第4卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 5
1980年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1980

利用光学定理讨论以道波函数标志的多体系统的解的完备系

鲍诚光
(中国科学院高能物理研究所)

摘要

利用光学定理讨论了渐近完备性 (Asymptotic Completeness)

我们知道量子力学多体系统的本征态 ψ_{EX} 构成完备系.

$$H\psi_{EX} = E\psi_{EX}, \tag{1}$$

X 表示除能量外标志 ψ 的一切量子数.

若把 N 个粒子分成若干团，只考虑团内相互作用 V_γ，而不考虑团间相互作用 $V_{\bar\gamma}$. $(V = V_\gamma + V_{\bar\gamma})$，对应的 H 量称为道哈密顿量 $H_\gamma = H - V_{\bar\gamma}$. 它的解记作 ϕ^γ_{EY}，

$$H_\gamma\phi^\gamma_{EY} = E\phi^\gamma_{EY}, \tag{2}$$

Y 表示除能量外标志 ϕ 的一切量子数；例如 Y 中应包括对 γ 道各团作相对运动 (平面波) 的描写，还应包括对各团内部状态的描写，团内状态应包括束缚态与散射态. 由此可见 ϕ^γ_{EY} 的退化度是极大的. 其中我们用 $\phi^\gamma_{E\bar Y}$ 表示各团均处于束缚态的解，并称之谓道波函数.

利用 ϕ^γ_{EY} 可得

$$\psi^{\gamma(\pm)}_{EY} = \left(1 + \frac{1}{E^\pm - H} V_{\bar\gamma}\right)\phi^\gamma_{EY}, \tag{3}$$

易于证明，$\psi^{\gamma(\pm)}_{EY}$ 是 H 量的能量为 E 的解. 对于确定的 E，若令 γ 跑遍所有的结团方式，相应地令 Y 跑遍所有允许的态，我们就得到一个解的族 $\{\psi_{EX}\}$. 它们之间重叠得很利害，而且由于其中包括了各团的散射态解，这在处理上很不方便. 我们感兴趣的是如果各团限制在束缚态，即 ϕ^γ_{EY} 限制在各个道的道波函数，那么由此得到的 $\psi^{\gamma(\pm)}_{EY}$ 是否能构成完备系呢? 以下将利用光学定理来讨论这一点.

以下的讨论在质心系进行，暂不考虑反对称化效应.

设初态为

$$\phi^\alpha_{E\bar Y_\alpha} = \varphi_A\varphi_B e^{i\boldsymbol{k}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_\alpha}, \tag{4}$$

φ_A，φ_B 分别为规一束缚内部态.

假定末态道为 β，其中有 m 团，相对坐标由 $\boldsymbol{r}_1$ 至 $\boldsymbol{r}_{m-1}$ 表示，相应的波函数为

$$\phi^\beta_{Ef\bar Y_\beta} = \varphi_{A_1}\cdots\varphi_{A_m}\frac{1}{(2\pi)^{3(m-1)/2}}e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1}\cdots e^{i\boldsymbol{k}_{m-1}\cdot\boldsymbol{r}_{m-1}}, \tag{5}$$

本文1979年9月6日收到.

其中 E_f 为各团内部能量与各团相对动能之和，φ_{A_i} 为第 i 团的规一束缚内部态.

令 $U_{\beta\alpha}(E)$ 表示从 α 道到 β 道的跃迁算符

$$U_{\beta\alpha}(E) = V_{\tilde{\alpha}} + V_{\tilde{\beta}} \frac{1}{E^+ - H} V_{\tilde{\alpha}}, \tag{6}$$

则从 α 道跃迁到 β 道的截面为

$$\sigma_{\beta\alpha} = \int \frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi\mu_\alpha}{\hbar^2 k_\alpha} \int d\boldsymbol{k}_1 \cdots d\boldsymbol{k}_{m-1} \cdot \delta(E - E_f) |\langle \phi^\beta_{E_f \bar{\mathbf{Y}}_\beta} | U_{\beta\alpha}(E) | \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \rangle|^2 \tag{7}$$

$$= \frac{2\pi\mu_\alpha}{\hbar^2 k_\alpha} \int d\boldsymbol{k}_1 \cdots d\boldsymbol{k}_{m-1} \delta(E - E_f) \cdot |\langle \psi^{\beta(-)}_{E_f \bar{\mathbf{Y}}_\beta} | V_{\tilde{\alpha}} | \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \rangle|^2$$

$$= \frac{2\mu_\alpha}{\hbar^2 k_\alpha} \operatorname{Im} \int d\boldsymbol{k}_1 \cdots d\boldsymbol{k}_{m-1} \left\langle \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \middle| V_{\tilde{\alpha}} \frac{1}{E^- - H} \middle| \psi^{\beta(-)}_{E_f \bar{\mathbf{Y}}_\beta} \right\rangle \langle \psi^{\beta(-)}_{E_f \bar{\mathbf{Y}}_\beta} | V_{\tilde{\alpha}} | \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \rangle. \tag{8}$$

利用 $\sigma_{\beta\alpha}$ 可计算 α 入射道的总截面 $\sigma^\alpha_{\text{tot}} = \sum^c \sigma_{\beta\alpha}$ 其中 $\sum^c$ 表示对所有的出射道求和，即对结团方式及不同的束缚状态求和. 令

$$\sum^c \int |\psi^{\beta(-)}_{E_f \bar{\mathbf{Y}}_\beta}\rangle d\boldsymbol{k}_1 \cdots d\boldsymbol{k}_{m-1} \langle \psi^{\beta(-)}_{E_f \bar{\mathbf{Y}}_\beta}| = S', \tag{9}$$

则

$$\sigma^\alpha_{\text{tot}} = \frac{2\mu_\alpha}{\hbar^2 k_\alpha} \operatorname{Im} \left\langle \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \middle| V_{\tilde{\alpha}} \frac{1}{E^- - H} S' V_{\tilde{\alpha}} \middle| \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \right\rangle. \tag{10}$$

回顾一下H量的解，可分为全束缚态（N 个粒子束缚在一起）与非全束缚态两部分. 相应地可定义投影算符

$$S + B = 1, \tag{11}$$

S 表示由散射态(非全束缚态)张开的空间，B 表示由全束缚态张开的空间

$$B = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|. \tag{12}$$

其中 ψ_n 是全束缚态，它必然与 $\psi^{\beta(-)}_{E_f \bar{\mathbf{Y}}_\beta}$ 正交，因而由 (9) 式定义的 S' 中不可能有 B 的成分，故有

$$S' \subseteq S. \tag{13}$$

另一方面，若引进光学定理，可把总截面与朝前振幅虚部联系起来

$$\sigma^\alpha_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k_\alpha} \operatorname{Im} f_\alpha(\theta = 0)$$

$$= \frac{4\pi}{k_\alpha} \operatorname{Im} \left[-\frac{\mu_\alpha}{2\pi\hbar^2} \left\langle \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \middle| V_{\tilde{\alpha}} + V_{\tilde{\alpha}} \frac{1}{E^+ - H} V_{\tilde{\alpha}} \middle| \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \right\rangle \right]$$

$$= \frac{2\mu_\alpha}{\hbar^2 k_\alpha} \operatorname{Im} \left\langle \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \middle| V_{\tilde{\alpha}} \frac{1}{E^- - H} V_{\tilde{\alpha}} \middle| \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \right\rangle. \tag{14}$$

由于 $E > E_n$，故有

$$\operatorname{Im} \left\langle \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \middle| V_{\tilde{\alpha}} \frac{1}{E^- - H} B V_{\tilde{\alpha}} \middle| \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \right\rangle = 0. \tag{15}$$

因而 (14) 式成为

$$\sigma^\alpha_{\text{tot}} = \frac{2\mu_\alpha}{\hbar^2 k_\alpha} \operatorname{Im} \left\langle \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \middle| V_{\tilde{\alpha}} \frac{1}{E^- - H} S V_{\tilde{\alpha}} \middle| \phi^\alpha_{E\bar{\mathbf{Y}}_\alpha} \right\rangle. \tag{16}$$

比较 (16) 式与 (10) 式，并注意 (13) 式，可得

$$S' = S. \tag{17}$$

对于 $\psi^{\beta(+)}_{E_f\bar{\gamma}_\beta}$，显然有类似的结果．故有

$$\sum^{c}\int |\psi^{\beta(+)}_{E_f\bar{\gamma}_\beta}\rangle d\boldsymbol{k}_1\cdots d\boldsymbol{k}_{m-1}\langle\psi^{\beta(+)}_{E_f\bar{\gamma}_\beta}| + \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = 1, \tag{18}$$

其中 $\psi^{\beta(+)}_{E_f\bar{\gamma}_\beta} = \left(1 + \frac{1}{E_f^+ - H}V_{\bar{\beta}}\right)\phi^{\beta}_{E_f\bar{\gamma}_\beta}$．这样，我们利用了光学定理得到了一个以道波函数标志的多体系统的解的完备系．

当考虑反对称化时，可引进算符 $\tilde{\mathscr{A}}$

$$\tilde{\mathscr{A}}f(x_1\cdots x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_p (-)^p f(x_{p_1}\cdots x_{p_N}), \tag{19}$$

其中对不同粒子排列的态乘上反序号后求和．此时(18)式成为

$$\sum^{c}{}'\int |\tilde{\mathscr{A}}\psi^{\beta(+)}_{E_f\bar{\gamma}_\beta}\rangle d\boldsymbol{k}_1\cdots\cdots d\boldsymbol{k}_{m-1}\langle\tilde{\mathscr{A}}\psi^{\beta(+)}_{E_f\bar{\gamma}_\beta}| + \sum_n |\tilde{\psi}_n\rangle\langle\tilde{\psi}_n| = 1, \tag{20}$$

其中 $\tilde{\psi}_n$ 是反称规一全束缚态．在 $\sum^{c}{}'$ 求和号内，不再区分N个粒子在m团的不同分布以及团内粒子的不同排列．

(18) 式即渐近完备性 (Asymptotic Completeness)．当粒子数 $N = 3$ 时，曾由 Faddeev 予以证明[1]．其后，Hepp 利用N体散射理论把 Faddeev 的证明推广到任意粒子的情况[2]．其证明是相当复杂的．本文所用的方法比较直接，而且把渐近完备性和光学定理联系起来．从另一种意义上说，本文反过来亦可看成是有束缚态存在的情况下，对光学定理的一个证明．

参　考　文　献

[1] L. D. Faddeev, "Mathematical Aspects of the ThreeBody Problem in Quantum Scattering Theory. 1965", Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
[2] K. Hepp, *Helv. Phys. Acta.*, 42 (1969), 425.

THE OPTICAL THEOREM AND A COMPLETE SET OF A MANY BODY SYSTEM LABELLED BY DIFFERENT CHANNEL STATES

BAO CHENG-GUANG
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The asymptotic completeness is discussed by using optical theorem.