

真空能带理论中 E_4 解和 M_4 解过渡的讨论

王明中 郑希特 汪克林
(成都科技大学) (中国科学技术大学)

洗鼎昌 章正刚
(中国科学院高能物理研究所) (成都地质学院)

摘 要

已知,用 WKB 方法求得的真空之间最可几逃逸路径 (MPEP) 当位势 u 大于能量 E 或 $u < E$ 时是由不同函数代表的. 前者对应于欧氏空间场方程的经典解—— E_4 解; 后者则对应于闵可斯基空间的解—— M_4 解. 但是, 在 $u = E$ 的转折点附近, WKB 方法不再适用. 本文给出了在转折点左右连接 E_4 解与 M_4 解的 MPEP 轨道应满足的方程. 由周期场方法算得的物理的 θ 真空的能级 E 不等于原始真空的能量. 而 MPEP 以及随之而定的位势皆与能级 E 的位置有关; 反过来, 能级又决定于位势. 本文表明应如何自洽地考虑这一因素.

一、引 言

最可几逃逸路径 (MPEP) 方法^[1] 和稀薄气体近似方法^[2] (DGA) 是目前在非阿贝尔规范理论中计算真空隧道效应和 θ 真空能级的两种普遍应用的方法. 后者比较成熟, 并被广泛应用. 前者有一个清楚的位垒穿透的图象, 并引进了一个新的绕数变量 q . 已经证明^[3], 在 MPEP 方法里 q 空间的位势是周期的势, 因而可以应用固体理论的结果得出物理的 θ 真空具有能带结构.

Bitar 等^[4] 用 WKB 方法证明了, 当真空态之间的位势 u 大于能量 E 时, 在场组态空间中相应区间内对应于最大穿透几率的轨道 (MPEP) 由欧氏空间场方程的经典解—— E_4 解(瞬子解)给出; 在 $u < E$ 区间, 对应的 MPEP 则是由闵可斯基空间场方程的经典解—— M_4 解给出. 而在强耦合情形, 物理真空态的能级高于原始真空的能量^[5]. 于是这里就有两个问题.

第一, 如所周知, WKB 近似在 $u = E$ 的转折点附近不再适用. 那末, 在这一区间 MPEP 是什么样的轨道? 显然, 作为整个 MPEP 的一部份, 它应该在其两头分别与经典场方程的 E_4 解以及 M_4 解相连接; 由它给出的位势曲线也应该分别与 E_4 解以及 M_4 解所对应的位势曲线相连接. 为此, 我们必须在 $u = E$ 转折点附近解薛定谔方程. 这样, 对原

始真空态之间的位势以及真空态之间的 MPEP 才有一个全面的, 确切的了解. 这就是我们在第二、第三节要讨论的.

第二, 既然当 $E \approx 0$ 时, 相邻真空之间的位势由上述三种 MPEP 轨道 (共五段) 组成, 如图 1. 也就是说, 整个位势的形状与 θ 真空能级 E 的位置有关; 而反过来, 能级 E 却又是由位势所决定. 因而, 在应用周期场方法求 θ 真空的能量本征值问题时, 能级 E 与位势 u 必须自洽, 这就使整个问题复杂化. 我们将在第四节进行讨论.

二、 E_4 解与 M_4 解的连接

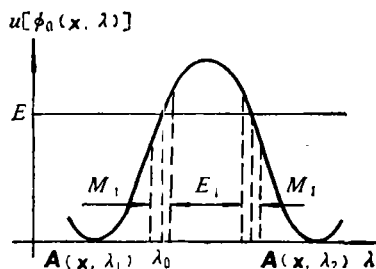


图 1

在无穷多维的场组态空间, 真空过渡由场组态的连续变化 $A(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, \lambda(t))$ 来描述. 两个真空态分别由 $A^{(1)} = f(\mathbf{x}, \lambda_1)$ 与 $A^{(2)} = f(\mathbf{x}, \lambda_2)$ 来表示. 随着 λ 由 λ_1 连续改变至 λ_2 , 系统由真空态 $A^{(1)}$ 改变至 $A^{(2)}$, 并在组态空间对应有一条轨道, 相应的几率振幅——由波泛函 $\psi(A(\mathbf{x}, \lambda))$ 给出. 而使波泛函 $\psi(A(\mathbf{x}, \lambda))$ 取极值的轨道就是最可几逃逸路径 (MPEP).

假如真空过渡能如上所述用单个参量之改变来描述, 则整个问题就归之为—维量子力学, 轨道参量 λ 就是动力学参量.

为方便起见, 我们先用标量场理论来讨论. 在下一节将表明如何推广至非阿贝尔规范场.

标量场 $\phi(\mathbf{x})$ 系统的哈密顿量

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.1)$$

哈密顿算符是

$$H = \int d^3x \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.2)$$

定态薛定格方程

$$H\psi(\phi) = E\psi(\phi), \quad (2.3)$$

引入位势

$$u(\phi) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.4)$$

用 $\phi_0(\mathbf{x}, \lambda)$ 表示 MPEP 轨道, 其中 λ 是参量. 沿 MPEP, 位势 $u(\phi_0(\mathbf{x}, \lambda_0)) \sim E$ 的区域, WKB 波泛函不再有效, 必须在 $u = E$ 附近求解薛定格方程(2.3).

我们的做法是: (i) 假定已有 MPEP. (ii) 在 $u = E$ 转折点附近解方程(2.3), 求得沿 MPEP 的波泛函 $\psi(\phi)$. (iii) MPEP 轨道应给出 ψ 的极值, 由变分所得的欧拉方程就是所求的 MPEP 应满足之方程.

既假定 MPEP 是 $\phi_0(\mathbf{x}, \lambda)$, 沿 MPEP 轨道场组态的变化即是由于参量 λ 的改变. 按定义, 在与 $\phi_0(\mathbf{x}, \lambda)$ 垂直方向上, 轨道的任何改变应给出波泛函的变分 $\delta\psi = 0$, 而

沿 MPEP 轨道切线方向场组态的变化给出波泛函的变分 $\delta\psi$ 应正比于 $\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda}$, 即^[4]

$$\left. \frac{\delta\psi}{\delta\phi_{\perp}} \right|_{\phi_0} = 0; \quad \left. \frac{\delta\psi}{\delta\phi_{\parallel}} \right|_{\phi_0} = C(\lambda) \cdot \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda}. \quad (2.5)$$

而

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \int d^3x \left[\left. \frac{\delta\psi}{\delta\phi_{\parallel}} \right|_{\phi_0} \cdot \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda} \right], \quad (2.6)$$

有

$$C(\lambda) = \left[\int d^3x \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda} \right)^2 \right]^{-1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}. \quad (2.7)$$

对于任一轨道 $\phi(\mathbf{x}, \lambda)$ 可以代替 λ 引入另一参量——沿轨道的长度 r 应有

$$(dr)^2 = \int d^3x \left(\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} \right)^2 \cdot (d\lambda)^2,$$

∴

$$dr = \left[\int d^3x \left(\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} \right)^2 \right]^{1/2} d\lambda. \quad (2.8)$$

此外,由(2.8)显然有

$$\int d^3x \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 = 1. \quad (2.9)$$

由(2.5)、(2.7)、(2.8)

$$\left. \frac{\delta\psi}{\delta\phi} \right|_{\phi_0} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial\phi_0}{\partial r}, \quad (2.10)$$

$$\int d^3x \frac{\delta^2\psi}{\delta\phi^2} \Big|_{\phi_0} = \int d^3x \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial\phi_0}{\partial r} \right) \Big|_{\phi_0} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}. \quad (2.11)$$

上面推导时应用了关系式(2.9)。于是薛定格方程

$$\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2\psi(\phi_0)}{\partial r^2} + (E - u)\psi(\phi_0) = 0. \quad (2.12)$$

在 $u = E$ 转折点邻域展开 $u(\phi_0)$, 只保留到线性项,

$$u(\phi_0(\mathbf{x}, r)) = E + \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_0}. \quad (2.13)$$

以下, ϕ_0 的下标皆略去, ϕ 即指 MPEP 轨道。如图 2 所示, 令

$$F = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_0}; \quad F > 0$$

$$u = E + F \cdot (r - r_0), \quad (2.14)$$

$$(2.12) \rightarrow \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r - r_0) - F \cdot (r - r_0) \cdot \psi(r - r_0) = 0 \quad (2.15)$$

转到动量空间

$$\left[\frac{p^2}{2} - i\hbar F \frac{\partial}{\partial p} \right] \varphi(p) = 0, \quad (2.16)$$

有解

$$\varphi(p) = N \cdot \exp\left(\frac{-i\beta^3}{6\hbar F}\right).$$

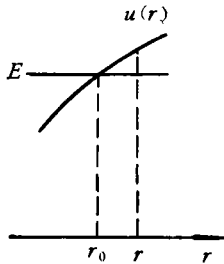


图 2

N ——归一系数, 对于 ψ 的变分是不重要的, 以下略去。令

$$\xi = \left(\frac{2F}{\hbar^2}\right)^{1/3} \cdot (r - r_0), \quad (2.17)$$

则^[5]

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-i\left[z\xi + \frac{z^3}{3}\right]\right\} dz = 2\sqrt{\pi} \Phi(\xi). \quad (2.18)$$

其中 $\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(z\xi + \frac{z^3}{3}\right) dz$ 是 Airy 函数。

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\xi}{3\pi}} \cdot K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right), & \xi > 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{\pi\xi} \left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \right] & \xi < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

$J_{\pm 1/3}$ 是贝塞尔函数, $K_{1/3}$ ——虚宗量的汉开尔函数。当 $r > r_0$ 即 $u > E$ 时

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\xi^{3/2} &= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2F}{\hbar^2}}(r - r_0)^{1/2} = \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{2F}{\hbar^2}}(r - r_0) dr \\ &= \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{2}{\hbar^2}(u - E)} dr. \end{aligned} \quad (2.20)$$

当 $r < r_0$ 即 $u < E$ 时

$$\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} = \int_r^{r_0} \sqrt{\frac{2}{\hbar^2}(E - u)} dr. \quad (2.21)$$

下面, 分别为 $\xi > 0$ ($r > r_0$) 及 $\xi < 0$ ($r < r_0$) 推导欧拉方程

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\delta \psi}{\delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)} \right] = \frac{\delta \psi}{\delta \phi}. \quad (2.22)$$

1. $\xi > 0$ ($r > r_0, u > E$)

此时

$$\psi(z) = 2\sqrt{\pi} \Phi(\xi) = \frac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{3}} \cdot K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right). \quad (2.23)$$

而^[6]

$$K_{1/3}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot J_{-1/3}(e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot z) - e^{-\frac{\pi}{6}i} \cdot J_{1/3}(e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot z) \right], \quad (2.24)$$

$$J_{1/3}(z) = \frac{3\sqrt{\frac{z}{2}}}{\Gamma(4/3)} \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \cdot \frac{(z\sqrt{3})^{2K}}{2^{2K} \cdot K! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3K+1)}, \quad (2.25)$$

$$J_{-1/3}(z) = \frac{3\sqrt{\frac{z}{2}}}{\Gamma(2/3)} \left\{ 1 + \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \cdot \frac{(z\sqrt{3})^{2K}}{2^{2K} \cdot K! \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3K-1)} \right\},$$

其中 $z = \frac{2}{3}\xi^{3/2}$ 为实数。当将(2.25)代入(2.24)时, 将出现因子

$$(z \cdot e^{\frac{\pi}{2}i})^{\pm 1/3} = z^{\pm 1/3} \cdot e^{(\pm\pi/2 + 2k\pi)i/3}$$

对于 $J_{1/3}$, 可以取相角 $\frac{\pi}{6}i$, $\frac{5}{6}\pi i$ 或 $\frac{3}{2}\pi i$; 对于 $J_{-1/3}$, 可以取 $-\frac{\pi}{6}i$, $\frac{\pi}{2}i$ 或 $\frac{7}{6}\pi i$ 以使 $\phi(\xi)$ 为实函数. 则

$$K_{1/3}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{2^{1/3}}{\Gamma(2/3)} \left(z^{-1/3} + \frac{3}{8} z^{5/3} \right) - \frac{1}{\Gamma(4/3) \cdot 2^{1/3}} \cdot z^{1/3} + \dots \right] \quad (2.26)$$

$$\phi(\xi) = \frac{2\pi 3^{1/3}}{3 \cdot \Gamma(2/3)} - \frac{2\pi}{3^{4/3} \cdot \Gamma(4/3)} \cdot \xi + \frac{\pi}{3^{5/3} \cdot \Gamma(2/3)} \cdot \xi^3 + \dots \quad (2.27)$$

由(2.17)

$$\xi = \left(\frac{2F}{\hbar^2} \right)^{1/3} (r - r_0) = \left(\frac{2}{F^2 \hbar^2} \right)^{1/3} (u - E) \quad (2.28)$$

(2.27)表明, $\phi(\xi)$ 是 ξ 的整数幂的无穷级数. 取有限项近似, 按(2.22)推出欧拉方程——MPEP 满足之方程, 它具有如下形式:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial u}{\partial \phi} \cdot G_+(u - E) = \left[-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \cdot G_+(u - E),$$

或

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial u}{\partial \phi} \cdot G_-(u - E) = \left[-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \cdot G_-(u - E). \quad (2.29)$$

其中+号对应于 $\xi > 0 (u > E)$, -号对应于 $\xi < 0 (u < E)$, $G_{\pm}(u - E)$ 是 $(u - E)$ 的多项式.

而我们知道^[4], 由 WKB 方法得到的 MPEP 在 $u > E$ 和 $u < E$ 区间满足的方程是将 t 换成 λ 后 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的欧氏空间场方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial u}{\partial \phi} = \left[-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right], \quad (u > E) \quad (2.30)$$

或闵可斯基空间场方程

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial u}{\partial \phi} = \left[-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right], \quad (u < E) \quad (2.31)$$

当对 $J_{\pm 1/3}$, 也就是对 $\phi(\xi)$ 的级数展开取不同项数近似时, (2.29) 的形式不变, 改变的是多项式 $G_{\pm}(u - E)$. 可见, 不对 $\phi(\xi)$ 作(2.27)的级数展开, 我们也应得具有(2.29)形式的 MPEP 方程.

为此, 我们首先证明, 如果波泛函数写成如下形式

$$\phi(\xi) \sim \int_{r_0}^r f(\xi) dr \sim \int_{r_0}^r f(u - E) dr \sim \int_{r_0}^r f(u - E) d\lambda \left[\int d^3x \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.32)$$

则变分所得之欧拉方程将具有(2.29)之形式. 因为, 由(2.32)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\delta \phi}{\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)} \right] = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ f(u - E) \frac{\partial \phi / \partial \lambda}{\left[\int d^3x \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \left[\int d^3x \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot f'(u - E) \cdot \frac{\partial u}{\partial \phi}. \quad (2.34)$$

若令

$$\left[\int d^3x \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2} = f(u - E), \quad (2.35)$$

则(2.33) = (2.34)就给出

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = [f(u - E) \cdot f'(u - E)] \cdot \left(-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right), \quad (2.36)$$

这就是 MPEP 方程. 而(2.35)两边对 λ 微商

$$\frac{\int d^3x 2 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2}}{2 \left[\int d^3x \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2}} = f'(u - E) \cdot \int \frac{\partial u}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} d^3x.$$

再利用(2.35), 就给出(2.36), 说明(2.35)与(2.36)是自洽的.

下面表明, $\phi(\xi)$ 确可以写成(2.32)的形式. 为此, 由(2.27)

$$\phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\xi} \cdot K_{1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) = A + B\xi + C\xi^3 + \dots, \quad (2.37)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = B + 3C\xi^2 + \dots, \quad (2.38)$$

因此,

$$\phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{r_0}^{\xi} \frac{d[\sqrt{\xi} \cdot K_{1/3}(z)]}{d\xi} d\xi + A \quad (2.39)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2F}{\hbar^2} \right)^{1/3} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d[\sqrt{\xi} \cdot K_{1/3}(z)]}{d\xi} d\lambda \left[\int d^3x \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2} + A. \quad (2.40)$$

(2.38)表明, $d[\sqrt{\xi} K_{1/3}(z)]/d\xi$ 是 $(u - E)$ 的幂级数. 显然, (2.40) 具有(2.32)的形式, 其中

$$f(u - E) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2F}{\hbar^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{d[\sqrt{\xi} \cdot K_{1/3}(z)]}{d\xi}, \quad (2.41)$$

$$f'(u - E) = \frac{df}{du} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{F\hbar^4} \right)^{1/3} \cdot \frac{d^2[\sqrt{\xi} K_{1/3}(z)]}{d\xi^2}. \quad (2.42)$$

代入(2.36)得 $\xi > 0 (r > r_0)$ 处 MPEP 满足之方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = & \left(-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \cdot \frac{8}{3\hbar^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\xi}} K_{1/3}(z) + \xi \frac{dK_{1/3}(z)}{dz} \right\} \\ & \cdot \left\{ -\frac{\xi^{-3/2}}{4} K_{1/3}(z) + \frac{3}{2} \frac{dK_{1/3}(z)}{dz} + \xi^{3/2} \frac{d^2 K_{1/3}(z)}{dz^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

2. $\xi < 0 (r < r_0, u < E)$

此时

$$\xi = \left(\frac{2F}{\hbar^2} \right)^{1/3} (r - r_0) = i|\xi| = i \left(\frac{2F}{\hbar^2} \right)^{1/3} (r_0 - r). \quad (2.44)$$

容易证明,如将 $\phi(\xi)$ 写成

$$\phi(\xi) = \int_r^{r_0} f(E-u) dr = \int_\lambda^{\lambda_0} d\lambda \cdot f(E-u) \left[\int d^3x \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.45)$$

则应有 MPEP 方程,

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = f(E-u) \cdot f'(E-u) \left(-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right). \quad (2.46)$$

而由(2.18)、(2.19),当 $r < r_0$ 时

$$\phi(\xi) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{|\xi|} \left\{ e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot J_{1/3} \left(e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot \frac{2}{3} |\xi|^{3/2} \right) + e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot J_{-1/3} \left(e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot \frac{2}{3} |\xi|^{3/2} \right) \right\}. \quad (2.47)$$

与(2.23)、(2.24)比较可知,当 $J_{\pm 1/3}$ 的级数展开式中选取适当的相因子,(2.47)与(2.23)之差别就只是多一个负号,并且 ξ 代之以 $|\xi|$, 即

$$\phi(\xi) = \frac{-2}{\sqrt{3}} |\xi|^{1/2} \cdot K_{1/3} \left(\frac{2}{3} |\xi|^{3/2} \right), \quad (2.48)$$

而

$$z = \frac{2}{3} |\xi|^{3/2} = \int_r^{r_0} \sqrt{\frac{2}{\hbar^2} (E-u)} dr. \quad (2.49)$$

重复(2.37)~(2.41)的做法就有

$$\phi(\xi) = \int_r^{r_0} f_1(E-u) dr - A, \quad (2.50)$$

$$f_1(E-u) = \frac{-2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2F}{\hbar^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{d[|\xi|^{1/2} \cdot K_{1/3}(z)]}{d|\xi|}. \quad (2.51)$$

因此, $r < r_0$ 处 MPEP 之方程为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = & \left(-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \cdot \frac{8}{3\hbar^2} \left\{ \frac{1}{2|\xi|^{1/2}} K_{1/3}(z) + |\xi| \frac{dK_{1/3}(z)}{dz} \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{-|\xi|^{-3/2}}{4} \cdot K_{1/3}(z) + \frac{3}{2} \frac{dK_{1/3}(z)}{dz} + |\xi|^{3/2} \frac{d^2 K_{1/3}(z)}{dz^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

比较(2.30)、(2.31)、(2.43)以及(2.52)我们看到,在由 $E > u$ 到 $E < u$ 时, MPEP 轨道满足之方程是如何由闵可斯基空间过渡到欧氏空间的. 而在 $u = E$ 即 $z = \xi = 0$ 时, 转折点两边的方程(2.43)与(2.52)相同,即是

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (2.53)$$

显然,应该把 WKB 近似得到的方程(2.30)、(2.31)以及我们在转折点附近对位势作幂级数展开近似而得到的方程(2.43)、(2.52)看作是 MPEP 轨道所满足的精确方程在不同区段上的近似表式. 每一个方程的解只在该区段才有效,也就是该段 MPEP 轨道. 合理的近似方法应该是相邻段的有效区域有部份重迭, 则相应的两个方程应该是逐渐过渡的. 在重迭的有效区域,欧氏空间场方程(2.43)式的解应给出

$$\begin{aligned} \frac{8}{3\hbar^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{|\xi|}} K_{1/3}(z) + \xi \frac{dK_{1/3}(z)}{dz} \right\} \left\{ -\frac{\xi^{-3/2}}{4} \cdot K_{1/3}(z) + \frac{3}{2} \frac{dK_{1/3}(z)}{dz} \right. \\ \left. + \xi^{3/2} \frac{d^2 K_{1/3}(z)}{dz^2} \right\} \sim 1, \end{aligned}$$

也就是说(2.30)也近似成立.

让我们看, 上面说的有效区域重迭的条件是什么. 在把位势 $u(r)$ 作幂级数展开时

$$u(r) = E + \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r_0} \cdot (r - r_0) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r_0} \cdot \frac{(r - r_0)^2}{2} + \dots,$$

近似条件是

$$|r - r_0| \ll \frac{2 \left| \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r_0} \right|}{\left| \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r_0} \right|} = \frac{2F}{F'}.$$

其中

$$F = \left| \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r_0} \right| = \left| \int d^3x \left(-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r_0} \right|,$$

$$F' = \left| \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r_0} \right| = \left| \int d^3x \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right] \right|_{r_0}.$$

而 WKB 近似成立的条件是^[5]

$$|\xi| = \left(\frac{2F}{\hbar^2} \right)^{1/3} |r - r_0| \gg 1,$$

即

$$|r - r_0| \gg \left(\frac{\hbar^2}{2F} \right)^{1/3}.$$

因此, 有效区域重迭的条件是

$$\frac{2F}{F'} \gg \left(\frac{\hbar^2}{2F} \right)^{1/3} \quad \text{或} \quad F' \ll \frac{F^{4/3}}{\hbar^{2/3}}, \quad (2.54)$$

也就是

$$\left| \int d^3x \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right] \right|_{r_0} \ll \left| \int d^3x \left[-\nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r_0}^{4/3} / \hbar^{2/3}. \quad (2.55)$$

三、推广至非阿贝尔规范场

前节关于标量场理论 MPEP 的讨论很容易推广到非阿贝尔规范场.

杨-Mills 场的拉氏密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu})^2, \quad (3.1)$$

哈密顿量

$$H = \int \frac{1}{g^2} \text{Tr}(\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2) d^3x, \quad (3.2)$$

$$A_\mu = g \cdot A_\mu^a \frac{\tau^a}{2}; \quad F_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu}^a \frac{\tau^a}{2}, \quad (3.3)$$

τ^a ——泡利矩阵.

取 Temporal 规范 $A_0 = 0$,

$$E_k = F_k^0 = \partial^0 A_k,$$

$$B_m = \frac{1}{2} \epsilon_{mkl} F_{kl} = \left\{ \partial_k A_l - \partial_l A_k + \frac{1}{i} [A_k, A_l] \right\} \cdot \frac{1}{2} \epsilon_{mkl}. \quad (3.4)$$

场组态空间中的一条轨道用 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \lambda)$ 代表。

令

$$m(\lambda) = \frac{2}{g^2} \int d^3x \text{Tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \lambda} \right)^2, \quad (3.5)$$

$$u(\lambda) = \frac{1}{g^2} \int d^3x \text{Tr}(\mathbf{B})^2, \quad (3.6)$$

$$E_k = \frac{\partial A_k}{\partial \lambda} \cdot \dot{\lambda}.$$

则

$$H = \frac{m(\lambda)}{2} (\dot{\lambda})^2 + u(\lambda). \quad (3.7)$$

类似(2.8)引入轨道长度参量 r , 就有薛定格方程

$$H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + u(r) \right] \psi(\mathbf{A}(\mathbf{x}, r)) = E\psi(\mathbf{A}(\mathbf{x}, r)), \quad (3.8)$$

(3.8)与(2.12)一致。可见(3.8)是杨-Mills 场之 MPEP 满足的薛定格方程。

这就表明,无论是 WKB 近似或是 $u = E$ 转折点附近求解薛定格方程(3.8), 都应得到与标量场理论一样的波泛函。再由变分推得的 MPEP 方程也应具有相同形式。

例如,在 $u > E$ 区间,由 WKB 波泛函

$$\psi(\mathbf{A}) = \frac{1}{\{2[u(r) - E]\}^{1/4}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{r_0}^r dr \{2[u(r) - E]\}^{1/2} \right]$$

变分得到 MPEP 方程是

$$\frac{g^2}{2} \frac{\partial^2 A_i^a}{\partial \lambda^2} = \frac{\delta u}{\delta A_i^a} \quad (3.9)$$

与标量场理论的(2.30)形式一致。因子“ $g^2/2$ ”之差别来自(3.5)式的“ $2/g^2$ ”以及求迹运算。

引入变量 τ

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \left\{ \frac{m(\lambda)}{2[u(\lambda) - E]} \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{g}, \quad (3.10)$$

在 Temporal 规范下(3.9)为

$$D_\tau F_{\tau i} + D_k F_{ki} = 0. \quad (3.11)$$

这正是欧氏空间的杨-Mills 场方程。而在转折点附近 ($u > E$), 与标量场理论的(2.43)相对应, 应有

$$D_\tau F_{\tau i} = -D_k F_{ki} \cdot \frac{8}{3\hbar^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\xi}} K_{1/3}(z) + \xi \frac{dK_{1/3}(z)}{dz} \right\} \cdot \left\{ \frac{-\xi^{-3/2}}{4} K_{1/3}(z) + \frac{3}{2} \frac{dK_{1/3}(z)}{dz} + \xi^{3/2} \frac{d^2 K_{1/3}(z)}{dz^2} \right\}, \quad (3.12)$$

其中

$$z = \frac{2}{3} \xi^{3/2} = \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{2}{\hbar^2} (u - E)} dr = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\frac{2}{\hbar^2} (u - E)} d\tau \cdot \left[\int d^3x \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right)^2 \right]^{1/3} \cdot \frac{2}{g^2}$$

转折点附近, $u < E$ 区间的方程与(3.12)类似,只是等号两边同号,以及

$$\xi \rightarrow |\xi|, \quad z = \frac{2}{3} |\xi|^{3/2}.$$

四、物理真空能级与位势的自洽关系

在上一节我们表明, MPEP 轨道在不同区间满足不同的方程,两个相邻真空之间的 MPEP 轨道由七段组成,与此对应,位势也由七段构成,如图 3. 这里, q 是推广的绕数变量^[3]

$$q(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^x dt \cdot \int d^3x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.1)$$

在 $q \leq a_1$ 及 $q \geq a_2$ 区间, MPEP 对应于场方程的 M_+ 解, 在 $b_1 \leq q \leq b_2$ 区间——对应于 E_+ 解; 在转折点 r_1 与 r_2 附近, $a_1 \leq q \leq b_1$ 以及 $b_2 \leq q \leq a_2$, MPEP 分别满足上节的(2.43)或(2.52). a_1, r_1, r_2, b_1, b_2 以及 a_2 是各段 MPEP 的连接点. 它们显然都位于相邻两段 MPEP 表式都有效的区间.

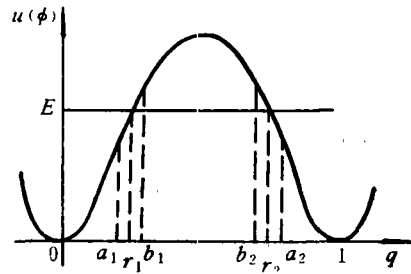


图 3

θ 真空能级的计算应与能级位置对位势的影响相自洽. 各段 MPEP 轨道以及相应的位势有一个连接的问题. 具体来说,它们应满足如下要求:

1. 各连接点两边,场的组态应连接. 例如在 a_1 点应有

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{x}, \eta_1) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \rho_1), \quad (4.2)$$

而

$$q_M(\eta_1) = q_0(\rho_1) = a_1.$$

上面, \mathbf{A}_M 是 q 轴上 $0a_1$ 段与 M_+ 解对应的 MPEP; \mathbf{A}_0 是转折点附近 a_1b_1 段的 MPEP.

2. $u|_{r_1} = u|_{r_2} = E$ (4.3)

3. 各段 MPEP 对应的绕数改变的总和等于一. 即

$$\sum_{i=1}^7 q_i = 1. \quad (4.4)$$

q_i 分别对应于图 3 上每一段绕数之改变值. 此外,各连接点位势也应连续. 不过,这已由第 1 点场组态的连接所保证. 上面所说的连接,事实上是非常麻烦的. 下面,我们在粗略的近似条件下,即假定转折点附近那两段 MPEP 很短,可以略去. 看一看,连接是怎样进行的. 此时, MPEP 共三段,如图 4. a_1-a_2 段 MPEP 以及位势对应于 E_+ 解,已有详尽的讨论. MPEP 是^[4]

$$\mathbf{A}_0 = \frac{x\tau}{x^2 + \lambda^2 + a^2} \hat{\lambda}, \quad \mathbf{A} = \frac{\lambda\tau + x \times \tau}{x^2 + \lambda^2 + a^2}. \quad (4.5)$$

λ 是轨道参量, a 是瞬子半径. $0-a_1$ 段以及 a_2-1 段对应于场方程的 M_+ 解. 从图 4 可看出,这两段 MPEP 在 E_+ 空间应给出 $0 < q < 1/2$ 的贡献; M 段是在时间变量 $-\infty < x_4 < 0$ 处, M' 段则是在 $0 < x_4 < +\infty$ 处给出贡献. 适合于此要求的经典解是 De Alfaro 等人提出的半子对解^[7,8]. $0-a_1$ 段是 A^{mm} , a_2-1 段是 A^{mm} .

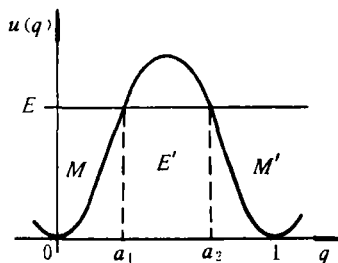


图 4

$$A_{\mu}^{mm} = \frac{i}{2} f^{-1} \partial_{\mu} f, \quad A_{\mu}^{\bar{m}\bar{m}} = \frac{i}{2} f \partial_{\mu} f^{-1}. \quad (4.6)$$

在 E , 中

$$f(x) = \frac{(\bar{s}y_+)(sy_-)}{|y_+||y_-|}, \quad f^{-1}(x) = \frac{(sy_+)(\bar{s}y_-)}{|y_+||y_-|}. \quad (4.7)$$

$$s_{\mu} = (i\sigma, 1); \quad \bar{s}_{\mu} = (-i\sigma, 1), \quad (4.8)$$

$$y_+ = x + b; \quad y_- = x - b. \quad (4.9)$$

b 是半子对的位置参量。在 M , 中, 取 $b = (0, 0, 0, 1)$ 时

$$f(\mathbf{x}, t) = -\frac{(1 - it_+ \sigma \cdot \mathbf{u})}{\sqrt{1 + t_+^2}} \cdot \frac{(1 + it_- \sigma \cdot \mathbf{u})}{\sqrt{1 + t_-^2}}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad t_{\pm} = t \pm |\mathbf{x}|.$$

按照 Bitar 等证明的^[1,4], 在(4.6)、(4.10)式中分别将 t 代之以轨道参量 η 或 ρ , 并将 A_0^{mm} 与 $A_0^{\bar{m}\bar{m}}$ 分别乘以 η 或 ρ 即得图 4 中 M , M' 段的 MPEP 表式。我们看到 M , E' , M' 三段 MPEP 表式中除了轨道参量 λ , η , ρ 而外, 还有可调节的参量 a , b 与 b' 。

令绕数变量 q 轴上两个转折点的坐标分别是 a_1 与 a_2 。那就是说, M 段与 M' 段绕数改变的贡献分别是 a_1 与 $(1 - a_2)$

$$q_M(\eta = \eta_1) = a_1, \quad (4.11)$$

$$q_{M'}(\rho = \rho_1) = a_2. \quad (4.12)$$

当然, 我们令 $q_M(\eta = -\infty) = 0$, $q_{M'}(\rho = +\infty) = 1$, E' 段之贡献是 $(a_1 - a_2)$

$$q_{E'}(\lambda_2) - q_E(\lambda_1) = a_2 - a_1. \quad (4.13)$$

(4.11)、(4.12)、(4.13) 保证三段 MPEP 对绕数改变之点和为一。

由于我们略去了两个转折点附近的小段 MPEP。因此, 要求转折点两边场组态连接是不可能的。代之以位势的连接, 即:

$$u_M(\eta_1) = E; \quad u_{E'}(\lambda_1) = E, \quad u_{M'}(\rho_1) = E; \quad u_{E'}(\lambda_2) = E. \quad (4.14)$$

这样, 共有参量九个: $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \rho_1, a, b, b'$ 。而(4.11)–(4.14)共有七个方程。也就是说有两个参数是任意的。

当然, 耦合常数 g 也是可调节的, 位势与能级 E 之间还要满足周期势的薛定格方程。

参 考 文 献

[1] Khalil M. Bitar, Shau-Jin Chang, *Phys. Rev.*, D17(1978), 486.

- [2] C. Callan, R. Dashen, D. Gross, *Phys. Lett.*, **63B**(1976), 334.
 [3] 王滋等, 1980 年 广州粒子物理理论会议上的报告.
 [4] Khalil M. Bitar, Shau-Jin Chang, *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 435.
 [5] A. S. Dauidov, "Quantum Mechanics", Pergamon Press.
 [6] 雷日克, 格拉德斯坦, "函数表与积分表". 1959 年 高等教育出版社.
 [7] V. De Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, *Phys. Lett.*, **72B**(1977), 203
 [8] 吴泳时, 1978 年 广州规范场会议述评报告汇编.

DISCUSSIONS ON THE TRANSITION BETWEEN E_+ SOLUTIONS AND M_+ SOLUTIONS IN ENERGY BAND THEORY

WANG MING-ZHONG ZHENG XI-TE

(*Chengdu University of Science and Technology*)

WANG KE-LIN

(*University of Science and Technology of China*)

XIAN DING-CHANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ZHANG ZHENG-GANG

(*Chengdu Institute of Geology*)

ABSTRACT

The most probable escape path (MPEP) between vacuums, determined with WKB method, is expressed by different functions corresponding to the classical solutions of field equations in Euclidean space or in Minkowski Space while the potential U is higher or lower than the energy E respectively. But the WKB method will not be valid nearby the turning point $u=E$. In this paper we give the equations satisfied in the vicinity of turning point by MPEP which connects E_+ and M_+ solutions. The energy levels of physical θ vacuums obtained in terms of periodic potential in winding number space are not equal to the energy of original vacuums. The MPEP and also the potential depend on positions of energy levels. Conversely, the energy levels are determined by potential. We explain how to account this selfconsistently.