第11卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 11, No. 4
1987年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1987

快报

随机三角点阵中依辛模型的蒙特卡洛重整化群研究[1)]

黄五群 陈天崙 沈琴婉 钟朝武
（南 开 大 学）

摘　　要

本文使用通常的“多数原则”块化方法和一种新的块化方法对二维随机三角点阵中的依辛模型进行了蒙特卡洛重整化群研究．结果表明，都能得到很好的临界指数．这种新的块化方法便于推广到高维随机点阵中去．

一、引　　言

重整化群方法是研究大自由度的自旋体系或场论体系的长程行为的重要工具，但仅对少数模型有严格的解析解，近年来发展的蒙特卡洛重整化群方法（简称 MCRG 方法）[1]为研究分立体系的连续极限及临界性质提供了重要手段，因此广泛地用于讨论统计模型的固定点，临界指数及格点规范理论中各种规范场的相变，连续极限的 β 函数及标度行为．

由于用随机三角点阵可保持体系的洛仑兹不变性[2]，我们感兴趣研究四维随机三角点阵的问题，但随机点阵的不规则性使我们用“多数原则”进行块化是较麻烦的，为此，我们从二维依辛模型入手去探寻一个简易可行的块化原则，并将结果与“多数原则”的结果和二维正规三角点阵的结果进行比较．可以看到，由于采用了不同的块化原则，固定点的位置有了变化，但临界指数符合得很好．因而这是一种可行的并便于推广至三维，四维的块化原则．

在用 MCRG 方法研究体系的固定点时，一般都是通过比较同一体系从不同初始哈密顿量出发各经过 n 及 $n+1$ 步的块化后，各关联函数是否一致，从而确定固定点，但计算过程中无法求出各步重整化变换中的耦合常数．本文采用的是改进的 Swendsen 方法[3]，用它可计算自旋系统及规范场系统的重整化耦合常数及多参数的重整化群轨迹．

1) 本工作受到国家科学基金支持．
本文1986年12月23日收到．

二、改进的 MCRG 方法

这个方法的基本思想是：构造从一个蒙特卡洛模拟中计算重整化关联函数的两个不同表达式，其中一个明显地依赖于重整化耦合常数，由它可构造一个含尝试耦合常数的关联函数表示式，这两个表示式中关联函数计算值的差表示了假定的和真正的重整化耦合常数之间的差别，极小化这个差别就可以求出真正的重整化耦合常数。

对二维伊辛模型，Site 和 block Site 的自旋变量 $\{\sigma\}$ 和 $\{\sigma'\}$ 都取为 ± 1，在不计自旋的自作用情况下，作用量中我们仅考虑最近邻、次近邻及四自旋相互作用，哈密顿量

$$H = K_1 \underset{\text{(最近邻)}}{\sum_{i \neq j}} \sigma_i \sigma_j + K_2 \underset{\text{(次近邻)}}{\sum_{i \neq j}} \sigma_i \sigma_j + K_3 \underset{\text{(某自旋与三个最近邻自旋)}}{\sum_{i,l,m,n}} \sigma_i \sigma_l \sigma_m \sigma_n$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3} K_\alpha S_\alpha. \tag{1}$$

关联函数的第一个表示式，即标准的表示式

$$\langle S_\alpha \rangle = Z^{-1} \mathrm{Tr}_\sigma [S_\alpha \exp(H)]. \tag{2}$$

其中 Z 是配分函数

$$Z = \mathrm{Tr}_\sigma \exp(H). \tag{3}$$

关联函数的第二个表示式为

$$\langle S_\alpha \rangle = m_\alpha^{-1} \sum_l \langle S_{\alpha,l} \rangle. \tag{4}$$

$$\langle S_{\alpha,l} \rangle = Z^{-1} \mathop{\mathrm{Tr}}_{\{\sigma_i \neq \sigma_l\}} \{\exp(H - H_l) Z_l \langle S_{\alpha,l} \rangle_l]. \tag{5}$$

其中

$$\langle S_{\alpha,l} \rangle_l = Z_l^{-1} \mathrm{Tr}_{\sigma_l} [S_{\alpha,l} \exp(H_l)]. \tag{6}$$

$$Z_l = \mathrm{Tr}_{\sigma_l} \exp(H_l). \tag{7}$$

$S_{\alpha,l}$ 为 S_l 中含 σ_l 的所有项的求和，例如：

$$S_1 = \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j, \quad \text{则 } S_{1,l} = \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j (\delta_{i,l} + \delta_{j,l}).$$

对 $\alpha = 1, 2$，$m_\alpha = 2$；对 $\alpha = 3$，$m_\alpha = 4$；(5) 式中的

$$H_l = \sum_{\alpha=1}^{3} K_\alpha S_{\alpha,l}. \tag{8}$$

定义

$$\hat{S}_{\alpha,l} = S_{\alpha,l} / \sigma_l. \tag{9}$$

则

$$H_l = \sigma_l \sum_{\alpha=1}^{3} K_\alpha \hat{S}_{\alpha,l}. \tag{10}$$

引入尝试耦合常数序列 $\{\tilde{K}_\alpha\}$，由(4)可得关联函数的近似表达式

$$\langle\tilde{S}_\alpha\rangle = m_\alpha^{-1}\sum_l \left\langle \hat{S}_{\alpha,l}\ \tanh\left(\sum_\beta \tilde{K}_\beta \hat{S}_{\beta,l}\right)\right\rangle. \tag{11}$$

可以证明，当且仅当对所有的 α，$\tilde{K}_\alpha = K_\alpha$ 时，$\langle\tilde{S}_\alpha\rangle = \langle S_\alpha\rangle$. 倘若 $\{\tilde{K}_\alpha\}$ 不等于 $\{K_\alpha\}$，则 $\langle\tilde{S}_\alpha\rangle \neq \langle S_\alpha\rangle$. 展开至第一级

$$\langle\hat{S}_\alpha\rangle - \langle S_\alpha\rangle = \sum_\beta \frac{\partial\langle\tilde{S}_\alpha\rangle}{\partial\tilde{K}_\beta}(\tilde{K}_\beta - K_\beta). \tag{12}$$

其中

$$\frac{\partial\langle\tilde{S}_\alpha\rangle}{\partial\tilde{K}_\beta} = m_\alpha^{-1}m_\beta^{-1}\sum_l \left\langle \hat{S}_{\alpha,l}\hat{S}_{\beta,l}\ \mathrm{Sech}^2\left(\sum_\gamma \tilde{K}_\gamma \hat{S}_{\gamma,l}\right)\right\rangle. \tag{13}$$

这样,通过选择序列 $\{\tilde{K}_\alpha\}$ 使 $\langle\tilde{S}_\alpha - S_\alpha\rangle = 0$ 的方法可以得到重整化耦合常数 $\{K_\alpha\}$,从而确定固定点 $\{K_\alpha^*\}$.

为计算临界指数,在固定点 $\{K_\alpha^*\}$ 附近展开至线性项

$$(K_\alpha^{(n)} - K_\alpha^*) = \sum_\beta T_{\alpha\beta}^*(K_\beta^{(n-1)} - K_\beta^*). \tag{14}$$

其中

$$T_{\alpha\beta}^* = \left.\frac{\partial K_\alpha^{(n)}}{\partial K_\beta^{(n-1)}}\right|_{\mathrm{F.P.}}. \tag{15}$$

$\{K_\alpha^{(n)}\}$为第 n 次重正化变换后的耦合常数,对任意关联函数 $\langle S_\gamma^{(n)}\rangle$ 的 Chain-rule 方程为

$$\frac{\partial\langle S_\gamma^{(n)}\rangle}{\partial K_\beta^{(n-1)}} = \sum_\alpha \frac{\partial K_\alpha^{(n)}}{\partial K_\beta^{(n-1)}}\frac{\partial\langle S_\gamma^{(n)}\rangle}{\partial K_\alpha^{(n)}}. \tag{16}$$

而且

$$\frac{\partial\langle S_\gamma^{(n)}\rangle}{\partial K_\beta^{(n-1)}} = \langle S_\gamma^{(n)}S_\beta^{(n-1)}\rangle - \langle S_\gamma^{(n)}\rangle\langle S_\beta^{(n-1)}\rangle. \tag{17}$$

$$\frac{\partial\langle S_\gamma^{(n)}\rangle}{\partial K_\alpha^{(n)}} = \langle S_\gamma^{(n)}S_\alpha^{(n)}\rangle - \langle S_\gamma^{(n)}\rangle\langle S_\alpha^{(n)}\rangle. \tag{18}$$

在蒙特卡洛模拟中可计算 (17),(18) 中的关联函数,代入 (16) 式就可得一系列的矩阵元 $T_{\alpha\beta}^*$.

解本征方程

$$\sum_\beta T_{\alpha\beta}^*\phi_\beta^\gamma = \lambda\phi_\alpha^\gamma. \tag{19}$$

$\alpha,\beta = 1,2,3$. 求出其最大本征值 λ，则临界指数 $y = \ln\lambda/\ln b$. 对新的块化方法 $b = \sqrt{2}$，对“多数原则” $b = \sqrt{3}$.

三、结果分析

我们在二维随机三角点阵上放了 160 个点，对哈密顿量为(1)的伊辛模型进行研究. 采用的新块化原则是：每次块化丢弃编号为奇数的点. 显而易见，这样做的优点是十分简易,且便于推广至三维,四维. 通过 10000 次迭代,我们得到的固定点是

$$\{K_1^*, K_2^*, K_3^*\} = \{0.17, 0.04, -0.006\},$$

该点的临界指数 $y=1.01$.然后，我们在点阵上布 540 个点，用通常的“多数原则”进行研究，通过 10000 次迭代得到固定点为 $\{0.25,0.037,0.06\}$，该点的临界指数为 $y=1.01$. 以上结果与精确解[4]及二维正规三角点阵的结果[5]之比较列于表 1.

表 1

	精确解	正规三角点阵多数原则的 MCRG 结果	随机三角点阵多数原则的 MCRG 结果	随机三角点阵新块化原则的 MCRG 结果
$\{K_\alpha^*\}$	0.27	$\{0.26,-0.011,0.004\}$	$\{0.25,0.037,0.06\}$	$\{0.17,0.04,-0.006\}$
y	1	1.04	1.01	1.01

从表中看到，当采用相同的块化原则——多数原则时，对正规及随机三角点阵得到的固定点没有明显的差别，完成此工作后看到文献[6]与我们的结果一致。我们还可看到，随块化原则的不同，固定点的位置是变化的，因为不同的块化原则决定不同的重整化轨迹，它与临界面的交点——固定点当然也随之而不同，但反映系统物理性质的临界指数是不变的。

以上结果，使我们认为我们提出的这种新块化原则是简易可行的，它为我们进行三维，四维随机三角点阵的 MCRG 研究提供了方便。下一步的工作将是在三维，四维随机三角点阵上对各种自旋及规范场模型进行 MCRG 研究。

本文是在 M340-S 计算机上完成的。

参 考 文 献

[1] S. -K. Ma, *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976), 461.
[2] N. H. Christ, R. Friedberg and T. D. Lee, *Nucl.* Phys., **B202** (1982), 89; **B210** (1982), 310; **B210** (1982), 337.
[3] R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984), 1165.
[4] H. E. Stanley, 物理学进展, V. **5**, No. 1(1985), 1.
[5] 黄五群，陈天崙，钟朝武，李志兵，高能物理与核物理，**11**(1987)，38.
[6] D. Espriu, M. Gross, P. E. L. Rakow and J. F. Wheater, *Nucl. Phys.*, **B265** (FS15) (1986), 92.

A MONTE CARLO RENORMALIZATION GROUP STUDY OF ISING MODEL ON RANDOM TRIANGLE LATTICE

HUANG WU-QUN　CHEN TIAN-LUN　SHEN QIN-WAN　ZHONG CHAO-WU

(*Nankai University*)

ABSTRACT

A usual majority rule and a new block method are applied to Ising model on two-dimensional random triangle lattice. Either of them has got a good critical exponent. The new block method has an advantage of easily extending to higher dimensional random lattice.