第8卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 8, No. 5
1984年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1984

不等质量$(1/2-\bar{1}/2)$或$(1/2-1/2)$电磁束缚系统的近似B.S.波函数

宋孝同 庆承瑞 何祚庥
（杭州大学） （中国科学院理论物理研究所）

摘　　要

本文求解了不等质量$(1/2-\bar{1}/2)$电磁束缚系统的 Bethe-Salpeter 方程. 给出了这类系统的近似 B.S. 波函数. 利用复合粒子量子场论的微扰展开，在精确到 $O(\alpha)$ 的量级下，计算了 $\Xi^0\to(\Sigma^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu$ 的衰变率和分支比，结果是

$$w_{\Xi^0\to(\Sigma^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu}\simeq 1.12\,(1/秒)$$

$R=[w_{\Xi^0\to(\Sigma^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu}]/[w_{\Xi^0\to\Sigma^++\mu^-+\bar{\nu}_\mu}]\gtrsim 4.7\times10^{-7}$. 类似地，还讨论了 $\Lambda\to(\mathrm{p}\mu^-)+\bar{\nu}_\mu$ 过程.

一、引　　言

在工作[1]中曾指出，由带电轻子和奇异重子构成的双例外原子$(\Sigma^+\mu^-)$可能在如下过程中产生

$$\Xi^0\to(\Sigma^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu \tag{1}$$

研究这类原子将能为奇异重子的电磁相互作用提供一些知识，由于实验上已观察到$(\pi^\pm\mu^\mp)$原子，因此在 Ξ^0 束流足够强时，一定可以观察到衰变(1)，但是在实验上扦测到这类原子之前，需要从理论上估算它们产生的分支比. 为此必须知道$(\Sigma\mu)$束缚系统的 B.S. 波函数. 在以前的一些工作中，已分别求得(自旋-自旋)为$(0-0)$[2]、$(0,-1/2)$[3]和正反费米子(等质量)$(1/2-\bar{1}/2)$[4]电磁束缚态的近似 B.S. 波函数. 而我们现在要处理的$(\Sigma\mu)$原子是由两个不等质量粒子组成的$(1/2-1/2)$电磁束缚系统. 因此在第三节及附录中，我们求解了这类系统的 Bethe-Salpeter 方程，求得了$(\Sigma\mu)$原子的近似 B.S. 波函数. 利用这个波函数计算了在 Ξ^0 衰变中产生$(\Sigma^+\mu^-)$原子的几率和分支比(我们不考虑 $\Xi^0\to\Sigma^-+\mu^++\nu_\mu$ 过程，因为它违反 $\Delta S=\Delta Q$). 并计算了在 Λ 衰变中产生$(\mathrm{p}\mu^-)$原子的几率.

本文1982年9月3日收到.

二、$\Xi^0 \to (\Sigma^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ 的跃迁矩阵元

对于带电流，弱相互作用拉氏函数密度为

$$\mathscr{L}_I^{c.c.}(x) = \frac{g}{2\sqrt{2}}[j_\mu^{(L)}(x)W_\mu(x) + j_\mu^{(H)}(x)W_\mu(x) + \text{H. C.}] \tag{2}$$

其中轻子弱流 $j_\mu^{(L)}$ 和强子弱流 $j_\mu^{(H)}(x)$ 分别为

$$j_\mu^{(L)}(x) = i\bar{u}_l(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)v_{\nu_l}(x)$$

$$j_\mu^{(H)}(x) = \cos\theta_c[V_\mu^{(1+i2)}(x) - A_\mu^{(1+i2)}(x)] + \sin\theta_c[V_\mu^{(4+i5)}(x) - A_\mu^{(4+i5)}(x)]$$

对于我们讨论的 $\Xi^0 \to \Sigma^+$ 过程，$j_\mu^{(H)}$ 中只有 $\sin\theta_c$ 项（奇异数改变项）起作用．（θ_c 是 Cabbibo 角）

$\Xi^0 \to (\Sigma^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ 的单W交换费曼图如图 1．

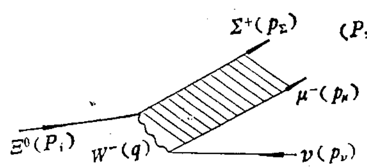

图 1 $\Xi^0 \to (\Sigma^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$

定义 $q = P_i - p_\Sigma$，由于

$$p_\Sigma = \mu_a P + p;\ p_\mu = \mu_b P - p$$

因此

$$q = P_i - \mu_a P - p$$

其中 $\mu_a = \frac{m_\Sigma}{M}$，$\mu_b = \frac{m_\mu}{M}$，$M = m_\Sigma + m_\mu$．$P_i$、$P$ 和 p_ν 分别是 Ξ^0、$(\Sigma\mu)$ 原子和 $\bar{\nu}_\mu$ 的四动量，p 是 $(\Sigma\mu)$ 内部相对四动量．按照复合粒子量子场论的微扰展开[5]，不难写出与上述费曼图相应的跃迁矩阵元

$$\langle\bar{\nu}_\mu, (\Sigma^+\mu^-)|S - I|\Xi^0\rangle = \frac{g^2}{8}\sin\theta_c\delta^4(P_i - P - p_\nu)\sqrt{\frac{m_\Xi m_\nu}{2E_B E_\Xi E_\nu}} \times \int d^4p\bar{\chi}_P(p)\Gamma_\mu^{(H)}u(P_i)\Delta_{\mu\rho}\Gamma_\rho^{(L)}v(p_\nu) \tag{3}$$

其中 $\chi_P(p)$ 是 $(\Sigma^+\mu^-)$ 的 B. S. 波函数，$\bar{\chi}_P(p)$ 是共轭 B. S. 波函数，并且

$$\Gamma_\rho^{(L)} = i\gamma_\rho(1+\gamma_5);\ \bar{\chi}_P(p) = -\gamma_4\chi_P^\dagger(p)\gamma_4$$

$$\Delta_{\mu\rho} = -i\left(\delta_{\mu\rho} + \frac{q_\mu q_\rho}{m_w^2}\right)\Big/ q^2 + m_w^2$$

$$\Gamma_\mu^{(H)} = i\left[\gamma_\mu F_1(t) + \frac{\sigma_{\mu\lambda}q_\lambda}{M}F_2(t) + i\frac{q_\mu}{M}F_3(t) + \gamma_\mu\gamma_5 G_1(t) + \frac{\sigma_{\mu\lambda}\gamma_5 q_\lambda}{M}G_2(t) + i\frac{q_\mu}{M}\gamma_5 G_3(t)\right]$$

最后一式中的 F_i 和 $G_i(i = 1, 2, 3)$ 为形状因子，它们是 $t = -q^2$ 的标量函数．如果 T 不变性成立，则所有的 F_i 和 G_i 都是实的． 若进一步假定强子流具有确定的 G 变换性质并且第二类流不存在，则 $G_2 = 0$，$F_3 = 0$．根据重子的半轻子衰变的实验数据分析，弱磁 (F_2) 项与感生赝标 (G_3) 项贡献很小，可以略去．因此只剩下 F_1 和 G_1 项．

由于在衰变过程中，四动量传递很小 $(-q^2 \lesssim 0.01(\mathrm{GeV}/c)^2)$ 因此 $\Delta_{\mu\rho} = \frac{-i\delta_{\mu\rho}}{m_w^2}$，并且可以不考虑 $F_1(q^2)$ 和 $G_1(q^2)$ 对 q^2 的依赖关系，而近似地取 $F_1(q^2) \simeq F_1(0) = 1$，$G_1(q^2) \simeq G_1(0) \equiv g_A$，对于 $\Xi^0 \to \Sigma^+$ 跃迁，$g_A \simeq 1.26$[6]，这样，(3) 式就可化为(式中已明显写出，$\bar{\chi}_P$ 的一个指标通过 $\gamma_\mu(1+g_A\gamma_5)$ 与 $u(P_i)$ 联系，另一指标通过 $\gamma_\mu(1+\gamma_5)$ 与 $v(p_\nu)$ 相联系)

$$\langle \bar{\nu}_\mu,\ (\Sigma^+\mu^-)|S-I|\Xi^0\rangle = i\,\frac{G_F \sin\theta_c}{\sqrt{2}}\,\delta^4(P_i-P-p_\nu)\sqrt{\frac{m_\Xi m_\nu}{2E_B E_\Xi E_\nu}}$$
$$\cdot\,[\bar{\chi}_P(0)]_{\alpha\beta}[\gamma_\mu(1+g_A\gamma_5)]_{\alpha\alpha'}u_{\alpha'}(P_i)[\gamma_\mu(1+\gamma_5)]_{\beta\beta'}v_{\beta'}(p_\nu) \tag{4}$$

在得到上式时，已用了 $\frac{g^2}{4\sqrt{2}\,m_w^2} = G_F$，并且

$$\chi_P(0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ \chi_P(p) \tag{5}$$

是在 $x=0$ 处的 B. S. 波函数. 因此要计算 $\Xi^0 \to (\Sigma^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ 的衰变几率，必须知道 $\chi_P(0)$.

三、$(a\bar{b})$ 原子的近似 B. S. 波函数

对于一个由粒子 a (质量 m_1，自旋 1/2) 和反粒子 $\bar{b}$ (质量 m_2，自旋 1/2) 构成的电磁束缚态，定义其 B. S. 波函数为

$$\chi_P(x_1,\ x_2) = \langle 0|T(\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2))|B(a,\ \bar{b})\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2E_B}}\,e^{iPX}\,\chi_P(x) \tag{6}$$

其中 X 和 x 分别为质心坐标和相对坐标，E_B 为 $B(a, \bar{b})$ 的能量. 动量空间波函数为

$$\chi_P(p) = \int d^4x\, e^{-ipx}\,\chi_P(x) \tag{7}$$

在单光子交换的梯形近似下，$(a, \bar{b})$ 电磁束缚系统的 Bethe-Salpeter 方程为

$$(i\hat{p}_1 + m_1)\,\chi_P(p)\,(i\hat{p}_2 + m_2) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2}\,\gamma_\mu\chi_P(p')\gamma_\mu \tag{8}$$

按照对称性的分析，如果粒子 a 和 $\bar{b}$ 的内禀宇称满足 $\eta_P^a \cdot \eta_P^{\bar{b}} = -1$，并且进一步假定

$$\chi_{\bar{B}}(x_1,\ x_2) = \eta_B\chi_B(x_1,\ x_2) \tag{9}$$

(其中 η_B 是模为 1 的相因子)，则对于 $\eta_B = +1$ 的 ${}^1S_0$ 态，$\chi_P(p)$ 的一般形式为

$$\chi_P(p) = f_1\gamma_5 + f_2\,\frac{i\hat{P}}{M}\,\gamma_5 + f_3\,\frac{i\hat{p}}{2\mu}\,\frac{(pP)}{2M\mu}\,\gamma_5 + f_4\,\frac{i}{2M\mu}\,P_\nu p_\rho\sigma_{\nu\rho}\gamma_5 \tag{10}$$

其中 f_1、f_2、f_3、f_4 是 $(p\cdot P)$ 的标量函数.

同样的分析，对于 $\eta_P^a\eta_P^{\bar{b}} = -1$，$\eta_B = -1$ 的 ${}^3S_1$ 态，则有

$$\chi_P^\lambda(p) = g_1\hat{f}^\lambda + g_2\,\frac{i\hat{P}}{M}\,\hat{f}^\lambda + g_3\,\frac{i(pf^\lambda)}{2\mu} + g_4\,\frac{(pf^\lambda)}{4\mu^2}\,\hat{p} + g_5\,\frac{(pf^\lambda)}{4M\mu^2}\,p_\nu P_\rho\sigma_{\nu\rho}$$
$$+\, g_6\,\frac{1}{2M\mu}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f_\mu^\lambda p_\nu P_\rho\gamma_\sigma\gamma_5 + g_7\,\frac{(pP)}{4M\mu^2}\,f_\mu^\lambda\,p_\nu\,\sigma_{\mu\nu} + g_8\,\frac{(pf^\lambda)}{4M^2\mu^2}\,(pP)\,\hat{P} \tag{11}$$

其中 $g_1 \cdots g_8$ 是 p 和 P 的标量函数，$\hat{A} \equiv \gamma_\mu A_\mu$. f^λ 是极化四矢量. $M = m_1 + m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$.

下面只讨论 $\eta_P^a \eta_P^{\bar{b}} = -1$, $\eta_B = +1$ 的 $^1S_0$ 态. 在精确到 $O(\alpha)$ 量级的近似下，可以求得(见附录 A.)

$$\chi_P(p) = Nf(p, P)\left[1 - \frac{i\hat{P}}{M} + \frac{1}{4M\mu}(\hat{P}\hat{p} - \hat{p}\hat{P})\right]\gamma_5 \tag{12}$$

其中 $f(p, P)$ 满足

$$f(p, P) = -4\mu_a\mu_b M^2 \cdot \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{(p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2)} \int \frac{d^4p'}{(p - p')^2} f(p', P) \tag{13}$$

方程(13)的解已在[3]中给出

$$f(p, P) = [p^2 + m_1 m_2 + \mu_a\mu_b P^2]^{-1}[(\mu_a P + p)^2 + m_1^2]^{-1}[(\mu_b P - p)^2 + m_2^2]^{-1} \tag{14}$$

(12)式中的归一化常数 N 由下式确定

$$1 = \frac{-iN^2}{(2\pi)^4}\int d^4p[f(p, P)]^2 \left\{4\mu_a\mu_b\left[1 + \frac{P^2}{M^2} + \frac{p^2P^2 - (pP)^2}{4M^2\mu^2}\right] - 4(\mu_a - \mu_b)\frac{(pP)}{M^2} + \frac{2}{M\mu}[p^2P^2 - (pP)^2]\frac{1}{P^2}\right\} \tag{15}$$

把(14)式代入(15)，不难求得

$$N = 8\sqrt{\pi}\, M^{3/2}(\alpha\mu)^{5/2}\xi; \quad \xi = \left\{1 - \frac{3}{8}(1 - 4\mu_a\mu_b)\right\}^{-1/2} \tag{16}$$

当 $\mu_a = \mu_b = 1/2$ 时，上式回到等质量 $(a, \bar{b})$ 的结果.

如果束缚态由 (a, b) 两个粒子构成，(6)式改为

$$\chi_P^{(ab)}(x_1, x_2) = \langle 0|T(\phi^a(x_1)\phi^b(x_2))|B(a, b)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_B}} e^{iPX} \chi_P^{(ab)}(x) \tag{17}$$

由空间反演变换性质，不难给出如下限制条件

$$\chi_P^{(ab)}(p) = \eta_P^B \gamma_4 \chi_{P'}^{(ab)}(p')\tilde{\gamma}_4 \tag{18}$$

其中 $p' = (-\boldsymbol{p}, ip_0)$; $P' = (-\boldsymbol{P}, iP_0)$. 上式可改写为

$$[\chi_P^{(ab)}(p)C^{-1}] = -\eta_P^B \gamma_4 [\chi_{P'}^{(ab)}(p')C^{-1}]\gamma_4 \tag{19}$$

其中 C 是电荷共轭矩阵. 因此对于 a、b 相对宇称为正的 $^1S_0$ 态，(19)式与 a、$\bar{b}$ 相对宇称为负的 $^1S_0$ 态的限制条件: $\chi_P^{(a\bar{b})}(p) = -\gamma_4[\chi_{P'}^{(a\bar{b})}(p')]\gamma_4$，形式上完全相同. 故可以利用对 $(a\bar{b})$ 适用的展开式(10)，得到

$$\chi_P^{(ab)}(p) = \chi_P^{(a\bar{b})}(p)C \tag{20}$$

由(10)式及 C 矩阵的性质，不难得到 $\bar{\chi}_P^{(ab)}(p) = C^{-1}\overline{\chi_P^{(a\bar{b})}(p)}$，由此可见，$(ab)$ 系统的 B. S. 波函数只是比 $(a\bar{b})$ 系统多乘上一个 C 矩阵，但归一化积分及衰变几率的计算与没有 C 矩阵时完全相同.

四、$\Xi^0 \to (\Sigma^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ 的衰变几率和分支比

利用(16)、(12)(5)和(20)式，可以得到

$$\chi_P(0) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} M^{1/2}(\alpha\mu)^{3/2}\xi(1-D_1)\left(1-\frac{i\hat{P}}{M}\right)\gamma_5 C \tag{21}$$

其中 $D_1 = \frac{\alpha}{\pi}\left[1 - \ln\alpha - \ln\mu_a - \mu_b\ln\left(\frac{\mu_b}{\mu_a}\right)\right]$是一个小量(对于 $\Xi^0 \to (\Sigma^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ 衰变，$D_1 \simeq 0.014$). 将上式的 $\chi_P(0)$ 代入 (4) (注意 $\overline{\chi_P(0)} = \tilde{\gamma}_4\chi_P^\dagger(0)\gamma_4$)，然后按标准方法计算 $\Xi^0 \to (\Sigma^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ 的衰变几率，结果是

$$w = \left(\frac{G_F\sin\theta_c}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi^2} \cdot \xi^2(1-D_1)^2(\alpha\mu)^3 M m_\Xi \left[1-\left(\frac{M}{m_\Xi}\right)^2\right]^2$$
$$\times\left[1 + g_A - (1-g_A)\frac{m_\Xi}{2M}\right]^2 \tag{22}$$

按 [6] 中的数据， $\sin\theta_c = 0.229$， $g_A = 1.26$， 得

$$w_{\Xi^0\to(\Sigma^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu} = 1.12\ (1/秒) \tag{23}$$

由此得分支比

$$R = \frac{w_{\Xi^0\to(\Sigma^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu}}{w_{\Xi^0\to\Sigma^++\mu^-+\bar{\nu}_\mu}} \gtrsim 4.7\times10^{-7} \tag{24}$$

这个结果与 K_L^0 衰变中产生 $(\pi\mu)$ 原子的分支比[3] $R \simeq 5\times10^{-7}$ 非常接近.

利用同样的方法，还可以计算在 Λ 衰变中产生 $(p\mu^-)$ 原子的几率，结果是

$$w_{\Lambda\to(p\mu^-)+\bar{\nu}_\mu} = 7.5\ (1/秒) \tag{25}$$

附录 A 标量函数 f_1、f_2、f_3、f_4 所满足的联立方程

为了求得(12)式，我们先把(10)式改写为

$$\chi_P(p) = \sum_{i=1}^{4} f_i\hat{O}_i \tag{A.1}$$

其中 $\hat{O}_i$ 分别代表 γ_5, $\frac{i\hat{P}}{M}\gamma_5$, $\frac{i\hat{p}}{2\mu}\frac{(pP)}{2M\mu}$ 和 $\frac{i}{2M\mu}P_\nu p_\rho\sigma_{\nu\rho}\gamma_5$，把(A.1)式代入(8)式，则得

$$\chi_P(p) = \boldsymbol{I}\left\{(-i\hat{p}_1 + m_1)\left(\sum_{i=1}^{4} f_i(p',P)\hat{O}_i'\right)(-i\hat{p}_2 + m_2)\right\} \tag{A.2}$$

式中 $\hat{O}_i'$ 相应于 $\hat{O}_i$ 中的 p 换成 p'，而 $\boldsymbol{I}$ 是如下的积分算符

$$\boldsymbol{I} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p_1^2+m_1^2)(p_2^2+m_2^2)}\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2} \tag{A.3}$$

由(A.2)式，可以求得四个标量函数 $f_1\cdots f_4$ 所满足的联立方程.

$$f_1 = \boldsymbol{I}\cdot(4\mu_a\mu_b)\left\{-\left(M^2 - P^2 + \frac{p^2}{\mu_a\mu_b}\right)f_1' + P^2 f_2' + \frac{(p'P)^2}{4\mu_a\mu_b}f_3'\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_a-\mu_b}{4\mu_a\mu_b}\left[4(pP)f_1' + 2(pP)f_2' + \frac{(p'P)\ (p'p)}{2\mu^2}f_3'\right]\right\} \tag{A.4}$$

$$\frac{2P^2}{M^2}f_2 + \frac{(pP)^2}{2M^2\mu^2}f_3 = \boldsymbol{I}\cdot(4\mu_a\mu_b)\left\{4P^2f_1' + P^2\left[1 - \frac{P^2}{M^2} - \frac{p^2}{\mu_a\mu_b M^2} + \frac{2(pP)^2}{\mu_a\mu_b M^2P^2}\right]f_2'\right.$$
$$+\frac{(p'P)^2}{M^2\mu^2}\left[\frac{M^2}{4} - \frac{p^2}{4\mu_a\mu_b} - \frac{P^2}{4} + \frac{(pP)}{2\mu_a\mu_b}\cdot\frac{(p'p)}{(p'P)}\right]f_3'$$
$$\left.+\frac{\mu_a-\mu_b}{4\mu_a\mu_b}\left[-4(pP)f_1' + 2\frac{(pP)P^2}{M^2}f_2' + \frac{(p'P)(p'p)P^2}{2M^2\mu^2}f_3'\right]\right\} \tag{A.5}$$

$$2f_2 + \frac{p^2}{2\mu^2}f_3 = \boldsymbol{I}\cdot(4\mu_a\mu_b)\left\{4M^2f_1' - \frac{p^2}{\mu_a\mu_b}f_2' + (M^2-P^2)f_2' - \frac{(p'P)^2}{2\mu^2}f_3'\right.$$

$$+\frac{(p'P)\ (p'p)}{4\mu^2\ (pP)}\left[M^2+P^2+\frac{p^2}{\mu_a\mu_b}\right]f_3'$$

$$+\frac{\mu_a-\mu_b}{4\mu_a\mu_b}\cdot\frac{p^2}{(pP)}\left[-8M^2f_1'+4P^2f_2'+\frac{(p'P)^2}{\mu^2}f_3'\right]\Bigg\} \quad (A.6)$$

$$f_4=I\cdot(4\mu_a\mu_b)\left\{-2M^2f_1'-2M^2f_2'-\frac{(p'P)}{4\mu^2}\frac{p^2(p'P)-(pP)(p'p)}{p^2P^2-(pP)^2}f_3'\right\} \quad (A.7)$$

其中 $f_i'=f_i(p',P)$. 由于电磁耦合常数 α 很小，束缚态的结合能很小，因此有

$$\frac{P^2}{M^2}\sim-1+O(\alpha^2);\ \frac{p^2}{\mu^2}\sim O(\alpha^2);\ \frac{p^4}{\mu}\sim O(\alpha^2)$$

这样一来，在精确到 $O(\alpha)$ 的近似下，联立方程 (A.4)—(A.7) 简化为

$$f_1\simeq I\{-4\mu_a\mu_bM^2f_1'\};\ f_2\simeq-f_1;\ f_3\simeq f_1;\ f_4\simeq f_1 \quad (A.8)$$

把 (A.8) 代入 (10) 式，并略去 f_3 项$\left(\text{因为此项的运动学系数}\sim\frac{p^2}{\mu^2}\sim O(\alpha^2)\right)$ 即得

$$\chi_P(p)=f_1(p,P)\left[1-\frac{i\hat{P}}{M}+\frac{1}{4M\mu}(\hat{P}\hat{p}-\hat{p}\hat{P})\right]\gamma_5$$

然后令 $f_1(p,P)=Nf(p,P)$ 即得 (12) 式. 顺便指出，当 $m_1=m_2=m$ 时，本文的 (A.4)—(A.7) 式就简化为 [4] 中的 (8a)—(8d).

附录 B 标量函数 $g_1\cdots g_8$ 所满足的联立方程

利用与附录 A 相同的方法，把 (11) 式改写为

$$\chi_P^\lambda(p)=\sum_{i=1}^{8}g_i\hat{O}_i^\lambda \quad (B.1)$$

其中 $\hat{O}_i^\lambda$ 分别代表 $\hat{f}^\lambda$, $\frac{i\hat{P}}{M}\hat{f}^\lambda\cdots$, 把 (B.1) 代入 (8) 代，则得

$$\chi_P^\lambda(p)=I\left\{(-i\hat{p}_1+m_1)\left(\sum_{i=1}^{8}g_i(p',P)\hat{O}_i'^\lambda\right)(-i\hat{p}_2+m_2)\right\} \quad (B.2)$$

其中 I 见 (A.3) 式. 由 (B.1)、(B.2) 可以求得

$$g_1+\frac{(pf^\lambda)^2}{4\mu^2}g_4=I\left\{-2M\mu\left[1-\frac{P^2}{M^2}+\frac{P^2}{M\mu}+\frac{\mu_a-\mu_b}{M_\mu}(pP)\right]g_1'\right.$$

$$+4(pf^\lambda)^2g_1'+\frac{2M}{\mu}(pf^\lambda)(p'f^\lambda)g_3'-\frac{M}{2\mu}\left[1-\frac{P^2}{M^2}+\frac{p^2}{M\mu}\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_a-\mu_b}{M\mu}(pP)\right](p'f^\lambda)^2g_4'+[2(p'p)+(\mu_a-\mu_b)(p'P)]$$

$$\times\frac{(pf^\lambda)(p'f^\lambda)}{2\mu^2}g_4'-\frac{P^2}{M\mu}[(pf^\lambda)(p'f^\lambda)-(p'p)]g_6'-\frac{(p'p)(pP)}{M\mu}g_6'$$

$$\left.+\frac{(pf^\lambda)(p'f^\lambda)(p'P)}{M^2\mu^2}\left[(pP)+\frac{\mu_a-\mu_b}{2}P^2\right]g_8'\right\} \quad (B.3)$$

$$g_1+\frac{p^2}{4\mu^2}g_4+\frac{(pP)^2}{4M^2\mu^2}g_8=I\left\{-2M\mu\left(1-\frac{P^2}{M^2}-\frac{p^2}{M\mu}\right)g_1'+2\frac{M}{\mu}\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}p^2g_3'\right.$$

$$-\frac{M}{2\mu}\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}\left(1-\frac{P^2}{M^2}-\frac{p^2}{M\mu}\right)(p'p)g_4'-\frac{1}{M\mu}\cdot\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}(pP)(p'P)g_4'$$

$$+\frac{\mu_a-\mu_b}{2\mu^2}\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}p^2(p'P)g_4'+\frac{\mu_a-\mu_b}{2M^2\mu^2}\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}p^2P^2(p'P)g_8'$$

$$\left.-\frac{1}{2M\mu}\left(1+\frac{P^2}{M^2}-\frac{p^2}{M\mu}\right)\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}(p'p)(pP)g_8'\right\} \quad (B.4)$$

$$
\begin{aligned}
g_4 + \frac{P^2}{M^2} g_8 = I\Big\{ & 16\mu^2 g_1' + 8(\mu_a - \mu_b)\frac{\mu^2 P^2}{(pP)} g_1' + 8M\mu \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} g_3' + 4\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}(p'p) g_4' \\
& - \frac{2(p'f^\lambda)(p'P)}{(pf^\lambda)(pP)}\left[M\mu\left(1 + \frac{P^2}{M^2} + \frac{p^2}{M\mu}\right) g_4' - (\mu_a - \mu_b) P^2 g_4'\right] \\
& - \frac{2\mu}{M}\frac{(p'P)(p'f^\lambda)}{(pP)(pf^\lambda)}\left[1 + \frac{P^2}{M^2} + \frac{p^2}{M\mu} - (\mu_a - \mu_b)\frac{(pP)}{M\mu}\right] g_8' \\
& + \frac{4}{M^2}\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}(p'P)(pP) g_8'\Big\}
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2 + \frac{(pf^\lambda)^2}{4\mu^2} g_5 + \frac{p^2 - (pf^\lambda)^2}{4\mu^2} g_7 = I\Big\{ & \left[4M\mu + 4\mu_a M^2 \frac{(pf^\lambda)^2}{(pP)} - 2(\mu_a - \mu_b)\frac{M^2 P^2}{(pP)}\right] g_1' \\
& + [M\mu C - (pP)]\frac{(p'f^\lambda)(pf^\lambda)}{(pP)} 2\frac{M}{\mu} g_3' + \frac{\mu_a}{\mu^2}(pf^\lambda)(p'f^\lambda)(p'P) g_8' \\
& + \left[\frac{\mu}{M}(p'f^\lambda) + \mu_a \frac{(p'p)(pf^\lambda)}{(pP)} + \frac{\mu_a - \mu_b}{2}\cdot\frac{p^2(pf^\lambda)}{(pP)}\right](p'f^\lambda)\left(\frac{M}{\mu}\right)^2 g_4'\Big\}
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2 + \frac{(pf^\lambda)^2}{4\mu^2} g_5 + \frac{(pP)^2}{4\mu^2 P^2} g_7 = I\Big\{ & \left[4M\mu - 2\frac{\mu_a - \mu_b}{P^2} M^2 (pP)\right] g_1' \\
& - 2\left(\frac{M}{\mu}\right)\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}\left[p^2 - \frac{(pP)^2}{P^2}\right] g_3' + \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}\Big[(p'p) - \frac{(pP)(p'P)}{P^2} \\
& + \frac{\mu_a - \mu_b}{2}\left(\frac{M}{\mu}\right)\frac{p^2(p'P) - (pP)(p'p)}{P^2}\Big] g_4' + \frac{\mu_a - \mu_b}{2}\cdot\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} \\
& \cdot \frac{(p'P)}{\mu^2}\left[p^2 - \frac{(pP)^2}{P^2}\right] g_8'\Big\}
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2 + \frac{(pf^\lambda)^2}{4\mu^2} g_5 + \frac{p^2 - (pf^\lambda)^2}{4\mu^2} g_7 = I\Big\{ & 4M\mu\left[1 - \frac{\mu_a - \mu_b}{2}\left(\frac{M}{\mu}\right)\frac{p^2 - (pf^\lambda)^2}{(p'P)} g_1'\right. \\
& - 2\left(\frac{M}{\mu}\right)(p'f^\lambda)(pf^\lambda) g_3' + \frac{\mu_a - \mu_b}{2}(p'f^\lambda)(pf^\lambda)\frac{(p'P)}{\mu^2} g_8' \\
& + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 (p'f^\lambda)\left[\left(\frac{\mu}{M}\right)(p'f^\lambda) + \frac{\mu_a - \mu_b}{2}(pf^\lambda)\frac{p'p - p^2}{pP}\right] g_4'\Big\}
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

$$
g_3 = I\left\{4M\mu g_1' + 4M\mu C\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} g_3' + \frac{M}{\mu}\frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}\left[(p'p) g_4' + \frac{(pP)(p'P)}{M^2} g_8'\right]\right\}
\tag{B.9}
$$

$$
\begin{aligned}
g_6 = I\Big\{ & -4M\mu g_1' - \frac{M}{\mu}\frac{(p'f^\lambda)[p^2P^2 - (pP)^2]}{D} g_4' - \frac{M}{\mu}\frac{(pf^\lambda)(p'f^\lambda)[(pP)(p'P) - (p'p)P^2]}{D} g_4' \\
& + 2M\mu C\frac{P^2[(p'p) - (p'f^\lambda)(Pf^\lambda)] - (p'P)(pP)}{D} g_6'\Big\}
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

其中 $g_i \equiv g_i(p, P)$，$g_i' \equiv g_i(p', P)$，并且

$$
C \equiv 1 + \frac{P^2}{M^2} - \frac{p^2}{M\mu} - (\mu_a - \mu_b)\frac{(pP)}{M\mu}
\tag{B.11}
$$

$$
D \equiv p^2P^2 - (pP)^2 - P^2(pf^\lambda)^2
\tag{B.12}
$$

当 $m_1 = m_2 = m$ 时，$\mu_a = \mu_b = \frac{1}{2}$，$M = 2m$，$\mu = \frac{m}{2}$，由(B.3)—(B.10) 式就给出[4]中的(9a)—(9h) 式。

注意到 (11) 式右边 g_4、g_5、g_7、g_8 项的运动学系数都与 $\frac{p^2}{\mu^2} \sim O(\alpha^2)$ 为同一量级，在精确到 $O(\alpha)$ 的量级下，这四项均可略去，从而给出

$$
g_1 \simeq I\{-4M\mu g_1'\};\quad g_2 \simeq -g_1;\quad g_3 \simeq -g_1;\quad g_6 \simeq g_1
\tag{B.13}
$$

于是有

$$\chi_P^\lambda(p) = Nf(p, P)\left[f^\lambda - \frac{i\hat{P}}{M} f^\lambda - \frac{i(pf^\lambda)}{2\mu} + \frac{1}{2M\mu}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_\mu^\lambda p_\nu P_\rho \gamma_\sigma \gamma_5\right]. \tag{B.14}$$

参 考 文 献

[1] 张肇西,何炬,何祚庥,中国科学,**6**(1976),572.
[2] 何炬,张肇西,何祚庥,高能物理与核物理,**3**(1979),297.
[3] Ching Cheng-rui, Ho Tsu-hsiu, Chang Chao-hsi, *Phys. Lett.*, **B98** (1981), 456.
[4] 何炬,张肇西,何祚庥,高能物理与核物理,**3**(1979),688.
[5] Ho Tsu-hsiu, Chang Chao-hsi, Huang Tao, *Acta Phys. Sin.*, **25** (1976), 215.
[6] M. M. Nagels et al., *Nucl. Phys.*, **B147** (1979), 189.

APPROXIMATE B. S. WAVE FUNCTIONS FOR AN ELECTROMAGNETIC BOUND SYSTEM OF SPINS (1/2, $\bar{1}$/2) OR (1/2, 1/2) WITH UNEQUAL MASSES

Song Xiao-tong
(*Hangzhou Universiety*)
Ching Cheng-rui Ho Tso-hsiu
(*Institute of Theoreieal Physics, Academia Sinica*)

Abstract

The Bethe-Salpeter equation for an electromagnetic bound system of spins $(1/2, \bar{1}/2)$ or $(1/2, 1/2)$ with unequal masses are solved in this paper. The approximate B. S. wave functions for these systems are given. Utilising these wave functions, the decay rate and branching ratio for $\Xi^0 \to (\Sigma^+\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ are calculated with accuracy up to order $O(\alpha)$. The results are $w_{\Xi^0\to(\Sigma^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu} \simeq 1.12(1/\mathrm{sec})$ and

$$R = [w_{\Xi^0\to(\Sigma^+\mu^-)+\bar{\nu}_\mu}]/[w_{\Xi^0\to\Sigma^++\mu^-+\bar{\nu}_\mu}] \gtrsim 4.7\times10^{-7}.$$

Similarly, the process $\Lambda \to (p\mu^-) + \bar{\nu}_\mu$ is also discussed.