第7卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 7, No. 3
1983年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1983

轻子的束缚态波函数和反常磁矩

赵光达
(北京大学物理系)

摘　　要

本文从 Bethe-Salpeter 方程出发讨论由费米子和标量玻色子组成的轻子束缚态波函数．在组分粒子很重和内部运动为非相对论的假定下可以证明，矢量相互作用能给出半径和反常磁矩都足够小的束缚态解，但要求组分费米子质量远大于玻色子质量．相反，标量相互作用则只能给出半径和反常磁矩都很大的束缚态解．

一、引　　言

近年来实验上发现的轻子和层子数目的增加和轻子与层子之间的相似性启发人们推测，轻子和层子很可能是由更"基本"的粒子(亚层子)组成的复合粒子．任何轻子的复合模型必须同以下两个基本实验事实相容．其一是轻子的半径很小，远小于其康普顿波长(如电子 $R_e \lesssim 10^{-16}$cm，而 $m_e^{-1} \approx 0.4 \times 10^{-10}$cm)．其二是轻子反常磁矩的测量值同点粒子的 QED 理论非常精确地符合，轻子内部结构所贡献的反常磁矩 $\frac{e}{2m}\delta a$ 非常小($|\delta a| \lesssim 10^{-10}$)．压低复合粒子反常磁矩的一种可能性是利用手征不变性理论．另一种可能性是假定复合态的组分粒子很重，束缚态半径很小．文献[1—4]利用不同的方法论证了后一种可能性．最近文献[5]利用束缚态的协变场论方法计算了轻子的电磁形状因子，也得到了相同的结论．这种方法的特点是通过束缚态 B-S 波函数给出轻子半径和反常磁矩之间的关系．一个需要进一步解决的问题是，什么样的束缚态波函数可以保证轻子具有小的半径和反常磁矩，在什么物理条件下才能得到这种波函数。我们期望，这一问题的明确将会对轻子内部的动力学提供某些有用的信息。

本文的目的正是探讨在这种组分粒子很重的复合模型中轻子束缚态波函数的解的问题．我们将首先假定以相对论协变的 B-S 方程作为束缚态波函数所满足的方程．这是由于除 B-S 方程外，无论是 Schrödinger 方程还是 Dirac 方程都很难给出协变的束缚态波函数．其次，我们将从物理直观出发假定：由于组分粒子很重，它们之间的相对运动是非相对论的，相互作用在质心系可用瞬时传播的位势描述．在上述假定下我们选择了一个在许多文献[3,6,7]中采用的比较有代表性的模型，即轻子由一个费米子和一个标量玻色子(该

本文 1982 年 5 月 3 日收到.

玻色子也可能是两个费米子的束缚态）组成的模型来进行研究．对组分粒子之间相互作用的旋量结构和位势的空间形式我们做了比较普遍的讨论．结果表明在非相对论近似下相互作用的旋量结构起着决定性的作用．当组分费米子质量远大于玻色子质量时，矢量相互作用可以给出半径和反常磁矩都很小的轻子束缚态波函数．而标量相互作用则只能给出半径和反常磁矩都很大的解．本文第二节讨论费米子和标量玻色子体系的束缚态 B-S 方程．第三节和第四节分别讨论矢量和标量相互作用情形下的 B-S 波函数．第五节讨论反常磁矩问题．第六节是结论和讨论．

二、费米子和标量玻色子体系的 B-S 方程

假定轻子由一个费米子和一个标量玻色子组成．满足洛仑兹及空间反射不变性的 B-S 波函数的普遍形式是

$$\chi_P(p) = (f + ig\not{p})u(P) \tag{1}$$

它满足 B-S 方程[8]

$$(i\not{p}_1 + M_1)(p_2^2 + M_2^2)\chi_P(p) = -\frac{\lambda}{2\pi i}\int d^4p' V(p, p', P)\Gamma\chi_P(p'), \tag{2}$$

其中 M_1 和 M_2 分别是费米子和玻色子的质量，$p_1 = p + aP$ 和 $p_2 = -p + bP\left(a = M_1/(M_1+M_2),\ b = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2}\right)$ 分别是它们的动量，$f \equiv f(P, q)$ 和 $g \equiv g(P, q)$ 均为 p^2 和 (pP) 的实函数，$u(P)$ 是自旋 $\frac{1}{2}$ 的 Dirac 旋量，λ 是具有质量量纲的有效耦合常数，V 为相互作用核的空间部分，Γ 为表示相互作用旋量结构的 Dirac 矩阵．可以定义三维 B-S 波函数

$$\phi_P(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int dp_0\chi_P(p). \tag{3}$$

不难证明在质心系 ($\boldsymbol{P} = 0$) 取瞬时相互作用 $V(p, p') = V(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ 的条件下，从(2)式可以得到质心系三维波函数 $\phi(\boldsymbol{p})$ 所满足的方程

$$\phi(\boldsymbol{p}) = -\frac{(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + M_1)(E_1 + E_2) + \gamma_4 mE_1}{2E_1E_2[(E_1 + E_2)^2 - m^2]}\lambda\int d^3p' V(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\Gamma\phi(\boldsymbol{p}'), \tag{4}$$

其中 m 为轻子质量本征值，$E_i = (M_i^2 + \boldsymbol{p}^2)^{\frac{1}{2}} (i = 1, 2)$．作为(3)式的逆变换，由(2)式和(4)式又可得到质心系四维波函数

$$\begin{aligned}\chi(\boldsymbol{p}) = {} & [M_1^2 + \boldsymbol{p}^2 - (p_0 + am)^2]^{-1}[M_2^2 + \boldsymbol{p}^2 \\ & - (p_0 - bm)^2]^{-1} 2E_1E_2[(E_1 + E_2)^2 - m^2] \\ & \times [(p_0 + am)\gamma_4 - i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + M_1][(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} \\ & + M_1)(E_1 + E_2) + \gamma_4 mE_1]^{-1}\phi(\boldsymbol{p}).\end{aligned} \tag{5}$$

求解方程的步骤一般是先由(4)式解出 $\phi(\boldsymbol{p})$，再代入(5)式求出 $\chi(\boldsymbol{p})$．

利用(1)式在质心系可将(3)式进一步表为

$$\phi(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} AW \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}BW \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int dp_0(f-p_0g),\qquad B=\frac{-1}{2\pi i}\int dp_0 g,\tag{7}$$

$$W\left(S_z=\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad W\left(S_z=-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\tag{8}$$

在组分粒子质量很大即 $M_1, M_2\gg m$, $|\boldsymbol{p}|$ 的情形下，由(5)式可得质心系 f 和 g 的近似表达式

$$\begin{aligned}f=&2E_2(E_1+E_2)\{[M_1^2+\boldsymbol{p}^2-(p_0+am)^2][M_2^2+\boldsymbol{p}^2\\&-(p_0-bm)^2]\}^{-1}\left[\left(M_1+p_0-\frac{p_0^2}{M_1}\right)A+(p_0^2-M_1p_0)B\right],\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}g=&2E_2(E_1+E_2)\{[M_1^2+\boldsymbol{p}^2-(p_0+am)^2][M_2^2+\boldsymbol{p}^2\\&-(p_0-bm)^2]\}^{-1}\left[-\frac{p_0}{M_1}A+(p_0-M_1)B\right].\end{aligned}\tag{10}$$

把(6)式代入(4)式便得到 AW 和 BW 的联立方程组．注意到(4)式中在 λV 一定的情况下，改变 λ 可以被改变 V 所补偿，故对 λ 的任意选取并不影响结果的一般性．为方便起见我们取 $\lambda=2M_2$．于是有方程

$$\begin{aligned}&E_1E_2[(E_1+E_2)^2-m^2]\begin{pmatrix}AW\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}BW\end{pmatrix}\\&=-M_2\begin{pmatrix}M_1(E_1+E_2)+mE_1 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}(E_1+E_2)\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}(E_1+E_2) & M_1(E_1+E_2)-mE_1\end{pmatrix}V\Gamma\begin{pmatrix}AW\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}BW\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{11}$$

其中 V 代表积分算符 $V\varphi\equiv\int d^3p'V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\varphi(\boldsymbol{p}')$.

由上式不难看出，V 必须是 $O(M_1, M_2)$ 量级且同组分粒子的静能与动能之和相消才有可能得到 $m\ll M_1$, M_2 的解．束缚态内部运动为非相对论的假定则要求 $\langle\boldsymbol{p}^2\rangle\ll M_1^2$, M_2^2. 我们将在上述条件下对(11)式求解．至于相互作用的旋量结构 Γ，一般可包含 16 种 Dirac 矩阵．但其中 γ_5 不可能给出费米子和标量玻色子束缚态，而所有 $\gamma_i(i=1,2,3)$ 都必须同 p_i 内乘，在非相对论近似下都是小量．所以实际上有意义的只是 $\Gamma=\gamma_4$ 和 $\Gamma=1$ 两种情形.

三、矢量相互作用的轻子束缚态

当 $\Gamma=\gamma_4$ 时，(11)式可写成

$$\begin{aligned}E_1E_2[(E_1+E_2)^2-m^2]AW=&-M_2[M_1(E_1+E_2)+mE_1]VAW\\&-M_2(E_1+E_2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})V(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})BW,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}E_1E_2[(E_1+E_2)^2-m^2](\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})BW=&-M_2(E_1+E_2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})VAW\\&+M_2[M_1(E_1+E_2)-mE_1]V(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})BW.\end{aligned}\tag{13}$$

进一步假定相互作用核 $V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')=V(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$，在坐标表象可由如下的位势描述

$$V(r)=-V_0+V_1(r),\tag{14}$$

其中 $V_0 = O(M_1, M_2)$ 为势阱深度．在内部运动为非相对论的条件下

$$\langle \boldsymbol{p}^2 \rangle \ll M_1^2、M_2^2, \quad \langle V_1 \rangle \ll M_1, M_2, \tag{15}$$

可将 E_i 按 $\boldsymbol{p}^2/M_i^2$ 的级数展开．在最低阶近似下由(12)和(13)式可得

$$B = \frac{V_0}{M_1(M_1 + M_2 + V_0)} A, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}(mV_0 + m^2)A = \Big\{&(M_1 + M_2)(M_1 + M_2 - V_0) + (M_1 + M_2)V_1 \\ &+ \left[\frac{(M_1 + M_2)^2}{M_1 M_2} + \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2} V_0 - \frac{(M_1 + M_2)V_0^2}{(M_1 + M_2 + V_0)M_1^2}\right]\boldsymbol{p}^2\Big\} A.\end{aligned} \tag{17}$$

由上式不难看出，不论 V_1 取何种位势必须 $\dfrac{M_1 + M_2 - V_0}{M_1 + M_2} \sim 0$，即位能几乎同静能完全抵消时才能得到物理上要求的 $m \approx 0$ 的结果．于是有

$$B = \frac{1}{2M_1} A, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}mA = \Big\{&(M_1 + M_2 - V_0) + V_1 + \Big(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \\ &+ \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2} - \frac{M_1 + M_2}{2M_1^2}\Big)\boldsymbol{p}^2\Big\} A.\end{aligned} \tag{19}$$

(18) 式对决定轻子反常磁矩的大小是至关重要的．在第四节将证明，当且仅当 $M_1 \gg M_2$ 时，(19)式可保证 $|\delta a| \ll 1$.

下面考虑 $M_1 \gg M_2$ 时(19)式的解．这时近似有

$$mA = \left\{(M_1 + M_2 - V_0) + V_1 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}\right\} A, \tag{20}$$

其中 $\mu = \dfrac{M_2^2}{M_1}$．为简便我们假定 V_1 是幂次型位势

$$V_1 = \lambda r^\nu, \quad -2 < \nu < \infty. \tag{21}$$

由关于 Schrödinger 方程标度性质的一般讨论[9]和(20)式可知，轻子平均半径 $\langle r \rangle$ 正比于 $(\mu|\lambda|)^{-\frac{1}{2+\nu}}$，能级间隔 Δm 正比于 $|\lambda|^{\frac{2}{2+\nu}} \mu^{\frac{-\nu}{2+\nu}}$．因此一般来说必须 μ 足够大，轻子才可能具有小的半径．当 $\nu > 0$ 时，Δm 可以很小，原则上可以把第二、三代轻子归结为第一代轻子的径向激发态．当 $\nu < 0$ 时，Δm 将很大．下面讨论几个具体例子．

(1) 方势阱

$$V_1(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \infty & r > R \end{cases} \tag{22}$$

方势阱是一种典型的禁闭型位势（相当于 $\nu = \infty$）．由 (20) 式可得基态及径向激发态质量谱

$$m_n = (M_1 + M_2 - V_0) + \frac{n^2\pi^2}{2\mu R^2}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{23}$$

选取 $V_0 = M_1 + M_2 + \dfrac{\pi^2}{2\mu R^2}$ 可使基态质量 $m(n = 1) = 0$．当 R 取定时，只要 μ 足够大，便可给出足够小的能级间隔．如取 $R = 10^{-16}$cm，$\mu = 0.6 \times 10^7$GeV，可得 $m(n=2) = 105$MeV，$m(n = 3) = 280$MeV．这表明若将第一径向激发态看作 μ 介子，则所预言的 τ 介子质量

远小于其实验值 $m_\tau \approx 1.78\text{GeV}$． 选取其它位势时结果只能更坏． 此外也很难解释为什么没有观察到轨道激发态．所以把不同代轻子归结为径向激发态的尝试[6]在势模型中将遇到定量上的困难．若放弃这一尝试，则对 μ 的限制可放松为 $\mu \gg \frac{1}{(M_1+M_2)R^2}$． 易见这等价于(15)式的限制条件，即 $M_1 \gg M_2 \gg R^{-1} \sim 200\text{GeV}$．

(2) 库仑势 $V_1 = -\frac{e_c^2}{r}$　　(24)

库仑势代表组分粒子间交换某种零质量矢量粒子的效应．由(20)式可求得轻子质量谱和玻尔半径

$$m_n = (M_1 + M_2 - V_0) - \frac{\mu\alpha_c^2}{2n^2}, \tag{25}$$

$$R = \frac{1}{\mu\alpha_c}, \tag{26}$$

其中 $\alpha_c \equiv \frac{e_c^2}{4\pi}$． 易证(15)式要求 $\alpha_c \ll 1$． 于是(26)式将给出对 μ 的限制

$$\mu \gg R^{-1}. \tag{27}$$

如取 $\alpha_c = 0.2$，则必须 $\mu \gtrsim 10^3\text{GeV}$．这时轻子激发态质量 $\sim \frac{\mu\alpha_c^2}{2} \gtrsim 20\text{GeV}$．

以上讨论表明在矢量相互作用情形下，只要组分粒子质量足够大就可能使轻子半径足够小．此外，在这种重组分的非相对论模型中，可以把轻子激发态的能级压得很低．但把不同代轻子归结为径向激发的尝试在定量上将遇到困难．

四、标量相互作用的轻子束缚态

在(11)式中取 $\Gamma = 1$ 便得

$$\begin{aligned} E_1E_2[(E_1+E_2)^2 - m^2]AW = &-M_2[M_1(E_1+E_2) + mE_1]VAW \\ &+ M_2(E_1+E_2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})V(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})BW, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} E_1E_2[(E_1+E_2)^2 - m^2](\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})BW = &-M_2(E_1+E_2)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}VAW \\ &- M_2[M_1(E_1+E_2) - mE_1]V(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})BW. \end{aligned} \tag{29}$$

利用(14)和(15)式可将(28)和(29)式化为

$$\begin{aligned} (mV_0 + m^2)AW = &\Big\{(M_1+M_2)(M_1+M_2-V_0) + (M_1+M_2)V_1 \\ &+ \left[\frac{(M_1+M_2)^2}{M_1M_2} + \frac{(M_1^3+M_2^3)V_0}{2M_1^2M_2^2}\right]\boldsymbol{p}^2\Big\}AW \\ &+ \frac{M_1+M_2}{M_1}V_0\boldsymbol{p}^2BW, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\Big\{(M_1+M_2)(M_1+M_2-V_0) + mV_0 \\ &+ \left[\frac{(M_1+M_2)^2}{M_1M_2} + \frac{(M_1^3+M_2^3)}{2M_1^2M_2^2}V_0\right]\boldsymbol{p}^2 \end{aligned}$$

$$+ (M_1 + M_2)\frac{\boldsymbol{p}\cdot V_1\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}\Bigg\} B = \frac{M_1 + M_2}{M_1} V_0 A. \tag{31}$$

显然必须 $\frac{M_1 + M_2 - V_0}{M_1 + M_2} \sim 0$，才能保证 $m \ll M_1, M_2$. (31)式一般比较复杂，下面我们考虑 $M_1 + M_2 - V_0 = 0$ 时的几种情形.

(1) $$m \gg \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2}\right)\boldsymbol{p}^2,\ |V_1| \tag{32}$$

这时由(31)和(30)式可近似得到

$$B = \frac{1}{m}\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right) A, \tag{33}$$

$$mA = \left\{V_1 + \frac{1}{m}\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)^2 \boldsymbol{p}^2\right\} A. \tag{34}$$

由(34)式不难看出，当取(21)式 $\nu \gg 1$ 的幂次型位势时便自洽地满足(32)式的条件. 这时可求得轻子质量和半径

$$m = \lambda^{\frac{1}{\nu+1}}\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \varepsilon^{\frac{\nu+2}{2\nu+2}}, \tag{35}$$

$$R \equiv \langle r\rangle = \left(\frac{2m}{(\nu + 2)\lambda}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)\left(\frac{2}{\nu + 2}\right)^{\frac{1}{\nu}} \varepsilon^{\frac{\nu+2}{2\nu}} m^{-1}, \tag{36}$$

其中 ε 是相应的无量纲 Schrödinger 方程的本征值

$$\varepsilon u(\rho) = -u''(\rho) + \left[\mathrm{sgn}(\lambda)\rho^{\nu} + \frac{l(l + 1)}{\rho^2}\right] u(\rho). \tag{37}$$

由(36)式易证 $R \gtrsim m^{-1}$. 这表明本情形不可能给出小的轻子半径. 如选取适当的 ν 和 λ 从(35)式符合电子质量 $m_e = 0.5\mathrm{MeV}$，则将有 $R_e \gtrsim 0.8 \times 10^{-10}\mathrm{cm}$. 此外在第五节还将证明，(33)式将导致轻子反常磁矩 $\delta a = O(1)$. 因此本情形给出的是半径和反常磁矩都很大的束缚态，不符合物理上对轻子的要求.

(2) $$\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2}\right)\boldsymbol{p}^2 \gg m,\ |V_1|, \tag{38}$$

这时可近似得到

$$B = \left[\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2}\right)\boldsymbol{p}^2\right]^{-1}\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right) A, \tag{39}$$

$$\begin{aligned} mA = \Bigg\{V_1 &+ \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2}\right)\boldsymbol{p}^2 \\ &+ \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2}\right)^{-1}\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)^2\Bigg\} A. \end{aligned} \tag{40}$$

显然由(40)式将得到 $m \gg \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2} + \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2}\right)\boldsymbol{p}^2$，这同(38)式发生矛盾，故此种情形无解.

(3) $$O\left(\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{M_1^3 + M_2^3}{2M_1^2 M_2^2}\right)\boldsymbol{p}^2\right) = O(|V_1|) = O(m) \tag{41}$$

这时由(31)式得

$$B = \frac{1}{O(m)}\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right) A \tag{42}$$

上式同(33)式一样，将导致反常磁矩 $\delta a = O(1)$，尽管(30)式将变得十分复杂。

通过以上相当普遍的讨论可见，标量相互作用不可能给出半径和反常磁矩都小的轻子束缚态波函数。

五、轻子的反常磁矩

将文献 [5] 给出的由 B-S 波函数计算复合粒子电磁作用矩阵元的方法，推广到 $M_1 \neq M_2$ 的情形，可以得到最低阶图对轻子电磁形状因子的贡献为

$$F_1(q^2) = S_1 + 2T + \left(m^2 - \frac{q^2}{4}\right) T_{PP} + q^2 T_{qq} - 2m V_{1P} + \frac{M_2}{2(M_1 + M_2)} q^2 V_{2P} - \frac{1}{4}\left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 q^2 S_2, \tag{43}$$

$$F_2(q^2) = m T_{PP} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} S_3 - V_{1P} + 2V_{1q} - \frac{m M_2}{M_1 + M_2} V_{2P}, \tag{44}$$

其中

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k f' f \Delta_F^{-1} \left(\left(k - \frac{M_2}{M_1 + M_2} P\right)^2\right), \\
S_2 &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k g' g \Delta_F^{-1}, \qquad S_3 = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k g' f \Delta_F^{-1}, \\
&\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k g' f \Delta_F^{-1} k_\mu = V_{1P} P_\mu + V_{1q} q_\mu, \\
&\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k g' g \Delta_F^{-1} k_\mu = V_{2P} P_\mu, \\
&\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k g' g \Delta_F^{-1} k_\mu k_\nu = T_{PP} P_\mu P_\nu + T_{qq} q_\mu q_\nu + T \delta_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{45}$$

这里 f 和 g 的定义来自(1)式：$f \equiv f\left(P - \frac{q}{2},\ k - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{q}{2}\right)$，$f' \equiv f\left(P + \frac{q}{2}, k + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{q}{2}\right)$，$g$ 和 g' 的宗量分别与 f 和 f' 的相同。

利用第二节中解出的波函数，即(9)、(10)二式所给出的 f 和 g 在质心系的表达式，可以求出(45)式中诸协变积分在 $q^2 = 0$ 时的值，然后再代入(43)、(44)式便可求出 $F_1(0)$ 和 $F_2(0)$. 须要指出的是，(9)、(10)二式表明 f 和 g 在 p_0 复平面的奇异性来自 $p_0 \approx \pm E_1$ 和 $p_0 \approx \pm E_2$ 的极点，这是由 B-S 波函数在瞬时相互作用条件下的性质所决定的. 由此利用(45)式中最后一式不难证明，在非相对论近似 $|\boldsymbol{p}|^2 \ll M_1^2, M_2^2$ 的条件下一般有

$$T_{PP}(0) m^2 \gg T(0) \tag{46}$$

(即使在轻子内部运动为相对论的情形下，$T_{PP}(0) m^2$ 也将与 $T(0)$ 是同一量级). 而且一般来说，即使 g 比 f 小一个量级 ($f = O(M_1, M_2) g$)，$T_{PP}(0) m^2$ 也与 $S_1(0)$ 是同一量级. 此外可证 $V_{1P}(0)$ 和 $V_{2P}(0)$ 都是小量. 因此近似有

$$F_1(0) = S_1(0) + m^2 T_{PP}(0) \tag{47}$$

$$F_2(0) = mT_{PP}(0) + \frac{M_2}{M_1 + M_2} S_3(0) \tag{48}$$

从以上二式立即可得,反常磁矩 $|\delta a| \ll 1$ 的必要条件是:

$$\left|\frac{m^2 T_{PP}(0)}{S_1(0)}\right| \ll 1. \tag{49}$$

事实上 (49) 式是与非相对论近似无关的更为普遍的必要条件. 在大多数情形下, 它也是 $|\delta a| \ll 1$ 的充分条件. 另外由(43)式可以看出,它也是轻子具有小电荷半径的必要条件. 由(9)、(10)二式可证

$$S_1(0) = N\int d^3k \left\{-(M_1 + 2M_2)\left(B - \frac{A}{M_1}\right)^2 + M_1\left(B^2 - \frac{A^2}{M_1^2}\right) - \frac{(2M_1 + M_2)}{M_1M_2} A^2\right\}$$

$$S_3(0) = N\int d^3k \left\{\left(B - \frac{A}{M_1}\right)\left(\frac{A}{M_1} - 2B\right) + \left(\frac{2M_1 + M_2}{M_1M_2}\right) AB\right\},$$

$$m^2 T_{PP}(0) = N\int d^3k \left\{M_1B^2 - (M_1 + 2M_2)\left(B - \frac{A}{M_1}\right)^2\right\}, \tag{50}$$

其中 N 是归一化常数, $A \equiv A(\boldsymbol{k}^2)$ 和 $B \equiv B(\boldsymbol{k}^2)$ 是满足(11)式的三维波函数.

在矢量相互作用情形下,(18)式给出 $A = 2M_1B$. 将它代入(50)和(47)、(48)等式,可得反常磁矩

$$\mu \equiv e\frac{F_2(0)}{F_1(0)} \equiv \frac{e}{2m}\ \delta a = \frac{e}{2m}\left(\frac{M_2}{2M_1 + M_2 + 2\,\dfrac{M_1^2}{M_2}}\right) \tag{51}$$

易见当 $O(M_1) = O(M_2)$ 或 $M_2 \gg M_1$ 时, δa 都是 $O(1)$ 量级. 只有当 $M_1 \gg M_2$ 时才可能得到小的反常磁矩,即

$$\delta a = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2. \tag{52}$$

当 $\dfrac{M_2}{M_1} \lesssim 10^{-5}$ 时便可同实验所要求的 $|\delta a| \lesssim 10^{-10}$ 一致,这实际上是(49)式的结果.

在标量相互作用情形下,(33)和(42)式都给出 $A \lesssim O(m)B$. 将它代入(50)和(47)、(48)等式,便得到一个有趣的结果:

$$\mu = \frac{e}{2m}. \tag{53}$$

这表明无论 M_1 和 M_2 的相对量级如何,轻子内部结构所贡献的反常磁矩都正好等于轻子的 Dirac 磁矩.

顺便指出,按照文献[5]的讨论,一般只要 $f = O(M)g$ 就有 $F_2(0) = O\left(\dfrac{1}{M}\right)$, 当 M 足够大时就能给出足够小的反常磁矩. 但在质心系瞬时相互作用的条件下,为了得到小的反常磁矩,必须要求 B-S 波函数满足(49)式. 这对波函数来说显然是一个非常之强的限制,大概只有在某些特殊情形下才能满足.

六、结论和讨论

以上几节的讨论表明，轻子具有很小的半径和反常磁矩的实验事实给轻子的复合模型带来很强的限制．这个限制主要体现在(49)式中．从 B-S 方程出发，在非相对论近似下，可以得到如下的结论：

(1) 矢量相互作用可以给出半径和反常磁矩都很小的束缚态解．但至少要求 $M_2 \gg R^{-1} \sim 200\text{GeV}$，$M_1 \gtrsim 10^5 M_2 \gg 10^7\text{GeV}$ 才能与目前的实验相容．如果试图把第二、三代轻子归结为第一代轻子的径向激发态，则进一步要求 $\frac{M_2^2}{M_1} \gtrsim 0.6\times 10^7\text{GeV}$，即要求 $M_2 \gg 0.6\times 10^{12}\text{GeV}$，$M_1 \gg 0.6\times 10^{17}\text{GeV}$．这个条件是十分苛刻的．

(2) 标量相互作用可以给出半径和反常磁矩都很大($R\sim m^{-1}$，$|\delta a|\sim 1$)的束缚态解，但不可能给出物理上要求的轻子束缚态．

关于反常磁矩与相互作用旋量结构之间的关系，我们的结论与文献[2]利用 Dirac 方程所得的结果相似．人们[10]以前就曾利用 Dirac 方程直观地讨论过重费米子在深势阱内的行为，结论也是类似的．由于标量势在洛仑兹变换下的性质与质量相同，故可以抵消费米子的大质量而使费米子在势阱内的有效质量很小，并从而得到大的反常磁矩．矢量(第四分量)势的变换性质与能量相同，故只能起降低能级的作用，费米子的有效质量仍然很大从而使反常磁矩很小．本文的结果表明，这一直观的物理图象对一个费米子和玻色子组成的两体紧束缚体系也是适用的．进一步还可以证明，这个图象对一对费米子和反费米子组成的紧束缚体系也是正确的．因此我们有可能期待在非相对论近似下一个较一般的结论：对于一个紧束缚的复合体系，矢量相互作用可使复合粒子在低能现象中具有点粒子的近似行为．我们希望这将有助于对形成紧束缚态的超强相互作用的本质的理解．

作者谨对胡宁、戴元本、黄涛、黄朝商、朱重远、宋行长等同志的有益讨论表示感谢．

参　考　文　献

[1] G. L. Shaw, D. Silverman and R. Slansky, *Phys. Lett.*, **94B**(1980), 57.
[2] P. F. Smith and J. D. Lewin, *Phys. Lett.*, **94B**(1980), 484.
[3] H. Terazawa and K. Akama, *Phys. Lett.*, **96B**(1980), 276.
[4] S. Brodsky and S. D. Drell, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 2236.
[5] 黄朝商、戴元本，高能物理与核物理，**5** (1981), 699; Huang Tao, Xie Yicheng BIHEP-TH-82-3 (1982).
[6] O. W. Greenberg and J. Sucher, *Phys. Lett.*, **99B**(1981), 339.
[7] H. Fritzsch and G. Mandelbaum, *Phys. Lett.*, **102B**(1981), 319.
[8] S. D. Drell and T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 1738.
[9] C. Quigg and J. L. Rosner, *Phys. Reports*, **56**(1979), 168.
[10] R. P. Van Royen and V. F. Weisskopf, *Nuovo Cimento*, **50A**(1967), 617.

BOUND STATE WAVEFUNCTIONS AND ANOMALOUS MAGNETIC MOMENTS OF LEPTONS

CHAO KUANG-TN
(*Department of Physics, Peking University*)

ABSTRACT

Assuming that leptons are composed of a heavy fermion and a heavy scalar boson and using Bethe-Salpeter equation, we conclude that in the non-relativistic limit the radius and, in particular, the anomalous magnetic moment of leptons can be sufficiently small provided that the interaction of the constituents is of vector type and that the fermion is much heavier than the scalar boson. Whereas the scalar type interaction can only give wavefunctions with large radius and anomalous magnetic moment.