e\kappa}{4m}\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right)\psi \\ &= \left(\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp + \alpha_3 p_3 + m\beta + \frac{e\kappa}{4m}\beta\Sigma_3 B\right)\psi = H\psi \end{aligned} \tag{69}$$

κ 即为反常磁矩.

正确的能量本征值,可以从方程解[8],也可用平方哈氏量的方法求[9]. Tsai 等[10] 用变换法把 (69) 变到一个差不多对角的形式,然后再平方求出本征值. 下面我们利用包含在 (69) 中的矩阵的特点来寻找二种变换.

和以前不同,(69) 中包含了矩阵 $\beta\Sigma_3$,它有如下性质:

$$[\beta\Sigma_3, \boldsymbol{\alpha}_\perp] = 0, \quad [\beta\Sigma_3, \beta] = 0, \quad \{\beta\Sigma_3, \alpha_3\} = 0, \quad (\beta\Sigma_3)^2 = 1. \tag{70}$$

利用 (70) 的头二式,可以知道,如果先在 $\boldsymbol{\alpha}_\perp$ 和 β 之间转动,则 α_3, $\beta\Sigma_3$ 是不变的. 于是先取

$$T_1 = \exp\left(\frac{i}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{|\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp|}{m}\right)\cdot\frac{i\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp}{|\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp|}\beta\right), \tag{71}$$

$$p_0' = T_1 p_0 T_1^{-1} = \alpha_3 p_3 + \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp)^2 + m^2}\beta + \frac{e\kappa B}{4m}\beta\Sigma_3, \tag{72}$$

这就是 Tsai 变换的结果. 再进一步,利用 α_3 与 β, $\beta\Sigma_3$ 都反对易的特点,我们可以把(72) 中的后二项全部转到 α_3 上去,即取变换

$$T_2 = \exp\left\{\frac{i}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\xi}{|p_3|}\right)\frac{i}{\xi}\left(\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp)^2 + m^2}\beta + \frac{e\kappa B}{4m}\beta\Sigma_3\right)\alpha_3\right\}, \tag{73}$$

$$p_0'' = T_2 p_0' T_2^{-1} = \sqrt{\xi^2 + p_3^2}\,\alpha_3, \tag{74}$$

$$\xi^2 = \left(\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp)^2 + m^2}\beta + \frac{e\kappa B}{4m}\beta\Sigma_3\right)^2 = \left(\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp)^2 + m^2} + \frac{e\kappa B}{4m}\Sigma_3\right)^2. \tag{75}$$

这时方程变为

$$i\partial_t\psi'' = \sqrt{\xi^2 + p_3^2}\,\alpha_3\psi'', \tag{76}$$

由量子化条件 (67), 从 (75)、(76) 马上可读出能量本征值来

$$E_n = \pm\left\{p_3^2 + \left[((2n + 1)eB - e\Sigma_3 B + m^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{e\kappa B}{4m}\Sigma_3\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{77}$$

这样,利用变换

$$T = T_2 T_1, \tag{78}$$

就可以一步得到 (76), 从而求得本征值.

还可以有另一种变换,这就是把 p_0 一步转到 α_5 轴上,这个变换为

$$T = \exp\left\{-\frac{\pi}{4}\frac{H\alpha_5}{|H|}\right\}, \tag{79}$$

$$p_0' = THT^{-1} = |H|\alpha_5. \tag{80}$$

令 $\eta = \frac{e\kappa}{4m}B$，由(69)可得

$$H^2 = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + m^2 + \eta^2 + 2\eta\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp)^2 + m^2} = p_3^2 + \left(\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp)^2 + m^2} + \eta\right)^2,$$

$$|H| = \left[p_3^2 + \left(\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_\perp\cdot\boldsymbol{\pi}_\perp)^2 + m^2} + \eta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{81}$$

这样又得到了前面的结果．这与平方哈氏量法是一样的，不过变换为平方法提供了一个契机．

参考文献

[1] M. Taketani and S. Sakata, *Phys. Math. Soc.*, **22**(1940), 757; I. Tamm, *Compt. rend. acad. Sci.*, **29**(1940), 551; W. Heitler, Proc. Roy. Irish Acad., **49**(1943), 1.
[2] D. L. Weaver, C. L. Hammer and R. H. Good, *Jr. Phys. Rev.*, **B241**(1964), 135.
[3] L. L. Foldy and Wouthuysen, *Phys. Rev.*, **78**(1950), 29.
[4] M. Cini and Touschek, *Nuovo Cimento*, **7**(1958), 422.
[5] A. Chakrabarti, *J. Math. Phys.*, **4**(1963), 1215.
[6] 朱栋培，中国科学技术大学学报，1975年第2期。
[7] R. E. Moss and A. Okainski, *Phys. Rev.*, **14**(1976), 3358.
[8] И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. Ч. Жуковский, Вестник Московского Университета, 1(1966), 30.
[9] W. Tsai and A. Yidizk, *Phys. Rev.*, **D4**(1971), 3643.
[10] W. Y. Tsai, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 1945.

THE ANTI-COMMUTATIVE, SELF-INVERSE MATRICES AND THE TRANSFORMATIONS IN EIGENVALUE PROBLEM

ZHU DONG-PEI
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

With a representation of the rotation group induced by the anti-commutative, self-inverse matrices the transformations named by Foldy-Wouthuysen, Cini-Taschek, Chakrabarti and the others are treated from a unified viewpoint. A new transformation is found. Some applications of this method in the eigenvalue problems are demonstrated.