第 10 卷 第 4 期 高能物理与核物理 Vol. 10, No. 4
1986 年 7 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1986

关于 B. W. Lee 的公式 $\Gamma*\Gamma=0$ 的推广

全湘林　　王连吉
（大连工学院）　（大连海运学院）

摘　　要

本文将 B. W. Lee 的公式 $\Gamma*\Gamma=0$ 推广为 $\Gamma^{AF}*\Gamma^{AF}=0$[1,2]，只要命 B. W. Lee 公式中的 $d\lambda=\zeta_1\zeta_2\zeta_0$ 即可，而不需要 B. W. Lee 式的二次变化等于零的限制．从而，该公式不仅包含了 B. W. Lee 的公式，而且能直接解决其他一些问题．

一、引　　言

首先回顾一下 B. W. Lee 在文献[2]中所阐述的理论． 非阿贝尔规范理论的 BRS 变换为[3]

$$\delta\phi_i=D_i^a\eta_a\delta\lambda, \tag{1.1}$$

$$\delta\eta_a=-\frac{1}{2}gf_{abc}\eta_b\eta_c\delta\lambda, \tag{1.2}$$

$$\delta\xi_a=-\frac{1}{\alpha}F_a[\phi]\delta\lambda. \tag{1.3}$$

其中 ξ 和 η 是鬼场，且

$$D_i^a=\frac{1}{g}\partial_\mu\delta^4(x_i-x_\lambda)+t_{ij}^a\phi_j. \tag{1.4}$$

又有

$$\mathrm{L_{eff}}[\phi,\xi,\eta]=\mathscr{L}[\phi]-\frac{1}{2\alpha}F_a^2[\phi]+\xi_aM_{ab}[\phi]\eta_b. \tag{1.5}$$

而 Leff 在(1.1)—(1.3)变换下不变．由(1.1)—(1.3)可证 ϕ_i 和 η_a 的二次变化为零，即

$$\delta(D_i^a\eta_a)=0,\quad \delta(f_{abc}\eta_b\eta_c)=0. \tag{1.6}$$

一般生成泛函为，

$$Z=N\int[d\phi d\xi d\eta]\exp i\int dx^4\{\mathrm{Leff}+\xi\beta+\beta^+\xi+J_i\phi_i\}. \tag{1.7}$$

为讨论方便，相应于(1.6)式引进两个复合外场 $D_i^a[\phi]\eta_a$ 和 $\frac{1}{2}gf_{abc}\eta_b\eta_c$ 及两个外源 K_a 和 L_a. 为得到用 $\delta/\delta K_a$ 和 $\delta/\delta L_a$ 表示的微分方程，文献[2]中又引了一个特殊的生成泛

本文 1985 年 11 月 13 日收到．

函，即

$$Z[J,\beta,\beta^+,K,L]=N\int[d\phi d\xi d\eta]\exp i\int dx^4\{\text{Leff}[\phi,\xi,\eta]$$
$$+\xi\beta+\beta^+\xi+K_aD_i^a[\phi]\eta_a+L_a1/2gf^{abc}\eta_b\eta_c\}. \qquad (1.7)'$$

该式经(1.1)—(1.3)变换后为 Z'，因这仅是一些积分变量变换，故有

$$Z'-Z=0. \qquad (1.8)$$

显然在计算过程中用到了(1.6)式．再作简单计算可得，

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i}+\frac{\delta\Gamma}{\delta L_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta_a}=0. \qquad (1.9)$$

简记为

$$\Gamma*\Gamma=0. \qquad (1.10)$$

根据上述分析，对 ϕ_i 和 η_a 有二次变化为零．但对另一鬼场 ξ_a，由(1.3)式，并无二次变化为零，即 $\delta\left(-\frac{1}{2}F_a[\phi]\right)\neq 0$．所以，B. W. Lee 在(1.7)式 Z 中不引进第三个复合场 $-\frac{1}{\alpha}F_a[\phi]$．

二、对 B. W. Lee 公式 $\Gamma*\Gamma=0$ 的两点推广

1. 为取消场的二次变化等于零这一严格限制（意即不限于非阿贝尔群下的变换），我们作如下推广．首先命 $\delta\lambda=\zeta_1\zeta_2\zeta_0$，可得

$$\zeta_0=\frac{1}{\zeta_1\zeta_2}\delta\lambda. \qquad (2.1)$$

式中 ζ_1 和 ζ_2 均为不变的 Grassmann 数，因两个 Grassmann 数相乘为一可对易的 C 数[5,6]，故由(2.1)知，ζ_0 是与时空无关的 Grassmann 无穷小变量且与 $\delta\lambda$ 只差一个可对易 C 数 $1/\zeta_1\zeta_2$ 因子．作如此推广后的 BRS 变换为：

$$\delta\phi_i=D_i^a\eta_a\zeta_1\zeta_2\zeta_0,\quad \delta\eta_a=-\frac{1}{2}gf_{abc}\eta_b\eta_c\zeta_1\zeta_2\zeta_0,\quad \delta\xi_0=-\frac{1}{\alpha}F[\phi]\zeta_1\zeta_2\zeta_0. \qquad (2.2)$$

显然，它们的二次变化全为零，即

$$\delta(D_i^a\eta_a\zeta_1\zeta_2)=\delta\left(-\frac{1}{2}gf_{abc}\eta_b\eta_c\zeta_1\zeta_2\right)=\delta\left(-\frac{1}{\alpha}F_a[\phi]\zeta_1\zeta_2\right)=0. \qquad (2.3)$$

2. 在 B. W. Lee 的理论框架下，由(1.6)式知，ϕ_i 和 η_a 的二次变化为零，而 ξ_a 的二次变化不为零，从而有公式(1.9)．但是，在本文的理论中，由(2.3)式可知，不仅 ϕ_i 和 η_a 的二次变化为零，同时，ξ_a 的二次变化亦为零． 由此可直观地猜测出此时的公式应为：

$$\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta K_i}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\phi_i}+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta L_a}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\eta_a}+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta M_a}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\xi_a}=0. \qquad (2.4)$$

其中 Γ 的右上标 AF 表示对在有效拉氏函数 Leff 中所有的场（All Fields）采取同一的形式，以示与 B. W. Lee 公式中 Γ 的区别．

三、公式(2.4)的证明

现在假定有 n 个玻色场 $\phi_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 和 $2N$ 个费米场 ψ_j 和 $\bar{\Phi}_k(1\leqslant j,k\leqslant N)$，且当 j 为鬼场时，$\bar{\Phi}_{gh}\equiv\xi_a$，$\psi_{gh}\equiv\eta_a$，并有变换：

$$\phi_i'=\phi_i+\delta\phi_i=\phi_i+\zeta_1\zeta_2\zeta_0 f_i(\bar{\Phi},\psi,\phi), \tag{3.1}$$

$$\psi_j'=\psi_j+\delta\psi_j=\psi_j+\zeta_1\zeta_2\zeta_0 F_j(\bar{\Phi},\psi,\phi), \tag{3.2}$$

$$\bar{\Phi}_k'=\bar{\Phi}_k+\delta\bar{\Phi}_k=\bar{\Phi}_k+\zeta_1\zeta_2\zeta_0 h_k(\bar{\Phi},\psi,\phi). \tag{3.3}$$

式中 f_i、F_j 和 h_k 分别是 ψ、$\bar{\Phi}$ 和 ϕ 的函数，并在这些函数中都不出现 ζ_1、ζ_2 和 ζ_0（其定义如前所述）. 在原 BRS 变换中

$$\delta f_i=\delta F_j=0. \tag{3.3-1}$$

为方便计，本文称(3.3-1)式为 B. W. Lee 式场的二次变化为零.

由方程(3.1)—(3.3)，显然可得

$$\delta(\zeta_1\zeta_2 f_i)=\delta(\zeta_1\zeta_2 F_j)=\delta(\zeta_1\zeta_2 h_k)=0, \tag{3.3-2}$$

它被称之为在本文框架下的二次变化为零. 可见，本文的理论中，没有(3.3-1)的严格限制. 所以，BRS 变换是(3.1)—(3.3)的特殊情况. 现将该新理论表述如下：假设有效拉氏函数密度 Leff 在变换(3.1)—(3.3)之下不变，即

$$\mathrm{Leff}[\phi',\psi',\bar{\Phi}']=\mathrm{Leff}[\phi,\psi,\bar{\Phi}], \tag{3.4}$$

则立即可以得到：

$$\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta K^i}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\phi_i}+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta L^a}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\psi_a}+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta M^a}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\bar{\Phi}_a}=0. \tag{3.5}$$

简记为：

$$\Gamma^{AF}*\Gamma^{AF}=0. \tag{3.6}$$

式中

$$\Gamma^{AF}[\tilde{\phi}_i,\tilde{\psi}_j,\tilde{\bar{\psi}}_k,K_i,L_j,M_k]=W[J_i,\beta_j^+,\beta_k,K_i,L_j,M_k]-\int d^4x(J_i\tilde{\phi}_i+\beta_j^+\tilde{\psi}_j+\tilde{\bar{\psi}}_k\beta_k). \tag{3.7}$$

这里有

$$Z=\exp iW, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}Z=N\int[d\phi d\psi d\bar{\Phi}]\exp i\int d^4x\{&\mathrm{Leff}[\phi,\psi,\bar{\Phi}]+J_i\phi_i+\beta_j^+\psi_j\\&+\bar{\Phi}_k\beta_k+K_i]\zeta_1\zeta_2 f_i(\phi,\psi,\bar{\Phi})+L_j\zeta_1\zeta_2F_j(\phi,\psi,\bar{\Phi})\\&+\zeta_1\zeta_2h_k(\phi,\psi,\bar{\Phi})M_k\}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.7)式中

$$\tilde{\phi}_i\equiv\frac{\delta W}{\delta J_i},\ \tilde{\psi}_j\equiv\frac{\delta W}{\delta\beta^+},\ \tilde{\bar{\psi}}\equiv\frac{\delta W}{\delta\beta}. \tag{3.10}$$

证明(3.5)式时，要注意到 Z 在变换(3.1)—(3.3)之下变为 Z'，且有 $Z'-Z=0$. 并且要注意到积分测度不变[2,4]，即 $[d\phi'd\psi'd\bar{\Phi}']=[d\phi d\psi d\bar{\Phi}]$，这就很容易证得(3.5)或(3.6)式.

四、鬼方程的推导

$$\mathrm{Leff}=\bar{C}_a\partial^\mu(D_\mu^{ab}C_b)-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF_a^{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

其中 $\bar{C}_a$、C_a 和 A_μ^a 分别相应于上述诸节中的 ξ_a、η^a 和 ϕ_i.

本文中，相应于原 BRS 变换的新变换为：

$$\delta A_\mu^a=-\frac{\zeta_1\zeta_2\zeta_0}{g}D_\mu^{ab}C_b,\quad \delta C^a=\frac{1}{2}\zeta_1\zeta_2\zeta_0f^{abc}C_bC_c,$$

$$\delta\bar{C}^a=-\frac{\zeta_1\zeta_2\zeta_0}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a. \tag{4.2}$$

容易验证，(4.1) 在 (4.2)下是不变的．请注意，这个变换与原 BRS 变换相差一因子 $\zeta_1\zeta_2$. 所以，鬼方程应与文献[7]中的鬼方程差一因子 $\zeta_1\zeta_2$，即为

$$\frac{g}{\zeta_1\zeta_2}\partial^\mu\left(\frac{\delta}{\delta K_a^\mu}\Gamma^{AF}\right)+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\tilde{\bar{C}}_a}=0. \tag{4.3}$$

五、$\Gamma^{AF}*\Gamma^{AF}=0$ 的应用及展望

1. 由公式 $\Gamma^{AF}*\Gamma^{AF}=0$ 可推出 B. W. Lee 的公式 $\Gamma*\Gamma=0$． 根据公式(3.6)和鬼方程(4.3)，并注意到 $\Gamma=\Gamma^{AF}+\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu^a)^2$，立即可得

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K_a^\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde{A}_\mu^a}+\frac{\delta\Gamma}{\delta L_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde{C}^a}=0,$$

简记为 $\Gamma*\Gamma=0$．由此不难看出，公式 $\Gamma^{AF}*\Gamma^{AF}=0$ 包括了 B. W. Lee 的公式

$$\Gamma*\Gamma=0.$$

2. 存在五个外场的情况

设

$$\mathrm{Leff}=\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/+gA\!\!\!/-m)\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF_a^{\mu\nu}+\bar{C}^a\partial^\mu(D_\mu^{ab}C^b)-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2, \tag{5.1}$$

其中有 $\bar{\psi}$、ψ、A_μ^a、$\bar{C}^a$ 和 C^a 五个外场，相应的变换为：除(4.2)的三个变换外，还有

$$\delta\psi=-i\zeta_1\zeta_2\zeta_0\frac{\lambda^a}{2}C^a\psi,\quad \delta\bar{\psi}=\bar{\psi}\left(i\zeta_1\zeta_2\zeta_0\frac{\lambda^a}{2}C^a\right), \tag{5.2}$$

两个变换．可以验证(5.1)在(5.2)和(4.2)下不变，于是有

$$\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta K_a^\mu}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\tilde{A}_\mu^a}+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta L}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\tilde{\psi}}+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta L_a}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\tilde{C}^a}+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta M}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\tilde{\bar{\psi}}}$$
$$+\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta M_a}\frac{\delta\Gamma^{AF}}{\delta\tilde{\bar{C}}^a}=0. \tag{5.3}$$

3. 应用于 WS 模型

应用本文的原理，可以不按 B. W. Lee 的方法去做，可直接从自发破缺采用 Higgs 机制处理后的有效拉氏函数去做重整化的证明． 这是可行的，因本文的理论取消了

B. W. Lee 式场的二次变化为零的限制，而 Leff 破缺后，只剩下 Abel U_Q 对称性.

4. 由于本文取消了 B. W. Lee 式场的二次变化为零的限制，所以，对任何 Abel 群对称的规范理论，应用本文理论都可直接处理. 对于非规范群，本文亦适用.

5. 作者已经找到了一个没有 Higgs 粒子的模型，并用本文理论证明它可以重整化(待发表). 然而，Higgs 粒子是否存在尚未定论. 不过，本文提供的理论作为一个数学方法还是有用的.

参　考　文　献

[1] B. W. Lee, *Phys. Lett.*, 46B(1974); *Phys-Rev.*, D9(1974), 933.
[2] B. W. Lee, Lecture Notes at Les Houches Summer School 1975.
[3] C. Bechi, A. Rouet and R. Store, *Comm. Math. Phys.*, 42(1975), 127.
[4] David Lurie, Particles and Fields, Interscience Publishers a Division of John Wiley Sons New York. London. Sydney, 1968 p. 54.
[5] 宋行长，粒子物理讨论会文集，武汉，1982，p. 89.
[6] A. Salam and J. Strathdee, *Phy. Rev.*, D11, (1975), 1521—1522.
[7] B. L. Yony, Introduction to Quantum Field Theory, Zheng Zhou University Press 1980.

THE GENERALIZATION ON B. W. LEE'S EQUATION $\Gamma*\Gamma=0$

QUAN XIANG-LIN　　　　WANG LIAN-JI
(*Dalian Institute of Technology*)　　　　(*Dalian Marine College*)

ABSTRACT

B. W. Lee's equation $\Gamma*\Gamma=0$ is generalized to a new equation $\Gamma^{AF}*\Gamma^{AF}=0$ after letting $d\lambda=\zeta_1\zeta_2\zeta_0$. It is found that the condition that quadratic change of B. W. Lee's form is zero makes no restriction to such a generalization. The derived formula not only contains B. W. Lee's one, but also can be used to solve ather questions.

更　　正

1986 年第 3 期第 299 页公式(12)漏掉一项，特此更正. 应为:

$$<(S-<S>_0)^3>_0=\sum_P\left\langle\square\right\rangle_0+12(2d-3)\sum_P\left\langle\square\square\right\rangle_0+4(2d-3)(2d-4)\sum_P\left\langle\square\square\right\rangle_0+24\left[(24-4)^2+(2d-3)\right]\sum_P\left\langle\begin{matrix}\square&\\\square&\square\end{matrix}\right\rangle_0+12(2d-3)^2\sum_P\left\langle\square\square\square\right\rangle_0+8(2d-4)\sum_P\left\langle\square\right\rangle_0 \quad (12)$$