

二维三角点阵的蒙特卡洛重整化群研究

黄五群 陈天崙 钟朝武 李志兵
(南开大学)

摘 要

本文用 Callaway 提出的蒙特卡洛重整化群方法研究了二维三角点阵的 Ising 模型,找到了它的固定点及相应的临界指数,与精确计算值符合很好,与其它近似方法的结果相比有明显的改进.用此方法还研究了二维三角点阵的 Z_2 规范模型,没有发现固定点,这与用对偶理论讨论二维方块点阵 Z_2 规范模型没有相变点的结论相一致.

一、引 言

目前关于格点规范理论研究的核心问题之一是从分立点阵过渡到连续时空系统的性质究竟会发生什么变化?从1976年 Ma^[1] 提出用蒙特卡洛模拟计算并结合实空间重整化群分析的方法(简称为 MCRG 方法)来分析临界性质以来取得了很大的进展.不少作者提出各种方法去实现 Ma 的思想^[2,3,4],并证明了 MCRG 方法是分析临界性质及连续极限的十分有效的理论工具.

Callaway 提出的方法^[5]更为简洁并能直接计算 Block 重整比耦合常数.本文采用 Callaway 提出的 MCRG 方法研究了二维三角点阵的 Ising 模型,找到了它的固定点及相应的临界指数,与精确的理论值符合很好,与其它近似方法的结果相比有明显的改进.我们还用此法研究了二维三角点阵的 Z_2 规范理论模型,没有发现固定点,这与用对偶理论讨论的二维方块点阵 Z_2 规范模型没有相变点的结论相一致.

二、MCRG 方 法

考虑一个 Site 变量为 $\{\phi\}$ 的物理系统, Site 哈密顿量为 $H\{\phi\}$,重整化后,即块化后的哈密顿量记为 $H'\{\phi'\}$,它们的关系为

$$e^{H'\{\phi'\}} = \text{Tr}_{\{\phi\}} P[\{\phi'\}, \{\phi\}] e^{H\{\phi\}}, \quad (1)$$

其中 $P[\{\phi'\}, \{\phi\}]$ 是投影算子,由重整化群变换保持配分函数不变,要求

$$\text{Tr}_{\{\phi\}} P[\{\phi'\}, \{\phi\}] = 1. \quad (2)$$

除约束条件(2)外, $P[\{\phi'\}, \{\phi\}]$ 是任意的.为方便,取其为高斯型

其中
数. (

i

{K_a}

]

为 φ'

零,留

它只

常数

?

自旋

量

简记

?

P[{σ'

式中

此处

计算

不影

角形

的自

1中

究

Ising
其它近
规范
有相

时系统的
实空间重
展。不少
性质及连

本文采用
定点及相
改进。我
对偶理论

后, 即块

$$P[\{\phi'\}, \{\phi\}] = N(\beta) \prod_i \exp[-\beta(\phi'_i - g_i\{\phi\})^2], \quad (3)$$

其中 $N(\beta)$ 是仅依赖于 β 的归一化因子。 $g_i\{\phi\}$ 是由块化原则所决定的一个 $\{\phi\}$ 的函数。(3)中的指数将作为蒙特卡洛模拟迭代中 Site 哈密顿量的一部分。

通常, $H'\{\phi'\}$ 和 $H\{\phi\}$ 都可展开成一些基本函数 $\{S_a\}$ 的线性组合。

$$H'\{\phi'\} = \sum_a K'_a S_a\{\phi'\}, \quad (4a)$$

$$H\{\phi\} = \sum_a K_a S_a\{\phi\}, \quad (4b)$$

$\{K_a\}$ 与 $\{K'_a\}$ 分别为块化前后的耦合常数。

用此 MCRG 方法最重要的是构造 Block 组态, 所有的 Block 变量 $\{\phi'\}$ 除一个(记为 ϕ'_0) 外都被固定。 固定的方式是使 $\{S\{\phi'\}\}$ 中有尽可能多的包含 ϕ'_0 的 $S_a\{\phi'\}$ 为零, 留下的部分记为 S_0 。 唯一可涨落的变量 ϕ'_0 取值的几率为

$$\rho(\phi'_0) \propto \exp[K'_0 S_0\{\phi'\}], \quad (5)$$

它只依赖于 K'_0 和已知函数 $S_0\{\phi'\}$ 。 通过测量 $\rho(\phi'_0)$ 就可以求出块化后的重整化耦合常数 K'_0 。

三、二维三角点阵 Ising 模型的 MCRG 研究

在 Ising 模型中 Site 和 Block Site 的自旋变量 $\{\sigma\}$ 和 $\{\sigma'\}$ 取值均为 ± 1 , 在不计自旋自作用的情况下, 在作用量中我们仅考虑最近邻, 次近邻及四自旋相互作用, 哈密顿量

$$H\{\sigma\} = K_1 \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j + K_2 \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j + K_3 \sum_{i, l, m, n} \sigma_i \sigma_l \sigma_m \sigma_n$$

(最近邻) (次近邻) (某自旋及其三个最近邻)

简记为

$$H\{\sigma\} = K_1 S_1 + K_2 S_2 + K_3 S_3, \quad (6)$$

在 Ising 模型中可以把(3)式写成

$$P[\{\sigma'\}, \{\sigma\}] = N(\beta) \prod_i \exp[\beta \sigma'_i g_i\{\sigma\}]. \quad (7)$$

式中 $g_i\{\sigma\}$ 由“多数原则”去确定, 即

$$g_i\{\sigma\} = \text{Sign} \left(\sum_j \sigma_j \right), \quad (8)$$

此处 σ_j 是包含于 Block Site σ'_i 内的自旋。 计算中 β 值取为 10, 若取更大一些的值, 也不影响计算结果。

二维三角点阵及其块化方式示于图 1。 图中每个交点表示一个 Site, 斜线覆盖的三角形表示块化后的 Block Site。 显而易见块化标度 $b = \sqrt{3}$ 。 以 0 标记的 Block Site 上的自旋值可以涨落、变动, 而其他 Block Site 上的自旋值由上节所述的原则来取定。 在图 1 中, 当由 1 标记的 Block 自旋取值为 +1, 由 2 标记的 Block 自旋三个取 +1, 三个取

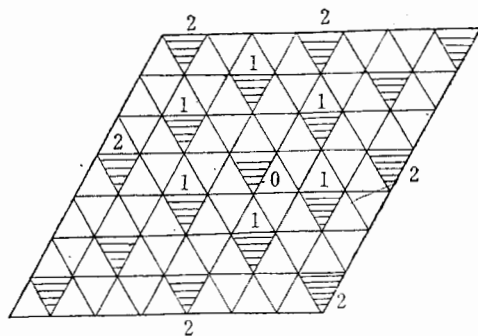


图 1

(1)

(2)

-1 时,组态记为 a , 由此可计算 $K'_1 + K'_3$; 当标记为 1 的 Block 自旋三个取为 +1, 三个取为 -1, 而标记为 2 的 Block 自旋取值为 +1 时,组态记为 b , 由此可计算 K'_2 ; 当标记为 2 的 Block 自旋三个取 +1, 三个取 -1, 标记为 1 的 Block 自旋在某一条直线上的两个取值为 -1, 其余四个取值为 +1 时,组态记为 c , 由它可计算 $K'_1 - 3K'_3$. 若以 $N_+(a)$, $N_+(b)$, $N_+(c)$, $N_-(a)$, $N_-(b)$, $N_-(c)$ 分别表示在 a , b , c 三个组态中 σ'_0 取 +1, -1 的次数, 则有

$$K'_1 + K'_3 = 1/12 \ln [N_+(a)/N_-(a)], \quad (9a)$$

$$K'_2 = 1/12 \ln [N_+(b)/N_-(b)], \quad (9b)$$

$$K'_1 - 3K'_3 = 1/4 \ln [N_+(c)/N_-(c)]. \quad (9c)$$

由此三式可解出 Block 重整化耦合常数 K'_1 , K'_2 及 K'_3 .

在耦合常数空间中 (K_1, K_2, K_3) 和 (K'_1, K'_2, K'_3) 各表示一个点, 对于固定点来说它们是重合的, 记为 (K_1^*, K_2^*, K_3^*) . 在固定点可以计算临界指数. 由于四自旋相互作用很弱, 相应的耦合常数及其导数可略, 由 (9a) 及 (9b) 可得

$$\frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta} = 1/12 [\langle S_\beta \rangle_+ - \langle S_\beta \rangle_-]. \quad (10)$$

式中 α, β 可取值为 1, 2. $\langle S_\beta \rangle_+$ ($\langle S_\beta \rangle_-$) 表示哈密顿量中的组分的期望值, 它是 σ'_0 等于 +1 (-1) 的这些组态中的平均值. 用对角化方法求出由 $\frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta}$ 构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K'_1}{\partial K_1} & \frac{\partial K'_1}{\partial K_2} \\ \frac{\partial K'_2}{\partial K_1} & \frac{\partial K'_2}{\partial K_2} \end{pmatrix}$$

的最大本征值 λ , 则临界指数

$$y = \ln \lambda / \ln b = \ln \lambda / \ln \sqrt{3}. \quad (11)$$

我们在 12×12 的点阵上做 10000 次蒙特卡洛模拟迭代得到的结果示于表 1 中.

表 1

K_1	0.20	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30
K_2	0.015	0.0	-0.008	-0.009	-0.011	-0.014	-0.020	-0.025	-0.028
K_3	0.002	0.0	0.004	0.004	0.004	0.004	0.002	0.002	0.002
K'_1	0.209	0.231	0.232	0.252	0.260	0.272	0.271	0.293	0.298
K'_2	-0.011	-0.021	-0.024	-0.025	-0.025	-0.030	-0.032	-0.038	-0.042
K'_3	0.003	0.003	0.005	0.003	0.006	0.006	0.003	0.002	0.003
$\sqrt{\sum_i \Delta K_i^2}$	0.028	0.021	0.017	0.016	0.014	0.016	0.015	0.018	0.017

由此表可见, 找到的固定点为 $K_1^* = 0.26$, $K_2^* = -0.011$, $K_3^* = 0.004$; 相应的临界指数为 $y = 1.04$. 为了明晰地将它与精确解及几种其他近似方法的结果进行比较, 我们列出表 2.

$n+1$, 三
 K_2 ; 当
 一条直线
 $3K_3$. 若
 个组态中

(9a)

(9b)

(9c)

固定点来
 自旋相互

(10)

是 σ_i 等

(11)

中.

0.30
-0.028
0.002
0.298
-0.042
0.003
0.017

应的临
 较, 我

表 2

	平均场方法 ^[4]	小 V 展开法 ^[4]	MCRG	精确解 ^[6]
$\{K^*\}$	0.166	0.33	{0.26, -0.011, 0.004}	0.27
y	2	0.885	1.04	1

由表 2 可见, 我们用 MCRG 方法所得的结果与精确解符合很好, 比其它近似方法的结果有明显的改进. 这结果与 Callaway 文中用二维方块点阵得到的临界指数 $y = 0.99$ 也是一致的.

四、二维三角点阵 Z_2 规范模型的 MCRG 研究

二维三角点阵 Z_2 规范模型的作用量^[7] 取为

$$S\{U\} = K \sum_{\Delta} U_i U_j U_k, \quad (12)$$

其中 U 为放在每根链上的规范场变量, 它是 Z_2 的群元素, 求和是对点阵上的所有三角形进行的, 块化后的作用量为

$$S'\{U'\} = K' \sum_{\Delta'} U'_i U'_j U'_k, \quad (13)$$

其中 U' 为放在块化后点阵上每根链上的规范场变量. 求和是对块化后点阵上所有三角形进行的. 投影算子为

$$P[\{U'\}, \{U\}] = N(\beta) \prod_i \exp[-\beta(U' - g_i\{U\})^2], \quad (14)$$

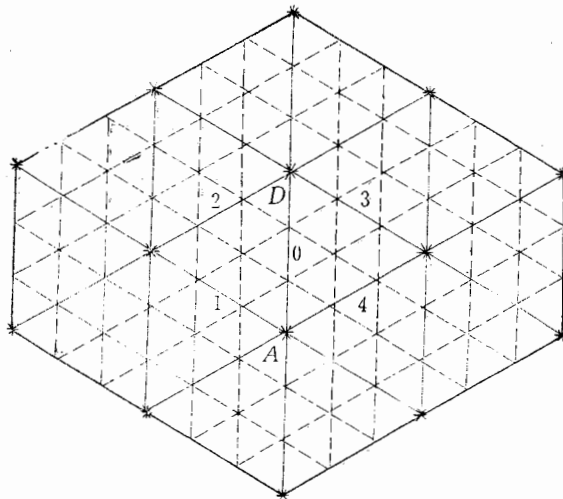


图 2

$N(\beta)$ 是适当选定的与 β 有关的归一化因子。

由 Site Links 块化成 Block Links 的过程示于图 2。图中 Block Site 用 * 表示, 把 Block Sites 连接起来的是 Block Links。块化原则是保证每根 Site Link 出现并且仅出现在一根 Block Link 中, 从某点 A 到某点 D 的 Block Link 上规范场变量 U'_{AD} 取值是沟通 A 、 D 的三条路径的带权的平均值, 并取

$$g_{AD}\{U\} = U'_{AD}.$$

如图 3 所示

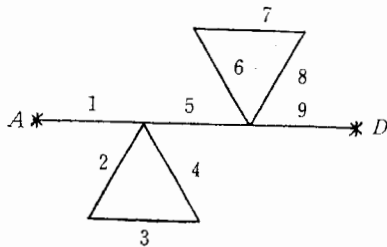


图 3

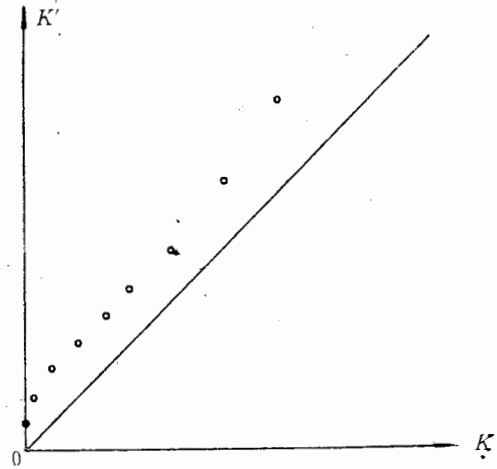


图 4

$$g_{AD}\{U\} = \text{Sign}\{U_1 U_5 U_9 [W_1 + W_2 (U_2 U_3 U_4 + U_6 U_7 U_8)]\}, \quad (15)$$

式中 W_1 、 W_2 是权因子。在图 2 中取 $U'_1 = U'_2 = U'_3 = U'_4 = 1$, U'_0 可涨落变化, 其它的 Block Links 按最大可能抵消原则确定, 得

$$K' = 1/4 \ln(N_+/N_-), \quad (16)$$

式中 N_+ 、 N_- 分别是 U'_0 取 $+1$ 、 -1 的次数。蒙特卡洛模拟迭代次数为 10000 次, 结果示于图 4。由图 4 显然找不到 $K = K'$ 的点, 所以没有固定点。这是与对偶理论对二维方块点阵 Z_2 规范模型没有相变点的结论相一致的。

本文是在 M340-S 计算机上完成的。

参 考 文 献

- [1] S.-K. Ma, *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976), 461.
- [2] R. H. Swendsen, *Phys. Rev.*, **B20**(1979), 2080 *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1165.
- [3] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, U. Heller and F. Karsch, *Phys. Lett.*, **143B**(1984), 193.
- [4] C. B. Lang, *Phys. Lett.*, **155B**(1985), 399.
- [5] D. J. E. Callaway and R. Petronzio, *Phys. Lett.*, **139B**(1984), 189; *Phys. Lett.*, **145B**(1984), 381.
- [6] H. E. Stahley, *物理学进展*, **5**(1985), 1.
- [7] 陈天嵩, 黄五群, 郑希特, *高能物理与核物理*, **9**, (1985), 41.

Th
sional tu
sistent v
that obt
on a 2-d
thods.

表示, 把

A MONTE CARLO RENORMALIZATION GROUP STUDY OF A 2-DIMENSIONAL TRIANGULAR LATTICE

HUANG WU-QUN CHEN TIAN-LUN ZHONG CHAO-WU LI ZHI-BING

(Nankai University)

ABSTRACT

The method developed by D. J. E. Callaway is applied to Ising model on a two-dimensional triangular lattice. A fixed point and critical exponent are found. The results are consistent with one of the exact theories very well. Obviously this method show superiority to that obtained by some other approximate methods. The method is also applied to Z_2 gauge theory on a 2-dimensional triangular lattice, no fixed points are found, in agreement with other methods.

— K

(15)

化, 其它

(16)

100 次, 结
理论对二