

μ 原子瞬发裂变后 μ^- 末态几率的计算

蔡崇海

卓益忠

(南开大学物理系)

(中国科学院原子能研究所)

摘 要

本工作对两种核电荷分布(指数型及方型)、两种试探波函数(指数型及 Gauss 型)用变分法计算了 μ 原子的 $1s$ 态及 $2p$ 态能级,并与严格计算^[1]做了比较。用“原子轨道线性组合”方法(LCAO)计算了双中心扩散核 Coulomb 场中 μ^- 的四条能级。用“定态微扰”方法(PSS)解与时间有关的 Schrödinger 方程,求得了四能级下 μ^- 的末态几率。结果表明 μ 原子瞬发裂变后 μ^- 主要位于重碎片的基态($1s$ 态),位于轻碎片基态的几率仅有 3.8—5.1%,位于重、轻碎片 $2p$ 态的几率各为 0.7—0.9% 和—0.1%。这些结果与文献[2]、[3]的计算值基本一致,与实验测量值相比,在测量误差范围内也是符合的。

一、引 言

μ^- 轻子自然衰变($\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$)的寿命(2.2×10^{-6} sec)足够长,它完全可通过电离效应在介质中慢化下来而形成 μ 原子。位于最外层轨道的 μ^- 通过发射 Auger 电子或 X 射线而产生级联跃迁,最后到达 $1s$ 态。在重 μ 原子级联跃迁到 $1s$ 态的过程中也可能在电磁相互作用下经逆内转换而使原子核激发(即无辐射跃迁),对于锕系核这种激发能可能超过裂变位垒的高度,从而引起核的瞬发裂变^[4-6]。由于 μ^- 在 $1s$ 轨道上的寿命远大于激发核的寿命,因此希望 μ^- 可以作为一个探针来研究核裂变的动力学性质。近已有有人测量了 μ 原子瞬发裂变之后束缚在裂变碎片上 μ^- 的平均寿命 τ_μ ^[7-9],再通过 Paulard-Primakoff 公式^[10]或所谓 Primakoff 描绘对测得的 τ_μ 进行分析得出结论: μ 原子瞬发裂变之后 μ^- 主要跟随重碎片,但也有小于 10% 的几率为轻碎片所俘获。

μ^- 与正在裂变的核组成的耦合系统的动力学过程引起了 μ^- 的激发,这个激发几率与裂变动力学有关,因此理论计算与实验测量的比较有可能给出有关裂变动力学的一些认识。目前已有的一些理论工作试图通过讨论 μ^- 的末态激发几率来研究裂变过程的动力学。文献[11]和[3]分别在两个分离点核电荷和扩散核电荷分布的 Coulomb 场下讨论 μ^- 的二能级与时间有关的 Schrödinger 方程,计算了裂变后 μ^- 的激发几率。最近马把他们以前的二能级的计算^[3]扩展为四能级,取核电荷分布为指数型,试探波函数 φ_{1s}

和 φ_{2p} 也为指数型。他们的计算指出对于最可几裂变 μ^- 在裂变轻碎片上的俘获几率约为 3.5%， μ^- 处于重碎片 $2p$ 态的几率约为 0.8%。马等的工作中许多地方可得到解析表达式，因而数值计算工作量小，但他们将核电荷分布取为指数形式，似乎与真实分布差得远了一些。因此本工作进一步考虑了更加接近实际情况的方型电荷分布，对于试探波函数也取了指数型和 Gauss 型两种。我们试图通过各种情况下计算结果的比较，看看不同的扩散核电荷分布和不同的试探波函数对末态几率有多大影响，并希望在不增加太多计算量的前提下对他们的结果能有一定改进。原则上 μ^- 最后处在 $2p$ 态的几率可通过测量裂变碎片的特征 X 射线得到，希望通过理论计算与实验测量的比较能够给出裂变动力学的一些知识。

二、 μ^- 原子的能级和波函数

由于 μ^- 的质量远大于 e^- 的质量， μ^- 的 $1s$ 态有很大一部分位于核内，所以把核看成点电荷显然是不合适的。最接近实际的电荷分布应是 Fermi 型的。

$$\rho(r) = \rho_0 [1 + e^{\frac{r-r_0}{r_1}}]^{-1}$$

但若用了 Fermi 型电荷分布，以下的计算就得不到解析表达式了。为了简化计算，文献 [2]、[3] 取核电荷分布为指数型，

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r}{r_1}} \left(\rho_0 = \frac{Ze}{8\pi r_1^3}, 12r_1^2 = \langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R_c^2, R_c = 1.2A^{\frac{1}{3}} \right). \quad (1a)$$

在我们的计算中除了 (1a) 之外，还取了更加接近实际情况的方型电荷分布，

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r \leq R_c \\ 0, & r > R_c \end{cases} \left(\rho_0 = \frac{3Ze}{4\pi R_c^3}, R_c = \begin{cases} 1.2A^{\frac{1}{3}} \\ 1.1A^{\frac{1}{3}} \end{cases} \right) \quad (1b)$$

试探波函数取指数型(点电荷 Coulomb 场的严格解)

$$\varphi_{1s} = (\pi a^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a}}, \varphi_{2p} = (\pi b^5)^{-\frac{1}{2}} z e^{-\frac{r}{b}} \quad (2)$$

及 Gauss 型(三维谐振子的严格解)

$$\varphi_{1s} = (\pi a^2)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}, \varphi_{2p} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/4} b^{5/2}} z e^{-\frac{r^2}{2b^2}} \quad (3)$$

两种。 μ^- 在指数型及方型电荷分布核 Coulomb 场中的 Hamiltonian 分别为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{r} \left[1 - \left(1 + \frac{r}{2r_1} \right) e^{-\frac{r}{r_1}} \right] \quad (4)$$

$$\begin{cases} H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \\ V(r) = - \begin{cases} \frac{3Ze^2}{2R_c} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R_c} \right)^2 \right], & r \leq R_c \\ \frac{Ze^2}{r}, & r > R_c \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

(4) 式中 m 应为 μ^- 与核的折合质量，由于核质量远大于 μ^- 的质量，就可以近似地取 μ^- 的质量。

因所

E_{1s}

的运

这里 Z
为 μ^- 的
双
心系中
优点在
阵元 S_{jk}
避免大量
义特征值
四条能级
数就各自
 μ^- 与

代人与时作

因为

$$\langle \varphi_{1s} | \varphi_{1s} \rangle = \langle \varphi_{2p} | \varphi_{2p} \rangle = 1, \quad \langle \varphi_{1s} | \varphi_{2p} \rangle = 0,$$

所以

$$E_{1s} = \langle \varphi_{1s} | H | \varphi_{1s} \rangle, \quad E_{2p} = \langle \varphi_{2p} | H | \varphi_{2p} \rangle.$$

由极值条件 $\frac{dE_{1s}}{da} = 0$ 和 $\frac{dE_{2p}}{db} = 0$ 可得到确定变分参数 a 和 b 的方程, 进而得到 E_{1s} 和 E_{2p} 的表达式. 用这些表达式就可算出各种情况下的参数 a 和 b 及能级 E_{1s} 和 E_{2p} .

三、裂变过程中及裂变后 μ^- 的激发

我们先考虑任一时刻 t (两裂变碎片中心距离为 $R(t)$) μ^- 在两碎片的 Coulomb 场中的运动, μ^- 满足定态 Schrödinger 方程

$$H(R, \mathbf{r})\psi(R, \mathbf{r}) = E(R)\psi(R, \mathbf{r}). \quad (5)$$

双中心指数型及方型核电荷分布 Coulomb 场中 μ^- 的 Hamiltonian 分别为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 - \frac{Z_1 e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1|} \left[1 - \left(1 + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1|}{2r_{j1}} \right) e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1|}{r_{j1}}} \right] - \frac{Z_2 e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_2|} \left[1 - \left(1 + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_2|}{2r_{j2}} \right) e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_2|}{r_{j2}}} \right] \quad (5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V_1(\mathbf{r}, \mathbf{R}_1) + V_2(\mathbf{r}, \mathbf{R}_2) \\ V_i(\mathbf{r}, \mathbf{R}_i) = - \begin{cases} \frac{3Z_i e^2}{2R_{ci}} \left(1 - \frac{1}{3} \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}_i}{R_{ci}} \right|^2 \right), & |\mathbf{r} - \mathbf{R}_i| \leq R_{ci} \\ \frac{Z_i e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|}, & |\mathbf{r} - \mathbf{R}_i| > R_{ci} \end{cases} \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (5b)$$

里 Z_1 、 Z_2 分别表示重、轻碎片的核电荷数; \mathbf{R}_1 、 \mathbf{R}_2 为质心系中重、轻碎片的坐标, \mathbf{r} 为 μ^- 的坐标.

双中心 Coulomb 场中的定态问题用“原子轨道线性组合”方法(LCAO)来计算, 选质心系中重、轻碎片的 $1s$ 态及 $2p$ 态的 4 个波函数作为展开基矢. 我们的计算模型的最大特点在于, 对于两种电荷分布和两种试探波函数的任何一种组合, 我们均可推导出全部矩阵元 $S_{jk} \equiv \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle$ 和 $H_{jk} \equiv \langle \varphi_j | H | \varphi_k \rangle$ ($j, k = 1, 2, 3, 4$) 的解析表达式, 从而可以避免大量的二重数值积分运算, 能节省大量计算时间. 用线性代数中的标准方法求解广义特征值问题 $HU_j = E_j S U_j$ 可得到四个正交归一化的波函数 $\psi_j = \sum_{k=1}^4 U_k^j \varphi_k$ 及相应的能级. 当两碎片中心之间的距离 R 趋向于无穷大时, 这四条能级和相应的四个波函数各自对应于重、轻碎片的 $1s$ 态和 $2p$ 态.

μ^- 与时间有关的 Schrödinger 方程的解可以表示为

$$\Psi = \sum_{j=1}^4 C_j \psi_j e^{-\frac{i}{\hbar} \int^t E_j dt'} \quad (6)$$

与时间有关的 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (7)$$

中,得到一常微分方程组

$$\frac{dC_j}{dt} = - \sum_{k \neq j} C_k \langle \psi_j | \frac{d}{dt} | \psi_k \rangle \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int^t (E_j - E_k) dt' \right] \quad (8)$$

假设裂变碎片无轨道角动量, R 不改变方向, 只改变大小, 两裂变碎片的相对运动是 Coulomb 斥力作用下的经典运动. 因为

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dR} \frac{dR}{dt} = \dot{R} \frac{d}{dR}, \quad dt = \frac{dR}{\dot{R}},$$

再记复数 $C_j = h_j e^{i\delta_j}$ (h_j 和 δ_j 为实数), 则可将 (8) 式变为包括八个方程的线性常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dh_j}{dR} = - \sum_{k \neq j} F_{jk} h_k \cos(K_{jk} + \delta_k - \delta_j) \\ \frac{d\delta_j}{dR} = - \sum_{k \neq j} F_{jk} \frac{h_k}{h_j} \sin(K_{jk} + \delta_k - \delta_j), \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (9)$$

这里已引入了记号

$$F_{jk} \equiv \left\langle \psi_j \left| \frac{d}{dR} \right| \psi_k \right\rangle \text{ 是跃迁矩阵元,}$$

$$K_{jk} \equiv \int_{R_0}^R \frac{F_j(R') - E_k(R')}{\hbar \dot{R}'} dR' \text{ 是相因子矩阵元,}$$

F 和 K 都是反对称矩阵.

(6) 式中的展开系数 C_j 应满足归一化条件

$$\sum_{j=1}^4 |C_j|^2 = \sum_{j=1}^4 h_j^2 = 1.$$

由于四个 ψ_j 之间是彼此正交归一化的, 所以 $h_j^2 = |C_j|^2$ 就是 μ^- 处于双中心 Coulomb 场中各能级 ψ_j 的几率. 我们用 Runge-Kutta 法中的 Gill 公式求解线性常微分方程组 (9) 以确定 μ^- 的末态几率. 根据核裂变的液滴模型计算, 认为裂变核从鞍点到断点的运动有一定的粘滞性, 即核有内部激发, 核从鞍点(约 10fm) 到断点(约 23fm) 的时间约为 $3 \times 10^{-21} \text{sec}^{[22]}$. 在我们的计算中, 假定核从鞍点到断点的运动是两球形块的匀速分离, 断点后两碎片则在 Coulomb 斥力作用下作加速运动. 我们取两块中心距离为 11fm 作为计算的出发点, 假定这时 μ^- 仍完全处于系统的基态, 即假定这时 $h_1 = 1, h_{2,3,4} = \delta_{1,2,3,4} = 0$. 等于对核在达到 $R = 11\text{fm}$ 之前的运动做了“绝热近似”, 即认为核的变形运动足够慢, 总能随时调整自身的运动使其总处在系统的基态上. 我们取核的两块从 $R = 11\text{fm}$ 到 18fm 的匀速运动速度为 $v_0 = 3 \times 10^8 \text{cm/sec}$ (百分之一光速), 在 18fm 处断开之后由 Coulomb 场加速, 这样得到最后两碎片的相对运动动能约为 170MeV, 与实验数据一致. 为了看看粘滞性大小对末态几率的影响, 我们也取 $v_0 = 10^9 \text{cm/sec}$ 和 $v_0 = 3 \times 10^7 \text{cm/sec}$ 计算了末态几率.

表 1 十个 μ 原子计算能级的比较

Nuclei	E_{1s} (MeV)						
	1	2	3	4	5	6	7
$^{68}_{30}\text{Zn}$	-2.219	-2.223	-2.019	-2.197	-2.015	-2.234	-2.033
$^{80}_{34}\text{Se}$	-2.755	-2.755	-2.537	-2.714	-2.528	-2.769	-2.559
$^{88}_{38}\text{Sr}$	-3.332	-3.336	-3.101	-3.270	-3.086	-3.345	-3.131
$^{98}_{42}\text{Mo}$	-3.931	-3.936	-3.696	-3.842	-3.670	-3.941	-3.735
$^{104}_{46}\text{Pd}$	-4.552	-4.560	-4.320	-4.431	-4.280	-4.557	-4.368
$^{110}_{50}\text{Sn}$	-5.182	-5.194	-4.962	-5.023	-4.902	-5.180	-5.017
$^{118}_{54}\text{Xe}$	-5.823	-5.843	-5.623	-5.624	-5.538	-5.813	-5.683
$^{142}_{58}\text{Ce}$	-6.485	-6.514	-6.308	-6.242	-6.193	-6.465	-6.371
$^{152}_{62}\text{Sm}$	-7.155	-7.197	-7.008	-6.867	-6.858	-7.126	-7.071
$^{166}_{66}\text{Dy}$	-7.818	-7.876	-7.709	-7.483	-7.517	-7.779	-7.769

Nuclei	E_{2p} (MeV)						
	1	2	3	4	5	6	7
$^{68}_{30}\text{Zn}$	-0.633	-0.632	-0.573	-0.633	-0.573	-0.633	-0.573
$^{80}_{34}\text{Se}$	-0.814	-0.812	-0.736	-0.812	-0.736	-0.812	-0.736
$^{88}_{38}\text{Sr}$	-1.017	-1.013	-0.919	-1.014	-0.919	-1.014	-0.919
$^{98}_{42}\text{Mo}$	-1.242	-1.235	-1.122	-1.237	-1.123	-1.238	-1.123
$^{104}_{46}\text{Pd}$	-1.490	-1.479	-1.345	-1.482	-1.346	-1.483	-1.347
$^{110}_{50}\text{Sn}$	-1.759	-1.742	-1.588	-1.747	-1.590	-1.750	-1.591
$^{118}_{54}\text{Xe}$	-2.048	-2.026	-1.851	-2.032	-1.854	-2.037	-1.855
$^{142}_{58}\text{Ce}$	-2.359	-2.328	-2.132	-2.337	-2.137	-2.344	-2.138
$^{152}_{62}\text{Sm}$	-2.689	-2.648	-2.432	-2.660	-2.439	-2.670	-2.441
$^{166}_{66}\text{Dy}$	-3.037	-2.985	-2.750	-3.000	-2.760	-3.014	-2.764

1. Fermi 电荷分布, Dirac 能级^[1]
2. 指数电荷分布, 指数波函数 ($R_c = 1.2A^{\frac{1}{3}}, r_i = R_c/2\sqrt{5}$)^[2]
3. 指数电荷分布, Gauss 波函数 ($R_c = 1.2A^{\frac{1}{3}}, r_i = R_c/2\sqrt{5}$)
4. 方型电荷分布, 指数波函数 ($R_c = 1.2A^{\frac{1}{3}}$)
5. 方型电荷分布, Gauss 波函数 ($R_c = 1.2A^{\frac{1}{3}}$)
6. 方型电荷分布, 指数波函数 ($R_c = 1.1A^{\frac{1}{3}}$)
7. 方型电荷分布, Gauss 波函数 ($R_c = 1.1A^{\frac{1}{3}}$)

四、结果和讨论

我们用第二节中所述的方法计算了十个 μ 原子的 $1s$ 和 $2p$ 态能级, 结果列在表 1 中。为了进行比较, 表 1 中也给出了马等的结果^[2]和用 Fermi 型电荷分布求解 Dirac 方程所得的严格计算结果^[1]。可以看出, 指数型试探波函数的结果比 Gauss 型试探波函数的要低, Gauss 型波函数得到的能级普遍偏高。指数型试探波函数得到的能级相当接近严格结果, 无论核电荷分布取方型 ($R_c = 1.1A^{\frac{1}{3}}$) 或指数型都差不多, 只是前者的 $2p$ 态能级更接近严格结果一些。对于方型电荷分布由于取 $R_c = 1.2A^{\frac{1}{3}}$ 得到的能级值显然 $R_c = 1.1A^{\frac{1}{3}}$ 的好, 因此决定在动力学计算中取 $R_c = 1.1A^{\frac{1}{3}}$ 。

表2 用于动力学计算中的 μ 原子轨道参数和能级

Nuclei		$^{140}_{52}\text{Te}$	$^{98}_{40}\text{Zr}$	$^{121.6}_{47}\text{Ag}$	$^{114.6}_{45}\text{Rh}$	$^{154}_{58}\text{Ce}$	$^{84}_{34}\text{Se}$	$^{133.2}_{60}\text{Nd}$	$^{82.9}_{32}\text{Ge}$
r_j (fm)	1	1.39	1.24	1.33	1.31	1.44	1.18		
	2	1.393	1.237	1.329	1.310	1.438	1.175	1.442	1.170
R_c (fm)	3	5.712	5.071	5.450	5.371	5.896	4.817	5.911	4.794
	4	5.712	5.071	5.450	5.371	5.896	4.817	5.911	4.794
a (fm)	1	7.17	8.29	7.56	7.75	6.75	9.24		
	2	8.528	10.009	9.034	9.288	8.054	11.281	7.835	11.845
	3	7.309	8.350	7.663	7.846	6.925	9.260	6.795	9.681
	4	8.512	9.924	8.984	9.227	8.026	11.173	7.868	11.739
b (fm)	1	10.1	12.9	11.1	11.5	9.12	15.1		
	2	16.475	21.301	18.173	18.965	14.838	25.276	14.364	26.595
	3	9.983	12.847	10.986	11.457	9.018	15.082	8.739	16.019
	4	16.404	21.276	18.126	18.925	14.733	25.021	14.257	26.584
E_{1s} (MeV)	1	- 5.45	- 3.62	- 4.67	- 4.36	- 6.45	- 2.75		
	2	- 5.240	- 3.383	- 4.447	- 4.131	- 6.256	- 2.531	- 6.618	- 2.262
	3	- 5.426	- 3.623	- 4.666	- 4.357	- 6.397	- 2.759	- 6.745	- 2.478
	4	- 5.297	- 3.419	- 4.496	- 4.177	- 6.314	- 2.554	- 6.680	- 2.281
E_{2p} (MeV)	1	- 1.88	- 1.12	- 1.54	- 1.42	- 2.33	- 0.812		
	2	- 1.716	- 1.018	- 1.404	- 1.288	- 2.131	- 0.736	- 2.279	- 0.652
	3	- 1.889	- 1.123	- 1.547	- 1.420	- 2.342	- 0.812	- 2.503	- 0.720
	4	- 1.720	- 1.019	- 1.406	- 1.289	- 2.138	- 0.736	- 2.287	- 0.652

1. 指数电荷分布, 指数波函数^[2]

2. 指数电荷分布, Gauss 波函数

3. 方型电荷分布, 指数波函数 ($R_c = 1.1A^{1/3}$)4. 方型电荷分布, Gauss 波函数 ($R_c = 1.1A^{1/3}$)本表中的6个核都是 ^{235}U 按不同方式裂变的碎片

在动力学计算时我们考虑的都是 ^{235}U 的 μ 原子瞬发裂变。表2列出了几组裂变片片的 a 、 b 及 E_{1s} 、 E_{2p} 值,作为比较,也给出了文献[2]的结果。

2. 用第三节中的公式计算了三种组合在最可几、近似对称、远离对称裂变情况下 μ 四条能级和相应的波函数随两碎片中心距离 R 的变化。能级随 R 的变化由图1给出。图中可以看出,对相同的试探波函数,电荷分布取指数型或方型对能级随 R 的变化影响小。Gauss型和指数型试探波函数相比较,对能级随 R 的变化影响稍大些(特别是 $R < 50\text{fm}$ 的一段),但也不很显著。从图上可以看出当 $R > 120\text{fm}$ 之后各能级的变化已很缓慢,各自接近了重、轻碎片的 $1s$ 或 $2p$ 态能量,但又比各自对应的一个碎片的能量低 $0.3-0.4\text{MeV}$ 。这是为什么呢?从数值结果看,当 $R > 120\text{fm}$ 之后,已有 $u_j^i \approx 1$, $u_k^j (k \neq j) < 0.01$,即 $\psi^i \approx \phi_j$,复合系统各态的波函数 ψ^i 已分别接近了一个展开基波函数。但是由于Coulomb场是长程力,即使 $R = 200\text{fm}$,一个碎片对位于另一碎片旁的 μ 有较大的吸引力,会使能级有明显的降低。的确,用点电荷近似 $\Delta E = -\frac{Ze^2}{R}$ 估计出的能级修正值与数值计算得到的相应能量差额是一致的。

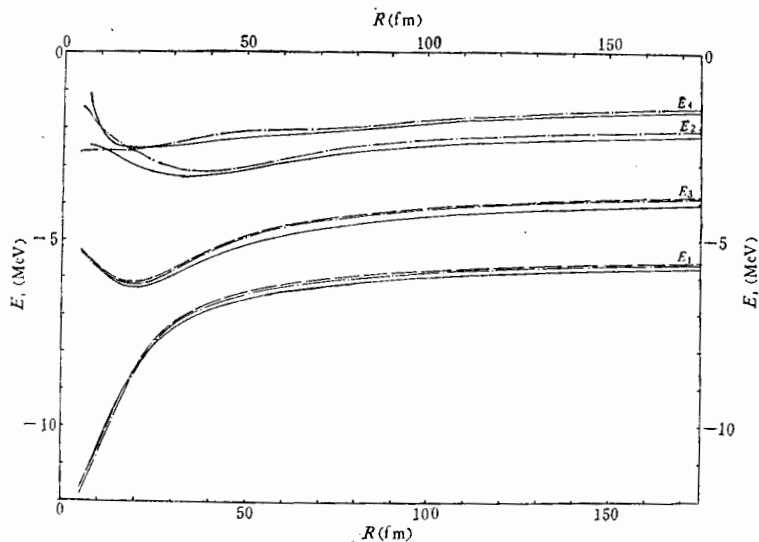


图 1 最可几裂变情况下 ($^{140}_{52}\text{Te} + ^{90}_{40}\text{Zr}$) 双中心核 Coulomb 场中 μ^- 的四条能级 E_i 随两裂变碎片中心之距离 R 的变化

(当 $R \rightarrow \infty$ 时 $E_1 \rightarrow E_{1H}^I$, $E_2 \rightarrow E_{2H}^I$, $E_3 \rightarrow E_{3L}^I$, $E_4 \rightarrow E_{4L}^I$)

- 方型电荷分布, 指数波函数
- - 方型电荷分布, Gauss 波函数
- · - 指数电荷分布, Gauss 波函数

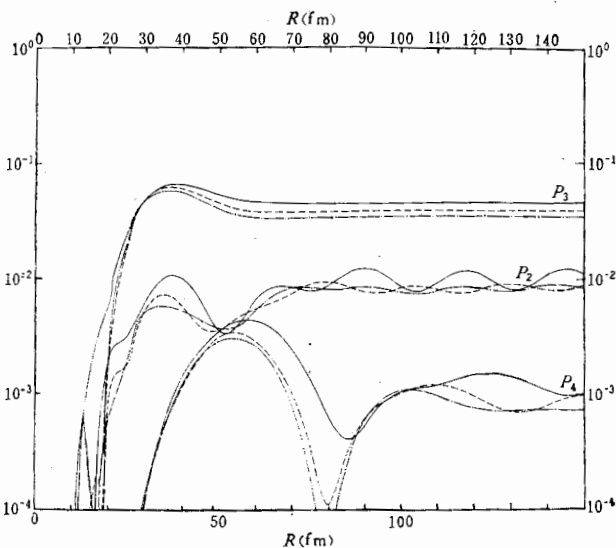


图 2 最可几裂变情况 ($^{140}_{52}\text{Te} + ^{90}_{40}\text{Zr}$) 下 μ^- 处于四条能级上的几率随 R 的变化 ($R=11\text{fm}$ 时 $P_1=1, P_{2,3,4}=0$; 当 $R \rightarrow \infty$ 时 $P_1 \rightarrow P_{1H}^I, P_2 \rightarrow P_{2H}^I, P_3 \rightarrow P_{3L}^I, P_4 \rightarrow P_{4L}^I$)

指数波函数, 方型电荷分布

- $V_0 = 10^7 \text{cm/sec}$
- - $V_0 = 3 \times 10^8 \text{cm/sec}$
- · - $V_0 = 3 \times 10^9 \text{cm/sec}$

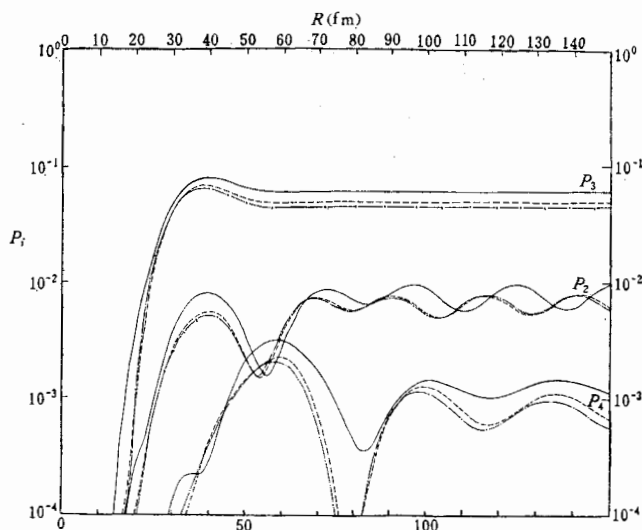


图3 最可几裂变情况 ($^{140}_{52}\text{Te} + ^{98}_{40}\text{Zr}$) 下 μ^- 处于四条能级上的几率随 R 的变化

Gauss 型波函数, 方型电荷分布

- $V_0 = 10^8 \text{cm/sec}$
- $V_0 = 3 \times 10^8 \text{cm/sec}$
- · - · - $V_0 = 3 \times 10^7 \text{cm/sec}$

3. 用第三节中的公式对 $^{238}_{92}\text{U}$ 的最可几、近似对称和远离对称裂变情况下相应于不同的电荷分布和试探波函数的三种组合计算了四能级下 μ^- 的末态几率, 结果由图 2、3 及表 3 给出。可以看出, 不同的组合并不对末态几率造成显著差别, 不过从前面对能级的分析来看, 似乎应当认为方型电荷分布、指数型波函数的结果更好一些。按文献 [3] 的分析, 最可几裂变的结果可以代表实验测量的平均值。因此我们重点看看最可几裂变的情况, 当 $v_0 = 3 \times 10^8 \text{cm/sec}$ (最接近实际情况) 时, μ^- 处在轻碎片 $1s$ 态的几率为 3.8—5%, 处在重碎片 $2p$ 态的几率为 0.7—0.9%, 处在轻碎片 $2p$ 态的几率为 $\sim 0.09\%$ 。与文献 [2] 的结果 (处于轻碎片的几率 $\sim 3.5\%$, 处于重碎片 $2p$ 态的几率 $\sim 0.8\%$) 基本一致。用 Gauss 波函数计算的轻碎片几率略高于指数波函数的相应值, 而对重碎片 $2p$ 态的几率而言, 情况则正好相反。将不同程度对称的裂变作比较可以看出 μ^- 处于轻碎片的几率近似对称的约 38% 降到远离对称的 0.1% 乃至 0.03%, 变化极为显著。然而处于重碎片 $2p$ 态的几率却没有明显的变化。再将不同的 v_0 值作比较, 发现初速 v_0 越大 (粘滞性小), 也就是最后两裂变碎片的相对动能越大, μ^- 处于各激发态 (轻碎片 $1s$ 态, 重、轻碎片的 $2p$ 态) 的几率就越大, 反之 v_0 越小 (粘滞性越大), μ^- 处于各激发态的几率就越小。而这种变化趋势对近似对称及最可几裂变来说不甚明显, 对远离对称裂变而言则较显著。

4. 原理上, 用 LCAO 方法应取足够多的原子能级, 作为近似我们仅取了四个基矢。我们的计算结果与文献 [3] 取两个基矢的计算结果作比较, 发现在双中心 Coulomb 势下 μ^- 的最低两条能级随 R 的变化, 两者并无显著差别; μ^- 处于轻碎片 $1s$ 态的末态几率无明显变化, μ^- 位于两个 p 态的几率已经小于 1%。这说明对我们要讨论的问题而言, 四个基矢已足够了, 再多取基矢也不会得到更多的有用结果了, 只会陡然增加很大

量。

5. 1
 v_0 分开,
 又对方型
 普匀速运
 (9.8fm)

计算
 末态几

表 3 四个能级上的 μ^- 末态几率

State	Case	$^{140}_{52}\text{Te} + ^{98}_{40}\text{Zr}$			$^{131}_{47}\text{Ag} + ^{116}_{45}\text{Rh}$			$^{154}_{58}\text{Ce} + ^{84}_{34}\text{Se}$			$^{155}_{60}\text{Nd} + ^{82}_{32}\text{Ge}$		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$1s_H$	I	.943 .21%	.952 .05%	.956 .05%	.599 .27%	.609 .07%	.613 .12%	.990 .18%	.992 .07%	.993 .02%	.992 .23%	.994 .14%	.994 .05%
	II	.929 .22%	.943 .14%	.947 .14%	.604 .36%	.614 .15%	.617 .15%	.992 .11%	.994 .07%	.995 .03%	.993 .18%	.995 .07%	.995 .01%
	III	.928 .22%	.941 .15%	.946 .14%	.603 .40%	.614 .17%	.616 .17%	.992 .14%	.994 .08%	.994 .04%	.993 .18%	.995 .09%	.995 .03%
$2p_H$	I	.0104 19%	.0088 5%	.0087 6.7%	.0097 16%	.0084 5.5%	.0083 9.0%	.0074 25%	.0063 17%	.0061 3.3%	.0074 37%	.0058 24%	.0057 8%
	II	.0077 20%	.0070 19%	.0069 19%	.0077 28%	.0066 14%	.0065 15%	.0061 19%	.0051 14%	.0050 4.6%	.0058 31%	.0048 15%	.0047 2.5%
	III	.0083 26%	.0071 20%	.0070 19%	.0079 30%	.0068 14%	.0067 16%	.0061 23%	.0052 14%	.0051 8.7%	.0058 31%	.0048 19%	.0047 5%
$1s_L$	I	.0451 .40%	.0381 .25%	.0342 .09%	.384 .11%	.376 .10%	.373 .13%	.0020 5.0%	.0009 5.5%	.0008 1.3%	.0013 6.3%	.0002 7.4%	.0002 3.5%
	II	.0613 .38%	.0496 .52%	.0451 .49%	.383 .40%	.374 .19%	.372 .19%	.0020 7.2%	.0010 2.8%	.0004 2.3%	.0008 12%	.0003 5.1%	.00008 2.0%
	III	.0625 .49%	.0506 .47%	.0461 .54%	.383 .43%	.375 .18%	.373 .20%	.0021 6.6%	.0011 3.1%	.0005 1.2%	.0008 14%	.0003 3.4%	.00008 3.3%
$2p_L$	I	.0012 15%	.0009 10%	.0008 3.7%	.0071 15%	.0059 6%	.0058 8.4%	.00010 93%	.00004 80%	.000025 38%	.00009 91%	.000016 100%	.000008 51%
	II	.0013 19%	.0009 29%	.0008 28%	.0055 28%	.0045 16%	.0044 16%	.00015 97%	.00003 86%	.000012 77%	.00012 81%	.000016 100%	.000003 66%
	III	.0013 22%	.0009 26%	.0008 31%	.0056 29%	.0047 15%	.0046 20%	.00014 99%	.00004 90%	.000014 45%	.00015 76%	.000011 89%	.000003 88%

I. 方型电荷分布, 指数波函数

II. 方型电荷分布, Gauss 波函数

III. 指数电荷分布, Gauss 波函数

1. $v_0 = 10^7 \text{cm/sec}$, 2. $v_0 = 3 \times 10^8 \text{cm/sec}$, 3. $v_0 = 3 \times 10^7 \text{cm/sec}$ 这里 v_0 是当 $R = 11-18 \text{fm}$ 时两块间的分离速度

表中每格右下角带%的数表示因为质心运动伪态引起的该几率的相对波动幅度

5. 在我们的计算模型中, 正在裂变的核从鞍点到断点的运动被取为两球形块以匀速分开, 这显然太粗糙了一些。为了看看这种简化处理对 μ^- 末态几率有多大影响, 我们取方型电荷分布、Gauss 型试探波函数这种组合用比较符合实际情况的核裂变运动代匀速运动重新计算了 μ^- 的末态几率。正在裂变的核仍被看成两球形块的分离, 从鞍点到断点 (23fm) 的运动速度 \dot{R} 之值取自 Nix 的液滴模型计算结果^[12], 数据见表

计算时分两种情况, 其一是把断点取为 23fm, 其二是断点取为 18fm。这时算出的末态几率由图 4 和表 4b 给出。将图 4 和图 3 相比较或者由表 4b 我们可以看到对最

表 4a

l	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.67	
10^{-21} sec																					
R fm	9.8	10.107	10.398	10.688	10.989	11.312	11.664	12.056	12.499	13.001	13.576	14.232	14.982	15.837	16.808	17.912	19.169	20.617	22.330	22.974	
\dot{R} 10^8 cm/sec		1.524	1.455	1.451	1.506	1.612	1.761	1.962	2.213	2.512	2.873	3.281	3.752	4.273	4.857	5.520	6.286	7.237	8.565	9.679	

表 4b 四个能级上的 μ^- 末态几率

情况 态	$^{140}\text{Te} + ^{96}\text{Zr}$					$^{121,6}\text{Ag} + ^{116,4}\text{Rh}$					$^{154}\text{Ce} + ^{84}\text{Sc}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$1s_H$.929 .22%	.943 .14%	.947 .14%	.958 .10%	.940 .16%	.604 .36%	.614 .15%	.617 .15%	.626 .12%	.612 .18%	.992 .11%	.994 .07%	.995 .03%	.995 .05%	.993 .11%
$2p_H$.0077 20%	.0070 19%	.0069 19%	.0066 14%	.0072 20%	.0077 28%	.0066 14%	.0065 15%	.0062 13%	.0068 16%	.0061 19%	.0051 14%	.0050 4.6%	.0050 13%	.0054 19%
$1s_L$.0613 .38%	.0496 .52%	.0451 .49%	.0350 .30%	.0518 .62%	.383 .40%	.374 .19%	.372 .19%	.364 .19%	.377 .35%	.0020 7.2%	.0010 2.8%	.0004 2.3%	.0003 6.7%	.0014 3.3%
$2p_L$.0013 19%	.0009 29%	.0008 28%	.0006 16%	.0010 34%	.0055 28%	.0045 16%	.0044 16%	.0041 14%	.0047 17%	.00015 97%	.00003 86%	.000012 77%	.000011 95%	.00005 90%

此表中的结果均是方型电荷分布, Gauss 波函数这种组合的。

表中每格下部带%的数表示由于质心运动内态引起的该几率的相对波动幅度。

- $v_0 = 10^8$ cm/sec ($T_\infty = 197$ MeV)
- $v_0 = 3 \times 10^8$ cm/sec ($T_\infty = 170$ MeV)
- $v_0 = 3 \times 10^8$ cm/sec ($T_\infty = 167$ MeV)
- 断点取为 22.974fm ($T_\infty = 158$ MeV)
- 断点取为 18fm ($T_\infty = 176$ MeV)

这里 v_0 是当 $R = 11-18$ fm 时两块的分离速度。

当 $R = 9.8$ fm 一断点时的 R 值如表 4a 所示。

T_∞ 是当 $R \rightarrow \infty$ 时两裂变碎片之间的相对运动动能。

可见, 小于质
则介
4b 中
可以

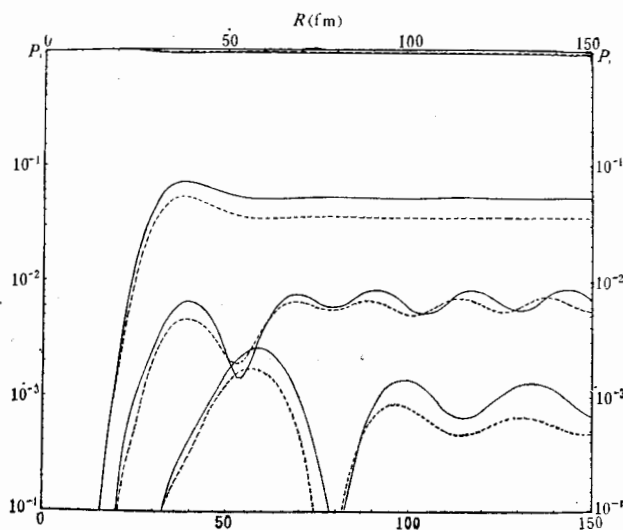


图 4 最可几裂变 (Gauss 型波函数, 方型电荷分布) 情况下 μ^- 处于四条能级上的几率随 R 的变化 ($R=9.8\text{fm}$ 时 $P_1=1, P_{2,3,4}=0$; 9.8fm 至断点间的分离速度 \dot{R} 取自 Nix 的液滴模型计算结果, 数据见表 4a).

—— 取断点为 $R = 18\text{fm}$
 - - - 取断点为 $R = 22.974\text{fm}$

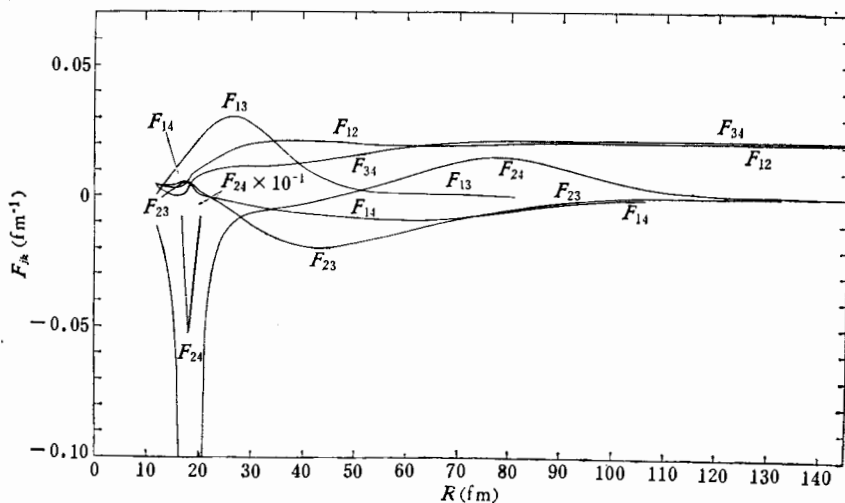


图 5 最可几裂变 (Gauss 波函数, 方型电荷分布) 情况下矩阵元

$$F_{ik} = \left\langle \psi_j \left| \frac{d}{dR} \right| \psi_k \right\rangle \text{ 随 } R \text{ 的变化 } {}^{140}_{52}\text{Te} + {}^{90}_{40}\text{Zr}$$

、近似对称远离对称裂变三种情况均有: 断点为 23fm 时 μ^- 处于各激发态的几率均原先 v_0 取三个不同值时所得到的相应几率; 断点为 18fm 时 μ^- 处于各激发态的几率介于 $v_0 = 3 \times 10^8$ 与 $v_0 = 10^9$ 的结果之间且仅稍大于 $v_0 = 3 \times 10^8$ 的相应值。将表中五种情况按 $R \rightarrow \infty$ 时两裂变碎片的相对运动动能 T_∞ 的大小次序重新排列, 我们就看到: μ^- 的末态几率仅与 T_∞ 有关 (T_∞ 愈大则 μ^- 处于各激发态的几率愈大, 反之

图 5 中 F_{24} 曲线在 $R=20\text{fm}$ 附近出现的极深负向尖峰, 是两裂变碎片之间的相对运动动能。

亦然),而与核从鞍点到断点运动的细节却没有多大关系。因此我们把核从鞍点到断点的运动粗略地看成匀速运动并不会对最后结果带来明显的偏差。

我们经过初步分析认为出现上述结果的原因是:从第三节中(9)式我们可以看出,直接影响 $\frac{dh_j}{dR}$ 的是跃迁矩阵元 F_{jk} ,而核的两块间的速度 \dot{R} 仅出现在相因子 K_{jk} 中。在图5中画出了最可几裂变的 F_{jk} 随 R 的变化,从图中可以看出当 $R < 20\text{fm}$ 时除了 F_{24} 的绝对值较大外,其余 F_{jk} 的绝对值都较小(与 $R > 20\text{fm}$ 的相应 F_{jk} 相比较)。可是 F_{24} 是作用在态2和4之间,在 R 小时系统处于这两个态上的几率都还非常小,所以 F_{24} 这时对 μ^- 在各态之间的跃迁也起不了多大作用。总之 $h_{2,3,4}$ 都要到 $R > 20\text{fm}$ 之后才能逐步增加到较大的值。

在图6中画出了最可几裂变的 K_{jk} 随 R 的变化,从图中可清楚地看出:若 v_0 小, K_{jk} 的变化就快,就使得各 $\frac{dh_j}{dR}$ 和 $\frac{d\delta_j}{dR}$ 的振动加快,最后 h_j 和 δ_j 的累积变化量就小些;反之若 v_0 大, K_{jk} 的变化就慢, $\frac{dh_j}{dR}$ 和 $\frac{d\delta_j}{dR}$ 的振动就慢些,最后 h_j 和 δ_j 的累积变化量就大些。所以 $v_0 = 10^9$ 时 μ^- 处于各激发态的几率大于 $v_0 = 3 \times 10^7$ 的相应值, $v_0 = 3 \times 10^8$ 的结

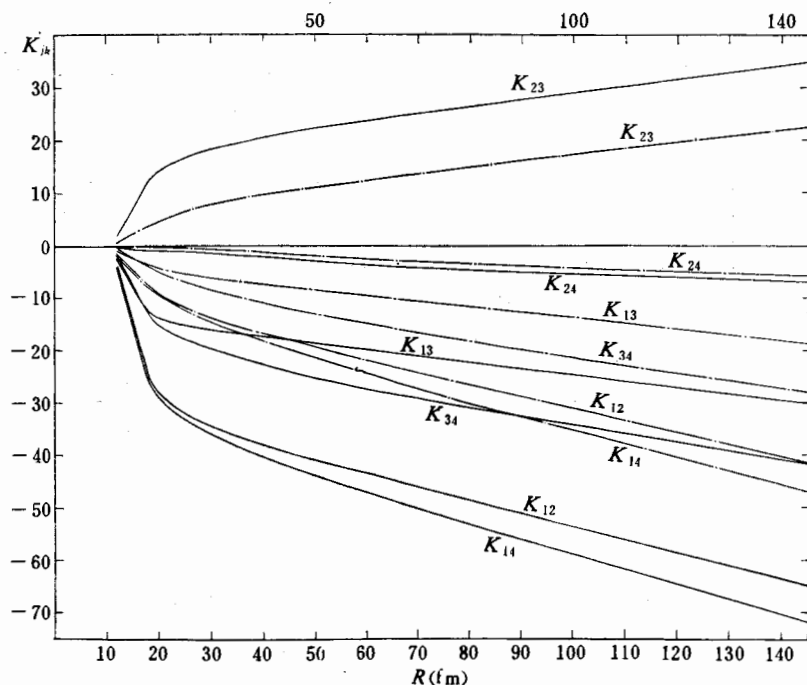


图6 最可几裂变(Gauss型波函数,方型电荷分布) $^{134}\text{Te} + ^{136}\text{Zr}$ 情况下相因子 $K_{jk} = \int_{R_0}^R \frac{E_j(R') - E_k(R')}{\hbar \dot{R}'} dR'$ 随 R 的变化 ($R_0 = 11\text{fm}$, 在 $R = 11-18\text{fm}$ 之间,核的两块以匀速 v 分开)

—— $v_0 = 3 \times 10^8 \text{cm/sec}$
 - - - $v_0 = 10^9 \text{cm/sec}$

第
果则
长在
 h_j 移
起来
从图
150
片之
可能
常数

这里
和2
的,
对振
 μ^-
论效
任何
倍。
X身
花卷
未论
实验
论

[1]
[2]
[3]
[4]
[5]

点的

出,

在

的

是

时

对

步

增

, K_{ik}

反

之

大

些.

的

结

果则介于前二者之间. 在断点之后由于 Coulomb 场的加速, \dot{R} 随 R 增大, K_{ik} 随 R 的增长在断点后将迅速变慢(这从图 6 中也可清楚地看出来), 这一因素也有利于 R 较大时各

h_i 积累较大的变化, 在 R 较小时由于相因子 K_{ik} 的迅速变化使 $\frac{dh_i}{dR}$ 时而正, 时而负, 累积起来的净变化必然很小.

6. 最后我们注意到在 R 很大(比如 $R > 130\text{fm}$) 时, 各能级的末态几率仍有振荡(这从图 2—4 很容易看出), 表 3 中每格右下角和表 4b 每格下半部的百分数就表示 $R = 150 \sim 200\text{fm}$ 时该几率的相对波动幅度. 按理说, 当两个裂变碎片的距离 R 足够大时, 碎片之间已没有相互作用了, μ^- 处于一定能级的几率应是完全确定的, 碎片的匀速运动不可能再引起 μ^- 的激发跃迁, 然而在我们的计算模型下却有一些矩阵元当 $R \rightarrow \infty$ 时趋于常数而不是零, 比如:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\langle \phi_2 \left| \frac{d}{dR} \right| \phi_1 \right\rangle = \left\langle \varphi_1^{2p} \left| \frac{d}{dR} \right| \varphi_1^{1s} \right\rangle$$

$$= - \begin{cases} \frac{8M_2}{M_1 + M_2} \frac{(a_1 b_1)^{3/2}}{(a_1 + b_1)^4} & \text{(对于指数型试探波函数)} \\ \frac{4M_2 b_1}{M_1 + M_2} \frac{(a_1 b_1)^{3/2}}{(a_1^2 + b_1^2)^{5/2}} & \text{(对于 Gauss 型试探波函数)} \end{cases}$$

这里 M_1 和 M_2 分别代表重、轻碎片的质量. 正是这些矩阵元引起了 μ^- 在同一碎片的 $1s$ 和 $2p$ 态之间的来回跃迁, 产生了末态几率的振荡. 这是由于两碎片质心运动的伪态引起的, 如何消除质心运动的伪态是一个有待解决的问题. 但是计算结果表明这种振荡的绝对振幅是很小的, 约为 0.001—0.002, 因此它并不影响我们已得出的主要结论.

7. 我们认为这一工作还有几点值得改进的地方: ① 如何比较切合实际地考虑(经过 μ^- 无辐射跃迁到 $1s$ 态) 已被激发的重核的裂变动力学过程及粘滞性; ② μ^- 运动的相对论效应; ③ 裂变过程中 μ^- 的存在对核裂变运动的影响. 然而要解决上述三个问题中的任何一个都得做大量的数值计算, 估计所需计算时间将会比目前的工作长几百甚至几千倍. 目前实验上用寿命法测量 μ^- 束缚于轻碎片的几率, 精度很低, 测量裂变碎片特征 X 射线以确定 μ^- 处于 $2p$ 态的几率的实验工作尚未开展. 所以我们觉得目前尚无必要花费很大力量去做上述改进工作, 因为在目前的实验状况下不大可能通过理论计算 μ^- 的末态几率与实验测量结果的比较而得到对裂变动力学性质的进一步认识. 只有等将来实验技术进步了, 对 μ^- 末态几率的测量精度可达到约 1% 或更好, 我们才可能通过改进理论计算而获得对裂变动力学性质的更深入的认识.

参 考 文 献

- 1] G. A. Rinker et al., *At. Data and Nucl. Data Table*, **20** (1977), 143.
- 2] 马中玉等, *原子核物理*, **4** (1982), 97.
- 3] J. O. Rasmussen et al., *原子核物理*, **2** (1980), 107;
- 4] Z. Y. Ma et al., *Nucl. Phys.*, **A348** (1980), 446.
- 5] J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, **21** (1949), 133.
- 6] D. F. Zaretsky et al., *Proc. Second United Nations Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy* (Geneva 1958) Vol. **15**, p. 175.
- 7] D. F. Zaretsky et al., *Nucl. Phys.*, **14** (1960), 540; **28** (1961), 177.

- [7] Dz. Ganzoring et al., European Organization for Nuclear Research Preprint CERN-EP/80-86 (3 June 1980).
- [8] W. V. Schröder et al., *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979), 672.
- [9] S. Polikanov, IAEA SM-241/E1, Symp. on Physics and Chemistry of Fission, Jülich, FRG, 1979, Vol. 2, p. 3.
- [10] D. Goulard and H. Primakoff, *Phys. Rev.*, **C10** (1974), 2034.
- [11] P. Olanders et al., *Phys. Lett.*, **90B** (1980), 193.
- [12] J. R. Nix, Private Communication.

CALCULATION OF MUON FINAL PROBABILITIES AFTER THE PROMPT FISSION OF MUONIC ATOM

CAI CHONG-HAI

(Nankai University)

ZHUO YI-ZHONG

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

Based on the variational method and using two classes (exponential and square) nuclear charge distributions and two classes (Gaussian and exponential) trial wave functions the 1s and 2p energy levels of muonic atoms are calculated and compared with the accurate calculation^[1]. Then we use the LCAO (Linear Combination of Atomic Orbitals) to calculate the four energy levels of Muon in the two centre nuclear extended coulombian potential, and use the PSS (Perturbation of Stationary States) to solve the time-dependent Schrödinger equation and obtain the final Muon probabilities for these four states. We find that after the prompt fission of Muonic atom. Muon is mainly attached on the 1s state of the heavy fragment, only 3.8—5.1% of the probabilities are attached on 1s state of the light fragment, and 0.7—0.9% and ~0.1% on the 2p states of the heavy fragment and the light fragment respectively. These results are in agreement with those of references [2], [3], and also in accordance with the experimental results within the experimental errors.

和²¹
的能
73M
物理
量结
围内
分布
eBc f
文献
粒子