生成泛函与真空结构

汪克林

（中国科学技术大学）

摘要

本文讨论由量子力学的生成泛函过渡到场论的生成泛函时如何考虑起始态与终了态的基态，即真空态的问题．特别是近来在规范理论中真空的结构的讨论使这一问题的讨论更属必要．

在 Abers 和 Lee 的关于规范场的总结性文章中[1]量子力学的生成泛函定义为

$$W[J]=\int dq\int dq'\phi_0^*(q',t')\langle q',t'|q,t\rangle^J\phi_0(q,t). \tag{1}$$

其中 $\langle q',t'|q,t\rangle^J$ 是有外源时 $|q,t\rangle$ 态到 $|q',t'\rangle$ 态的过渡振幅． $\phi_0(q,t)$ 是基态的波函数．以中性标量场 $\varphi(x)$ 为例，将空间分成许多体积为 ε^3 的小格子，类比于量子力学的多变量情形在文献[1]中场论的生成泛函定义成

$$W[J]=\int[d\varphi]\left[\frac{\varepsilon^3}{2\pi}d\pi\right]\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\left[\pi(x)\dot{\varphi}(x)-H(x)+\frac{1}{2}i\epsilon\varphi^2+J(x)\varphi(x)\right]\right\}. \tag{2}$$

但是上面的定义是不完善的．在场论中基态即是真空态．生成泛函是在外源作用下从真空态到真空态的转换振幅，而上式并没有反映出起始与终了的真空态的性质．特别是在规范理论中更应将真空的结构考虑进去． Callan 等人在他们的工作中类似的考虑了这一因素[2]不过没有提出生成泛函的问题．最近有关 QCD 的总结性文献中也没有在讨论生成泛函时考虑到真空的结构[3]．因此讨论一下这个问题是有必要的．

由于真空的结构除 Callan 等人提出的 θ 真空外[2]也许还有其它的可能[4]因此假定在普遍情形下真空可展成一系列场算符本征态的叠加

$$\Big|0\Big\rangle=\sum_i a_i\Big|A_\mu^{(i)}(x)\Big\rangle. \tag{3}$$

现在来讨论生成泛函，按定义它是

$$W[J]={}_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}^J, \tag{4}$$

加上指标 J 表示有外源．外源 J 在时间间隔 (t,t') 内不为零． 我们在时刻 t 和 t' 时插入两组为 1 的算符

本文 1979 年 6 月 14 日收到．

$$\sum_{i'} |A_\mu^{(i')}(\boldsymbol{x}),\ t'\rangle\langle A_\mu^{(i')}(\boldsymbol{x}),\ t'| = 1,$$

$$\sum_{i} |A_\mu^{(i)}(\boldsymbol{x}),\ t\rangle\langle A_\mu^{(i)}(\boldsymbol{x}),\ t| = 1. \tag{5}$$

将 (5) 式代入 (4) 式中，再令 t 与 $t' \to \infty$，这时 $|0\rangle_{\text{in}}$ 与 $|0\rangle_{\text{out}}$ 具有分别的 (3) 式的展开式，因此有

$$W[J] = {}_{\text{out}}\langle 0|\left[\sum_{i'} |A_\mu^{(i')},\ t'\rangle\langle A_\mu^{(i')},\ t'|\right] \times \left[\sum_{i} |A_\mu^{(i)},\ t\rangle\langle A_\mu^{(i)},\ t|\right]|0\rangle_{\text{in}}^J \Big|_{\substack{t\to-\infty \\ t'\to+\infty}}$$

$$= \sum_{i,i'} a_i a_{i'}^* \langle A_\mu^{(i')}|A_\mu^{(i)}\rangle^J. \tag{6}$$

从这里看出考虑到真空的结构后文献 [1] 中定义的生成泛函只是 (6) 式中的一项．以下分别几种情形具体讨论：

1. 真空结构系 Callan 等提出的 θ 真空[2]　这时真空态可展成绕数变量为整数的态的叠加 $|0\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|A_\mu^{(n)}(\boldsymbol{x})\ 0\rangle$，其中 θ 是一个未定的参量．根据文献 [1] 转换振幅可以写成

$$\langle A_\mu^{(n')}(\boldsymbol{x}),\ t'|A_\mu^{(n)}(\boldsymbol{x}),\ t\rangle^J = \int_{[A_\mu^{(n)}(\boldsymbol{x})]}^{[A_\mu^{(n')}(\boldsymbol{x})]} [d\boldsymbol{A}_\mu]\Delta_f[\boldsymbol{A}_\mu]\pi\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu)]$$

$$\times \exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L} + \boldsymbol{J}_\mu\cdot\boldsymbol{A}_\mu]\right\}. \tag{7}$$

我们在上式右方的路径积分上加上"上，下限"指 t 与 t' 时刻场量取固定的分布函数 $A_\mu^{(n)}(\boldsymbol{x})$ 及 $A_\mu^{(n')}(\boldsymbol{x})$．对不同的项相应的"上限"和"下限"是不同的．

所以在 θ 真空的情形下生成泛函可写成如下的形式

$$W[J] = \sum_{n,n'} e^{i(n-n')\theta} \int_{A_\mu^{(n)}(\boldsymbol{x})}^{A_\mu^{(n')}(\boldsymbol{x})} [dA_\mu]$$

$$\times \Delta_f[\boldsymbol{A}_\mu]\pi\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu)]\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L} + \boldsymbol{J}_\mu\cdot\boldsymbol{A}_\mu]\right\}. \tag{8}$$

2. 推广的 θ 真空[4] 在这种情形下真空态不是由分离的绕数变量态的叠加而是由取连续变化的绕数变量的态积分而成

$$|0\rangle = \int e^{i\theta q}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n}{\frac{\theta^2}{8\pi_m^2} - \frac{(\theta/2\pi - n)^2}{2m}} e^{-2\pi i n q}\right]|q\rangle dq. \tag{9}$$

其中组态 $|q\rangle$ 是参考文献 [4] 中定义的绕数变量值为 q 的组态，具体写出为

$$A_0 = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{x}^2 + \lambda^2 + a^2}\lambda,\quad \boldsymbol{A} = \frac{\lambda\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{x}^2 + \lambda^2 + a^2}, \tag{10}$$

a 是描述瞬子大小的参量．λ 与 q 的关系是

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}\left(3 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + a^2}\right) \tag{11}$$

根据类似的方法很易在现在的情形下将 (6) 式改成积分的形式，于是生成泛函成为

$$W[J]=\int dq\int dq' e^{i(q-q')\theta}$$

$$\times\left[1+\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{V_{n'}}{\frac{\theta^2}{8\pi^2 m}-\frac{\left(\frac{\theta}{2\pi}-n'\right)^2}{2m}}e^{2\pi i n' q'}\right]\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n}{\frac{\theta^2}{8\pi_m^2}-\frac{\left(\frac{\theta}{2\pi}-n\right)^2}{2m}}e^{-2\pi i n q}\right]$$

$$\times\int_{[q]}^{[q']}[dA_\mu]\Delta_f[\boldsymbol{A}_\mu]\pi\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu)]\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}+\boldsymbol{J}_\mu\cdot\boldsymbol{A}_\mu]\right\}. \tag{12}$$

我们用 $[q]$ 及 $[q']$ 简略地标记为 (10) 式所表示的绕数为 q 及 q' 的组态。

3. 标量场的情形 它不象规范场那样有复杂的真空结构. 即真空态如写成 $|0\rangle=|\phi^{(0)}(\boldsymbol{x})\rangle$，则

$$\phi^{(0)}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & \text{无自发破缺情形,}\\ v & \text{有自发破缺情形.}\end{cases}$$

因此生成泛函成为

$$W[J]=\int_{[\phi^{(0)}]}^{[\phi^{(0)}]}[d\phi]\left[\frac{\varepsilon^3}{2\pi}d\pi\right]$$

$$\times\exp\left[i\int d^4x\left\{\pi(x)\dot\phi(x)-\mathscr{H}(x)+\frac{1}{2}i\in\phi^2+J(x)\phi(x)\right\}\right].$$

总结上述结果看到，对标量场来讲，考虑了真空态的性质后除应标上“上限”及“下限”外文献 [1] 中的 $W[J]$ 表示式不变. 而关于规范场的生成泛函却大不相同，从一项变到无穷的求和或积分. 同时附带讲一下这样变动后并不影响文献 [1] 中量子化的讨论，因为在讨论量子化时略去的因子都和场量无关，因而也与 (8) 式及 (12) 式中每一项的“上限”、“下限”无关，这样的共同因子在求格林函数时照样可以消掉.

参 考 文 献

[1] Ernest S. Abers and Benjamin W. Lee, *Phys. Rep.*, **9c**(1973), No. 1.
[2] C. Callan, R. Dashen and D. Gross, *Phys. Rev.*, **D17**(1978), 2717.
[3] William Marciano and Heinz Pagels, *Phys. Rep.*, **36c**(1978), No. 3.
[4] 王明中、郑希特、汪克林、冼鼎昌、章正刚，高能物理与核物理，**4**(1980)，160.

GENERATING FUNCTIONAL AND STRUCTURE OF VACUUM

WANG KE-LIN
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

In this paper we discuss the base state of initial and final states in the transition from the generating functional of quantum mechanics to that of field theory, i.e. the problem of vacuum state. This problem becomes more necessary, when we are interested in the structure of vacuum in gauge theory.