第 7 卷 第 1 期
1983 年 1 月

高 能 物 理 与 核 物 理

PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS

Vol. 7, No. 1
Jan., 1983

$SO(6)$ 和 $SU(4)$ 群 Gelfand-Zetlin 态间的变换系数

于 祖 荣
（南 京 大 学）

摘 要

本文给出了一种计算 $SO(6)$ 和 $SU(4)$ 群 Gelfand-Zetlin 态间的变换系数的方法.

正交群在物理学中非常有用[1,2]. 关于 $O(n)$ 群的一般讨论可参阅有关文献. 本文只限于讨论 $SO(6)$ 与 $SU(4)$ 群的 Gelfand-Zetlin (GZ) 态之间的联系，这在物理上也是有用的.

我们知道这两个群是局部同构的，即它们的李代数 D_3 和 A_3 是同构的，$D_3 \simeq A_3$. 但若以无穷小生成元作为李代数的基，这并不显然. 因此我们必须作一非奇异映射才能建立它们之间的同构关系，从而也就容易建立起两个 GZ 基之间的联系.

若以 $E_{ij} = E_{ji}^{+}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ 代表 $SU(4)$ 的生成元，它们满足对易关系

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj} \tag{1a}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{4} E_{ii} = 0 \tag{1b}$$

设$[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]$是 $SU(4)$ 的一个不可约表示. 在此表示空间里可以构造出正则 GZ 基

$$|\lambda\rangle = \left|\begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_{14} & & \lambda_2 = \lambda_{24} & & \lambda_3 = \lambda_{34} & & \lambda_{44} = 0 \\ & \lambda_{13} & & \lambda_{23} & & \lambda_{33} & \\ & & \lambda_{12} & & \lambda_{22} & & \\ & & & \lambda_{11} & & & \end{matrix}\right\rangle \tag{2}$$

其中 λ_{ij} 满足不等式

$$\lambda_{i,j+1} \geqslant \lambda_{ij} \geqslant \lambda_{i+1,j+1} \geqslant 0 \tag{3}$$

对于 GZ 基，相互对易的算符 E_{ii}, $i = 1, 2, 3, 4$ 是对角的，其本征值为[4]

$$E_{jj}|\lambda\rangle = \left(\sum_{i=1}^{j} \lambda_{ij} - \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_{i,j-1} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \lambda_{i4}\right)|\lambda\rangle \tag{4}$$

本文 1982 年 4 月 10 日收到.

而升算符 $E_{j-1,j}$ 和降算符 $E_{j,j-1}$ 作用于 GZ 态上的结果可参阅文献[5].

相似地,对于 $SO(6)$ 群,我们知道它的不可约表示也可用三个数 (m_1, m_2, m_3) 来标记[6]. 这些数或者全为整数或者全为半整数. 而且可以证明它们与标记 $SU(4)$ 不可约表示的 λ_i, $i=1,2,3$ 有下列关系

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_1 + m_2 \\ \lambda_2 &= m_1 - m_3 \\ \lambda_3 &= m_2 - m_3 \end{aligned} \tag{5}$$

在 $SO(6)$ 的表示空间里,我们也可构造出正则 GZ 基

$$|m\rangle = \left| \begin{array}{ccc} m_{61}=m_1 & m_{62}=m_2 & m_{63}=m_3 \\ m_{51} & & m_{52} \\ m_{41} & & m_{42} \\ & m_{31} & \\ & m_{21} & \end{array} \right\rangle \tag{6}$$

其中 m_{ij} 满足

$$\begin{aligned} & m_{2j+1\,i+1} \leqslant m_{2ji} \leqslant m_{2j+1\,i} \quad (i=1,2,\cdots,j-1) \\ & m_{2j\,i+1} \leqslant m_{2j-1\,i} \leqslant m_{2ji} \quad (i=1,2,\cdots,j-1) \\ & |m_{2jj}| \leqslant m_{2j-1\,j-1} \leqslant m_{2j\,j-1} \\ & |m_{2jj}| \leqslant m_{2j+1\,j} \end{aligned} \tag{7}$$

若设厄米算符 $x_{ij}=-x_{ji}$, $i,j=1,2\cdots6$ 是 $SO(6)$ 的生成元,它们满足对易关系[7]

$$[x_{ij}, x_{kl}] = i(\delta_{ik}x_{il} + \delta_{il}x_{jk} - \delta_{ik}x_{jl} - \delta_{jl}x_{ik}) \tag{8}$$

显然算符 x_{12}, x_{34} 和 x_{56} 是相互对易的. 但与 $SU(4)$ 不同,除 x_{12} 外 GZ 态(6)一般不是 x_{34} 和 x_{56} 的本征态. 关于 $x_{2j-1,2j}$, $x_{2j,2j+1}$ 对 GZ 态作用的结果可参阅文献[7].

现在对照对易关系式(1)和(8),我们可以得到两者之间的同构映射.

Cartam 子代数:

$$H_j = E_{jj} + E_{44} = H'_j = x_{2j-1,2j} \quad j=1,2,3 \tag{9}$$

其余元素则有下列对应

一级根:

$$E_{12} = \frac{1}{2}(x_{13} + ix_{14} - ix_{23} + x_{24}) \tag{10a}$$

$$E_{23} = \frac{1}{2}(x_{35} + ix_{36} - ix_{45} + x_{46}) \tag{10b}$$

$$E_{34} = \frac{1}{2}(x_{13} + ix_{14} + ix_{23} - x_{24}) \tag{10c}$$

二级根:

$$E_{13} = \frac{1}{2}(ix_{15} - x_{16} + x_{25} + ix_{26}) \tag{10d}$$

$$E_{24} = \frac{1}{2}(-ix_{15} + x_{16} + x_{25} + ix_{26}) \tag{10e}$$

三级根：

$$E_{14}=\frac{1}{2}\left(-x_{35}-ix_{45}-ix_{36}+x_{46}\right) \tag{10f}$$

还剩下六个元素可从(10)式很容易求出.

最后设两组 GZ 基(2)和(6)有下列变换关系

$$|m\rangle=\sum_{(\lambda)}|\lambda\rangle\langle\lambda|m\rangle \tag{11}$$

其中求和是对(2)式中除 λ_i, $i=1,2,3$, 外的所有 λ_{ij} 作的，当然这些 λ_{ij} 必须满足(3)式．显然变换系数 $\langle\lambda|m\rangle$ 是正交归一的，所以(11)式可以逆展开.

关系 $\langle\lambda|m\rangle$ 的具体计算，可先从 $SU(4)$ 或 $SO(6)$ 的最高权态出发．若从 $SU(4)$的最高权态出发，则由(4)式得$H_i|\lambda\rangle_{HW}=\left(\lambda_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\right)|\lambda\rangle_{HW}$, $i=1,2,3$, 并可导出 $H'_1|m\rangle=m_3|m\rangle$, $H'_2|m\rangle=-m_2|m\rangle$, $H'_3|m\rangle=-m_1|m\rangle$. m_1, m_2 和 m_3 的数值由(5)式确定，所以此时 GZ 态(6)中的 m_{11} 是确定的．再由规则 (7) 等就可定出与 $|\lambda\rangle_{HW}$ 相应的态．其余的态则可用降算符 $E_{i,i-1}$ 及对应关系(10)求出，从而也就求出，$\langle\lambda|m\rangle$.

若从 $|m\rangle_{HW}$ 出发，则由

$$H'_i|m\rangle_{HW}=m_i|m\rangle_{HW}\quad i=1,2,3$$

可得

表 1　四维表示的变换系数

$SU(4)$GZ 态(注)	$SO(6)$GZ 态(注)			
	$\left\lvert\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & \end{matrix}\right\rangle$	$\left\lvert\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \\ -\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\rangle$	$\left\lvert\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \\ -\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\rangle$	$\left\lvert\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & \end{matrix}\right\rangle$
$\left\lvert\begin{matrix}1 & & 0 & & 0\\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{matrix}\right\rangle$	-1			
$\left\lvert\begin{matrix}1 & & 0 & & 0\\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{matrix}\right\rangle$		-1		
$\left\lvert\begin{matrix}1 & & 0 & & 0\\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{matrix}\right\rangle$			1	
$\left\lvert\begin{matrix}0 & & 0 & & 0\\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{matrix}\right\rangle$				1

注：为书写方便，在上面的 GZ 基中未写代表不可约表示的部分。以下同。

表 2　六维表示的变换系数

$SU(4)$GZ 态 \ $SO(6)$GZ 态	$\left\lvert\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{0}\\ \multicolumn{2}{c}{0}\end{matrix}\right\rangle$	$\left\lvert\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{0}\\ \multicolumn{2}{c}{0}\end{matrix}\right\rangle$	$\left\lvert\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{0}\\ \multicolumn{2}{c}{0}\end{matrix}\right\rangle$	$\left\lvert\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{1}\\ \multicolumn{2}{c}{0}\end{matrix}\right\rangle$	$\left\lvert\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{1}\\ \multicolumn{2}{c}{1}\end{matrix}\right\rangle$	$\left\lvert\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{1}\\ \multicolumn{2}{c}{-1}\end{matrix}\right\rangle$
$\left\lvert\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{1 \quad 1}\\ \multicolumn{3}{c}{1}\end{matrix}\right\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-i}{\sqrt{2}}$				
$\left\lvert\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{1 \quad 0}\\ \multicolumn{3}{c}{1}\end{matrix}\right\rangle$			$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		
$\left\lvert\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{1 \quad 0}\\ \multicolumn{3}{c}{1}\end{matrix}\right\rangle$					1	
$\left\lvert\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{1 \quad 0}\\ \multicolumn{3}{c}{0}\end{matrix}\right\rangle$						1
$\left\lvert\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{1 \quad 0}\\ \multicolumn{3}{c}{0}\end{matrix}\right\rangle$			$-\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		
$\left\lvert\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{0 \quad 0}\\ \multicolumn{3}{c}{0}\end{matrix}\right\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-i}{\sqrt{2}}$				

$$
\begin{aligned}
H_1|\lambda\rangle &= \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)|\lambda\rangle = \left(\lambda_{11}+\frac{1}{2}A-B\right)|\lambda\rangle \\
H_2|\lambda\rangle &= \frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)|\lambda\rangle = \left(C-\lambda_{11}+\frac{A}{2}-B\right)|\lambda\rangle \qquad (12)\\
H_3|\lambda\rangle &= \frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)|\lambda\rangle = \left(-C+\frac{1}{2}A\right)|\lambda\rangle
\end{aligned}
$$

其中 $A=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i$, $B=\sum_{i=1}^{3}\lambda_{i3}$ $C=\sum_{i=1}^{2}\lambda_{i2}$. 由(12)式右边第二个等式以及关系式(3)容易推出

$$\lambda_{11}=\lambda_{12}=\lambda_{13}=\lambda_2,\ \lambda_{22}=\lambda_{23}=\lambda_3,\ \lambda_{33}=0.$$

所以

$$
|m\rangle_{HW} = \left|\begin{matrix} m_1 \ m_2 \ m_3 \\ m_1 \quad m_2 \\ m_1 \quad m_2 \\ m_1 \\ m_1 \end{matrix}\right\rangle \Longleftrightarrow \left|\begin{matrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ 0 \\ \lambda_2 \ \lambda_3 \ 0 \\ \lambda_2 \ \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{matrix}\right\rangle
$$

其余的态可用前述类似的方法求出．在表 1 和 2 中列出了一些低维表示的实例．其他高维表示将在以后给出．

参　考　文　献

[1] Arima, A., Iachello, F., *Ann. Phys.*, NY**99**(1976), 235.
[2] 孙洪洲，原子核物理，**3**(1981)，119.
[3] Gell-Mann, M. et al., *Rev. Mod. Phys.*, **50**(1978), 721.
[4] Haacke, E. M. et al., *J. Math. Phys.*, **17**(1976), 2041.
[5] Barut, A. O., Raczka, R., Theory of Group Representations and Applications 1977.
[6] 孙洪洲，韩其智，1982 年武汉粒子物理讲习班讲义.
[7] Maekawa, T., *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 691.

TRANSFORMATION COEFFICIENTS BETWEEN *SO*(6) AND *SU*(4) GELFAND-ZETLIN STATES

Yu Zu-rong

(*Nanjing University*)

Abstract

In this note, we have given a method of calculating the transformation coefficients between $SO(6)$ and $SU(4)$ Gelfand Zetlin states.