第10卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 10, No. 2
1986年3月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Mar., 1986

平移群3-上闭链与带膜波函数

王 珮　　侯伯元　　侯伯宇
(四川大学)　　(内蒙古大学)　　(西北大学)

摘　　要

本文讨论了平移群上同调各阶拓扑障碍的特点，澄清了一些模糊问题．将规范无关的 Mandelstam 波函数(与路径有关波函数)推广为带膜的波函数，使能明显表达平移群-3 上闭链的特点．

一、引　　言

规范理论中反常的拓扑根源近年来曾经进行了大量的研究[1]．利用规范群上同调理论对各种反常进行了透彻分析，1-上闭链描写四维规范流的反常散度[2]，2-上闭链导致奇维空间规范变换生成元对易关系中反常 Schwinger 项[3]．Jackiw[4] 及我们[5] 独立地指出 3-上闭链标志群表示的不可结合性，导致 Jacobi 等式的反常．Jackiw 并对平移群上同调作了有趣的分析，引起了广泛讨论[6]．本文认真分析群的各阶上闭链特点，以各维单极背景场中带荷粒子运动状态为例说明平移群上同调的运用，澄清了一些模糊问题．正如一些文章[6]所指出，当 3-上闭链时，不可能定义势 A，平移群的表示空间(波函数)也不能为通常的 Hilbert 空间．这时基本物理量是 3-形式 J，2-形式场强 F 不能被整体定义，波函数在平移时不可积相因子应与平移路径所张膜有关，相应波函数应为 Mandelstam 波函数[8]与 Yang[9] 的不可积相因子的推广．本文引入推广的 Mandelstam 波函数，利用作用于其上的平移算子二重积，明显地得到平移群 Jacobi 等式反常．

二、群上同调与群表示结构特点

令 x 为某空间 M 中点，$\phi(x)$ 为 M 上函数．利用变换群 G 对空间 M 的作用可得群的表示．令 g 为群 G 中元素，群 G 对 $\phi(x)$ 的作用 $V(g)$ 可表示为：

$$V(g)\phi(x) = U(x;\ g)\phi(x^g) \tag{1}$$

下面我们先从一些特殊的简单情况出发，逐渐推广，并说明群上同调与群表示的关系．

0-上闭链与 1-上边缘链

对 $\phi(x)$ 的对称变换：$U(x;g) = 1$　　(2)

本文1985年4月5日收到．

这时如令：
$$\psi(x)=e^{i\alpha_0(x)}\psi_0(x) \tag{3}$$
其中 $\psi_0(x)$ 满足：
$$\psi_0(x)=\psi_0(x^g) \tag{4}$$
是轨道空间 M/G 上函数．将上三式代入 (1) 式得：
$$V(g)\psi(x)=e^{i\alpha_0(x^g)}\psi_0(x)=e^{i\Delta\alpha_0(x;g)}\psi(x) \tag{5}$$
其中：
$$\Delta\alpha_0(x;\ g)\equiv\alpha_0(x^g)-\alpha_0(x) \tag{6}$$
△运算称为上边缘运算．当
$$\Delta\alpha_0(x;\ g)=0\ \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \tag{7}$$
$\alpha_0(x)$ 称为 0-上闭链，$\psi(x)$ 为群G的恒等表示空间． 当 (7) 式不满足，可令非零的 $\Delta\alpha_0(x;\ g)=\alpha_1(x;\ g)$，此 $\alpha_1(x;\ g)$ 称为 1-上边缘链．易证这时
$$V(g_2)V(g_1)\psi(x)=V(g_2g_1)\psi(x) \tag{8}$$
即这时 $\psi(x)$ 为群G的正则表示空间．

1-上闭链与 2-上边缘链

对更普遍情况
$$U(x,g)=e^{i\alpha_1(x;g)} \tag{9}$$
$$V(g)\psi(x)=e^{i\alpha_1(x;g)}\psi(x^g) \tag{10}$$
这时
$$V(g_2)V(g_1)\psi(x)=e^{i\Delta\alpha_1(x;g_1,g_2)}V(g_2g_1)\psi(x) \tag{11}$$
其中
$$\Delta\alpha_1(x;g_1,g_2)\equiv\alpha_1(x^{g_1};g_2)-\alpha_1(x;g_1g_2)+\alpha_1(x;g_1) \tag{12}$$
当
$$\Delta\alpha_1(x;g_1,g_2)=0\ \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \tag{13}$$
$\alpha_1(x;g_1)$ 称为1-上闭链，$\psi(x)$ 为群G的表示空间(诱导表示空间)．注意一般 $\alpha_1\ (x;\ g)$ 不能表为 $\Delta\alpha_0\ (x;g)$，否则可重新定义 $\Psi(x)=\psi(x)e^{i\alpha_0(x)}$，可退化为上段分析的正则表示情况．

当 (13) 式不满足，可令非零的 $\Delta\alpha_1(x;g_1,g_2)=\alpha_2(x;g_1,g_2)$ 此 $\alpha_2(x;g_1,g_2)$ 称为 2-上边缘链．这时易证多重积仍可结合，即 $\psi(x)$ 为群G的投射表示空间．

2-上闭链与 3-上边缘链

进一步推广，$U(x;g)$ 本身为不可对易算子(不能如 (9) 式用复数表示)，而
$$V(g_2)V(g_1)\psi(x)=e^{i\alpha_2(x;g_1,g_2)}V(g_2g_1)\psi(x). \tag{14}$$
易证这时在不同结合方式所得三重积间有关系：
$$(V(g_3)V(g_2))V(g_1)\psi(x)=e^{i\Delta\alpha_2(x;g_1,g_2,g_3)}V(g_3)(V(g_2)V(g_1))\psi(x), \tag{15}$$
其中：
$$\Delta\alpha_2(x;\ g_1,\ g_2,\ g_3)\equiv\alpha_2(x^{g_1};\ g_2,\ g_3)-\alpha_2(x;\ g_1g_2,\ g_3)$$
$$+\alpha_2(x;g_1,g_2g_3)-\alpha_2(x;g_1,g_2), \tag{16}$$
当
$$\Delta\alpha_2(x;\ g_1,\ g_2,\ g_3)=0(\mathrm{mod}\ 2\pi) \tag{17}$$
$\alpha_2(x;g_1,g_2)$ 称为 2-上闭链，易证这时多重积结合律成立，$\psi(x)$ 为群G的投射表示空间．当 (17) 式不满足，可令非零的 $\Delta\alpha_2(x;g_1,g_2,g_3)=\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3)$，此 $\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3)$ 称为 3-上边缘链． 这时虽然多重积不可结合，但是可以证明 (参见下面对 (19) 式的分析)，多重积按给定结合方式仍有确定值，即 $\psi(x)$ 为群G的(不可结合的)可除表示空间．

3-上闭链与 4-上边缘链

对于更一般情况，$U(x;g)$ 的积不可结合，不能用一般可结合算子表示．这时

$$(V(g_3)V(g_2))V(g_1)\psi(x)=e^{i\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3)}V(g_3)(V(g_2)V(g_1))\psi(x) \tag{18}$$

这时对四重积有五种结合方式，可证：

[下面为简化记号，令：$[(V(g_4)V(g_3))V(g_2)]V(g_1)\psi(x)\equiv[(43)2]1]$

$$\begin{aligned}[(43)2]1 &= \exp\{i\alpha_3(x^{g_1};g_2,g_3,g_4)\}\cdot[4(32)]1\\
&= \exp\{i\alpha_3(x^{g_1};g_2,g_3,g_4)+i\alpha_3(x;g_1,g_2g_3,g_4)\}\cdot 4[(32)1]\\
&= \exp\{i\alpha_3(x^{g_1};g_2,g_3,g_4)+i\alpha_3(x;g_1,g_2g_3,g_4)\\
&\quad +i\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3)\}\cdot 4[3(21)]\\
&= \exp\{i\alpha_3(x^{g_1};g_2,g_3,g_4)+i\alpha_3(x;g_1,g_2g_3,g_4)\\
&\quad +i\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3)-i\alpha_3(x;g_1g_2,g_3,g_4)\}\\
&\quad \cdot(43)(21)=\exp\{i\Delta\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3,g_4)\}\cdot[(43)2]1\end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3,g_4)&\equiv\alpha_3(x^{g_1};g_2,g_3,g_4)-\alpha_3(x;g_1g_2,g_3,g_4)\\
&+\alpha_3(x;g_1,g_2g_3,g_4)-\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3g_4)+\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3)\end{aligned} \tag{20}$$

当

$$\Delta\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3,g_4)=0 \pmod{2\pi} \tag{21}$$

$\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3)$ 称为 3-上闭链，这时多重积按给定结合方式仍有确定值．于是由对 $\psi(x)$ 的作用可得群 G 的(不可结合的)可除表示，或称由结合方式确定的表示．

当 (21) 式不满足，可令非零的 $\Delta\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3,g_4)=\alpha_4(x;g_1,g_2,g_3,g_4)$，此 α_4 称为4-上边缘链，这时四重以上积本身不确定，具有确定结合方式的四重积本身可差相因子 $e^{in\alpha_4}$ (n 为任意整数)．

一般将点 x 与 k 个有序群元 $g_1,g_2,\cdots,g_k$ 的函数 $\alpha_k(x;g_1,g_2,\cdots,g_n)$ 称为群的 k-上链，可如下定义作用在 α_n 上的边缘算子 Δ((6)，(13)，(17)，(20) 等式的推广)：

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_k(x;g_1,g_2,\cdots,g_{k+1})&=\alpha_k(x^{g_1};g_2,g_3,\cdots,g_{k+1})\\
&-\alpha_k(x;g_1g_2,g_3,\cdots,g_{k+1})+\cdots+(-1)^j\alpha_k(x;g_1,g_2,\cdots,g_jg_{j+1},\cdots,g_{k+1})\\
&+\cdots+(-1)^{k+1}\alpha_k(x;g_1,g_2,\cdots,g_k)\end{aligned} \tag{22}$$

易证由上式所定义的边缘运算满足 $\Delta^2=0$，故可如前所述用上同调语言．由前分析可看出，群各阶上闭链与不同特点的群表示有关．

三、电磁场中带荷标粒子的运动状态．平移群上上闭链分析

本文将着重讨论平移群上同调，用各维单极背景场中带荷标粒子运动状态为例，说明平移群各阶上闭链的拓扑意义．对平移群，群流形即底空间流形，平移群上同调与普通 de Rham 上同调相当，平移群 K-上链是 K-形式在 K 维流形上的积分．为得到平移群的表示，我们分析在外电磁场中带荷标粒子的运动状态，先从最简单的情况分析．

纯规范势 A 与平移群 1-上闭链

设在平移算子 $V(a)$ 作用下，粒子波函数 $\psi(x)$ 位相有附加变化(如 (10) 式)

$$V(a)\phi(x) = e^{i\alpha_1(x;a)}\phi(x+a) \tag{23}$$

相角 $\alpha_1(x;\, a)$ (平移群 1-上链)应是 1-形式规范势 $A(x) = A_\mu(x)dx^\mu$ 沿平移路径的积分(为简单起见,设粒子带电荷 $e=1$, 且设 $\hbar=1$).

$$\alpha_1(x;\, a) = \int_x^{x+a} A(\xi) \tag{24}$$

如 (11) 式

$$V(b)V(a)\phi(x) = e^{i\Delta\alpha_1(x;a,b)}V(a+b)\phi(x) \tag{25}$$

其中

$$\Delta\alpha_1(x;\ a,\ b) = \int_{\partial\Delta_2(x;a,b)} A(\xi) \equiv \int_{l(x;a,b)} A \tag{26}$$

这里积分是沿以 $(x, x+a, x+b)$ 为顶点的三角形 $\Delta_2(x;\, a, b)$ 的边 $\partial\Delta_2$ 进行. 如果如 (13) 式

$$\Delta\alpha_1(x;\ a,\ b) = \int_l A = 2\pi z\ (z = \text{整数}) \tag{27}$$

$\alpha_1(x;\, a)$ 称为 1-上闭链. 上条件表明势 A 是纯规范, 场强 $F = dA = 0$. 进一步如上式中 $z = 0$, 则 $\alpha_1(x;\, a)$ 为平庸的 1-上闭链 (1-上边缘链). 如 $z \neq 0$, 则 $\alpha_1(x;\, a)$ 为非平庸 1-上闭链,这时相当于在空间存在量子化磁弦.

无源场强 F 与平移群 2-上闭链

当条件 (27) 不再满足,势 A 不再是纯规范,场强 $F = dA \neq 0$. 相应地可令

$$\alpha_2(l) = \int_l A = \int_M F \neq 0 \pmod{2\pi} \tag{28}$$

这里 M 是张在迴路 l 上的膜 ($l = \partial M$). 这时, 场中带荷粒子波函数不再有确定相因子, 相因子不可积[8,9] Mandelstam 建议采用依赖路径波函数:

$$\phi(x,\ P) = \phi(x)e^{-i\int_{-\infty}^{x} A(\xi)} \equiv \phi(x)e^{-\int_P A} \tag{29}$$

其中 P 标志由 $-\infty$ 到端点 x 的一个类空路径. 波函数 $\phi(x, P)$ 不仅依赖于端点 x, 而且依赖于整个路径 P. 这样定义的波函数 $\phi(x, P)$ 是规范无关的. Mandelstam 建议描写量子体系最好仅采用规范无关的量,即放弃用依赖规范的势 A 与通常波函数 $\phi(x)$, 而采用与规范无关的场强 F 与依赖路径波函数 $\phi(x, P)$. 比较 (26) 与 (28) 式,知 (25) 式应推广为

$$V(b)V(a)\phi(x,\ P) = e^{i\alpha_2(x;a,b)}V(a+b)\phi(x,\ P) \tag{30}$$

或

$$V(-a-b)V(b)V(a)\phi(x, P) = e^{i\alpha_2(x;a,b)}\phi(x, P) \tag{30a}$$

其中

$$\alpha_2(x;\, a, b) = \int_{\Delta_2(x;a,b)} F \neq 0 \pmod{2\pi} \tag{31}$$

波函数 $\phi(x, P)$ 的路径必须改变闭合迴路时, 才能明显写出规范不变的表达式. 由 (30) 式易证

$$(V(c)V(b))V(a)\phi(x, P) = e^{i\Delta\alpha_2(x;a,b,c)}V(c)(V(b)V(a))\phi(x, P) \tag{32}$$

其中

$$\Delta\alpha_2(x;\, a, b, c) = \int_{\partial\Delta_3(x;a,b,c)} F \tag{33}$$

这里积分区域是在以 x 点出发逐次加上矢量 $a, b, c, -(a+b+c)$ 为顶点的四面体 $\Delta_3(x;\, a, b, c)$ 的四个面.

如果

$$\Delta\alpha_2(x;\, a, b, c) = 2\pi z \tag{34}$$

$\alpha_2(x; a, b)$ 称为 2-上闭链. 上条件表明 F 为无源场强, $dF = 0$. 当 $z = 0$, 即在空间拓扑平庸区, 可以写 $F = dA$. 但是当 $z \neq 0$ 时, 即当存在量子化磁单极时, F 不能整体地写为恰当形式,仅当分区(分区后各区空间平庸)后,可用势表达场强.

与 (30 a) 式类似可以证明平移算子的对易子

$$V(-b)V(-a)V(b)V(a)\phi(x, P) = e^{i\alpha_2(x;a,b) - i\alpha_2(x+a+b;-a,-b)}\phi(x, P) \tag{35}$$

上式的无穷小形式:

$$[\partial_\mu, \partial_\nu]\phi(x, P) = -iF_{\mu\nu}\phi(x, P) \tag{36}$$

表明当场强 F 不为零时, 平移算子生成元存在对易反常, 但由于条件 (34), $dF = 0$, 上式受约束

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}[\partial_\lambda, [\partial_\mu, \partial_\nu]]\phi(x, P) = -i\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\partial_\lambda F_{\mu\nu}\phi(x, P) = 0 \tag{37}$$

即平移算子生成元仍满足 Jacobi 等式,它是算子可结合性条件 (34) 的无穷小形式.

守恒流 J 与平移群 3-上闭链

当条件 (34) 不再满足, F 不再是无源场,可令非零的 dF 为流 $J = dF \neq 0$. 相应地可令

$$\alpha_3(x; a, b, c) = \int_{\partial\Delta_3(x;a,b,c)} F = \int_{\Delta_3(x;a,b,c)} J \neq 0 \pmod{2\pi} \tag{38}$$

这时 (30) 式中相因子 α_2 不仅与迴路路径 L 有关, 而且与迴路 L 上所张膜 M 有关. 场中带荷粒子波函数的不可积相因子还依赖于迴路所张膜,因此应采用推广的 Mandelstam 波函数: 依赖膜的波函数 $\phi(x, L, M)$.

当引入流 $J = dF$ 后, F 不确定,可差任意闭 2-形式,相当于差规范变换, 即 F 相当于"超势",而这时普通的势 1-形式 A 完全无定义. 描写量子体系最好仅采用规范无关的量,即采用与规范无关的流 J 与带膜波函数 $\phi(x, L, M)$.

与 (38) 式相应, (32) 式应推广为

$$(V(c)V(b))V(a)\phi(x, L, M) = e^{i\alpha_3(x;a,b,c)}V(c)(V(b)V(a))\phi(x, L, M) \tag{39}$$

这时可如 (19) 式证明,如要求多重积按给定结合方式仍有确定值时,应要求

$$\Delta\alpha_3 = \int_{S^3} J = 0 \pmod{2\pi} \tag{40}$$

这里积分区域是与 S^3 同胚的 3 维紧致流形. 这时 α_3 称为 3-上闭链. 上条件表明 J 为守恒流(无源漏), $dJ = 0$. 这时,虽然平移群表示不可结合, 但是多重积按给定结合方式仍有确定值,因此仍可讨论群的无穷小生成元, 可定义生成元的高次幂. 而 (39) 式的无穷小形式可表为

$$[(\partial_c\partial_b)\partial_a - \partial_c(\partial_b\partial_a)]\phi(x, L, M) = -iJ_{abc}\phi(x, L, M) \tag{41}$$

将指标 a, b, c 置控并求和,得 Jacobi 等式反常. 相应反常项满足约束条件 $dJ = 0$, 它是多重积可除(按给定结合方式有确定值)条件的无穷小形式.

四、结论与讨论

由前面分析,我们可将平移群各阶上闭链特点作一简单对比

表 1

	背景场特点	空间拓扑障碍
1-上闭链	纯规范势 1-形式 A，$dA=0$	量子化涡旋
2-上闭链	无源场强 2-形式 F，$dF=0$	量子化单极
3-上闭链	守恒流 3-形式 J，$dJ=0$	量子化源漏

表 2

	带荷粒子波函数特点	平移群表示特点
1-上闭链	相角依赖点 $\psi(x)$	普通表示　$V(a)\psi(x)=e^{i\int_P A}\psi(x+a)$
2-上闭链	相角依赖路径 $\psi(x,P)$	投射表示　$V(b)V(a)\psi(x,P)=e^{i\int_M F}V(a+b)\psi(x,P)$
3-上闭链	相角依赖膜 $\psi(x,L,M)$	不可结合表示　$(V(c)V(b))V(a)\psi(x,L,M)=e^{i\int_\tau J}V(c)\cdot(V(b)V(a))\psi(x,L,M)$

在一般量子力学体系(包括有量子化单极情况)，外背景场量是无源场强 F，F 局域可用势 A 表达，$F=dA$，而 A 可作规范变换不影响场强 F. 在 Hillert 空间中态矢是空间点的复函数，充许有一个不可积的相因子. 波函数的局域相角变换与 A 的规范变换相补偿.

对平移群 3-上闭链，背景场量为 3-形式 J，为守恒流 $(dJ=0)$，J 局域可用 F 表达，$J=dF$，F 可差任意闭2-形式而不影响 J，即 F 相当于超势，可差规范变换，而这时普通的势 1-形式 A 完全无定义. 例如将普通 3 维欧空间紧致化为 S^3，当基本背景场量为 J，J 可整体定义，在整个 S^3 上 F 无整体定义. 将 S^3 分为两个与 D^3(3 维盘)同胚的区域，这时在每区可定义 F，而在交叠区两个 F 的差 ΔF 为闭 2-形式，当进一步分区使平庸化，可得 $\Delta F=dA$，…. 这样可得 Čech-de Rham Δ-d 双复形系列. 我们曾经利用 Čech-de Rham Δ-d 双复形分析规范群上同调的整体拓扑意义[7]. 规范群各阶拓扑障碍互相连系，并可通过族指数定理 (Family index theorem) 与高维空间 Dirac 算子的指数 z 相连系. 对平移群上同调，由本文分析我们看出，各阶拓扑障碍为额外引入(相当于背景场中各维单极)，这点与规范群不同.

在 Klein-Kaluza 理论以及超引力理论中，会出现高阶反对称形式的“超势”，这时需对相应的平移群上闭链及拓扑障碍进行分析. 另方面本文引入的推广的 Mandelstam 波函数对弦模型，口袋模型等也会有重要应用.

参　考　文　献

[1] R. Jackiw, 文集 “Relativity, Groups and Topology II” Les Houches 1983, B. S. DeWitt and R. Stora 主编. North Holland (1984) B. Zumino,同上文集, M. F. Atiyah and I. M. Singer, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81**(1984), 2597.

[2] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.*, **37B**(1971), 95. E. Witten, *Nucl. Phys.*, **223**(1983), 422.

[3] L. D. Faddeev, *Phys. Lett.*, **145B**(1984), 81; L. D. Faddeev and S. L. Shatashvili, *Theor. Math. Phys.*, **60**(1984), 206.

[4] R. Jackiw, MIT 予印品 CTP ＃1209.

[5] Hou, B. Y. (侯伯宇), Hou, B. Y. (侯伯元).*Chinese Phys. Lett.*, **2**(1985).

[6] Hou, B. Y. (侯伯宇) 等,西安予印品，NWU-IMP-84-9; NWU-IMP-85-4. D. Boulware, S. Deser

and B. Zumino, Santa Barbare 予印品 CA93106. R. Jackiw, 私人通信.
[7] Hou, B. Y. (侯伯宇), Hou, B. Y. (侯伯元), Wang, P. (王珮), NWU-IMP-85-1.
[8] S. Mandelstam, *Ann. Phys.*, 19(1962), 1
[9] C N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, 38(1977), 1377.

THREE-COCYCLES FOR TRANSLATION GROUP AND THE GENERALIZED MANDELSTAM WAVE FUNCTION

WANG PEI
(Sichuan University)

HOU BO-YUAN
(Neimonggu University)

HOU BO-YU
(Northwest University)

ABSTRACT

In this paper we discuss the cohomology for translation group, analyze the property of each order of cocycles, claryfy some ambiguties, Meanwhile we introduce the generalized Mandelstam wave function which can realize the 3-cocycles of translation group.