第 12 卷 第 1 期　高能物理与核物理　Vol. 12, No. 1
1988 年 1 月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Jan., 1988

超对称和 Gauss–Bonnet–Chern 定理

虞　跃
（浙江大学，杭州）

摘　要

由于 de Rham 复形在底流形有边界时要求局域椭圆边界条件，因此，一维时空上的有边界的场流形要有满足这个条件的超对称结构，必须要求边界度规是乘积的。利用超对称理论的 Witten index，我们证明 Gauss-Bonnet-Chern 定理。

一、边界条件和边界度规

超对称理论不但对物理学的发展具有深远的影响，而且还具有许多美妙的数学性质。它与微分几何的整体性质密切相关[1-3]。用超对称理论人们已经证明了在底流形无边界时四种经典复形的指数定理，包括有 twist 情况的和 G 指数定理[4-8]。本文将讨论底流形有边界时的 de Rham 复形的情况，并证明如果超对称 σ 模型的能谱要有限，即哈密顿量是一个拉普拉斯算子或说超对称荷是一个椭圆微分算子，则场流形在边界上只能取乘积度规。最后，我们用路径积分的方法给出乘积度规的 GBC 定理，并给出底流形边界非乘积度规时的 GBC 定理的超对称证明。

设 M 是一个紧致的 m 维流形，ϕ^i 是其上的局域坐标系。$\phi^i(\tau)$，$\tau\in R$，定义了 M 上的一个一维时空上的玻色场。设 $\psi^i(\tau)$ 是相应的施量场。在只有一个超对称荷时，超代数是

$$\{Q,Q^*\}=2H$$
$$\{Q,Q\}=\{Q^*,Q^*\}=0 \tag{1.1}$$

这里 H 是系统的哈密顿量，Q 是超对称荷。令

$$S=\frac{Q}{\sqrt{2}}+\frac{Q^*}{\sqrt{2}} \tag{1.2}$$

则

$$S^2=H \tag{1.3}$$

这里，由于系统的能量必须是有限的，即 H 必是一个拉普拉斯算子，Q 必须是一个椭圆微分算子。

设 $|b\rangle,|f\rangle$ 是 Hilbert 空间中的玻色态和费米态，F 是费米数算符。$(-1)^F$ 作用在 $|b\rangle$ 和 $|f\rangle$ 上分别有本征值 ±1，$\mathrm{Tr}(-1)^F$ 称为 Witten index[1]。文献[1]证明了它与 Euler 数 $\chi(M)$，零模玻色态数 n_B^0 与零模费米态数 n_F^0 的差的关系是：

* 本文 1986 年 9 月 22 日收到。

$$\chi(M) = n_B^0 - n_F^0 = \mathrm{Tr}(-1)^F \tag{1.4}$$

且

$$\mathrm{Tr}(-1)^F = \mathrm{Tr}(-1)^F e^{-\beta H} \tag{1.5}$$

其中 $\beta(\geqslant 0) \in R$. (1.5)说明 β 的取值不影响 $n_B^0 - n_F^0$ 的值.

在 $\partial M = \phi$ 时,在一维时空上可以构造一维超对称 σ 模型[9-11],其拉氏密度是

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} g_{ij}(\phi)\dot{\phi}^i\dot{\phi}^j + \frac{i}{2} g_{ij}(\phi)\bar{\psi}^i\gamma^0 \frac{D}{d\tau}\psi^j + \frac{1}{12} R_{ijkl}\bar{\psi}^i\bar{\psi}^k\psi^j\psi^l \tag{1.6}$$

其中

$$\frac{D}{d\tau}\psi^i = \frac{d}{d\tau}\psi^i + \Gamma^i_{jk}\dot{\phi}^j\psi^k$$

$$\dot{\phi}^i = \frac{d}{d\tau}\phi^i$$

$$\bar{\psi}^i_\alpha = \psi^{i+}_\beta\gamma^0_{\beta\alpha}, \alpha,\ \beta = 1, 2 \tag{1.7}$$

g_{ij} 是M的度规, ψ^i 是一个两分量的实旋量, $\gamma^0 = \sigma_2$. (1.6) 在以下的超对称变换下是不变的

$$\delta\phi^i = \bar{\varepsilon}\psi^i$$

$$\delta\psi^i = -i\varepsilon\gamma^0\dot{\phi}^i - \Gamma^i_{jk}\bar{\varepsilon}\psi^j\psi^k \tag{1.8}$$

在 γ^0 对角的表象,拉氏密度(1.6)变成

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{\phi}^i\dot{\phi}^j + \frac{i}{2} g_{ij}\psi^{+i}\gamma^0 \frac{D}{d\tau}\psi^j + \frac{1}{4} R_{ijkl}\psi^{+i}\psi^{+j}\psi^k\psi^l \tag{1.9}$$

对易关系是

$$\{\psi^i, \psi^{+j}\} = g^{ij}(\phi)$$

$$\{\psi^i, \psi^j\} = \{\psi^{+i}, \psi^{+j}\} = 0 \tag{1.10}$$

设$|\Omega\rangle$ 是真空态, 则可以得到 Hilbert 空间 $\left\{|\Omega\rangle,\ \psi^{+i}|\Omega\rangle,\ \cdots,\ \psi^{+i_1}\cdots\psi^{+i_m}|\Omega\rangle;\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + Q^*)\right\}$ 与外代数 $\{\Lambda^*(M); d + \delta\}$ 之间的一一对应. (1.4)式可由这个对应得到. 设 $|\omega\rangle$ 是费米数为最高数 m 的态, 则也可用 $\left\{|\omega\rangle, \psi^i|\omega\rangle,\ \cdots,\ \psi^{i_1}\cdots\psi^{i_m}|\omega\rangle;\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + Q^*)\right\}$ 表示 Hilbert 空间.

现在设M的边界 $\partial M \neq 0$, 这时如果一个算子是椭圆的,除了在 $\partial M = 0$ 时它应是椭圆的外,还必须满足椭圆边界条件[12]. 文献[13]指出,如果M是一个具有光滑边界的黎曼流形,则对 de Rahm 复形,存在一个有很好的定义的椭圆边值问题, 即对外微分 d 存在一个好的边界条件:

$$\sum_{\substack{\{i_1\cdots i_p\}\\ \text{有一个}i_j=m}} \alpha_{i_1\cdots i_p} d\phi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\phi^{i_p} = 0, \quad \text{在边界上} \tag{1.11}$$

和

$$\sum_{\substack{\{i_1\cdots i_{p+1}\}\\ \text{有一个}i_j=m}} \partial_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots{}_{i_{p+1}} d\phi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\phi^{i_{p+1}} = 0, \text{在边界上} \tag{1.12}$$

其中 $\alpha_p = \alpha_{i_1\cdots i_p} d\phi^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\phi^{i_p}$ 是M上的任意 p 形式, $\frac{\partial}{\partial pm}$ 是边界上的法方向. (1.11)

的一个特殊情况是

$$\Gamma^i_{jm} d\phi^m = 0,\ \text{即}\ \Gamma^i_{jm} = 0,\ \text{在边界上} \tag{1.13}$$

做一个一一对应的映射

$$d\phi^i \longleftrightarrow \psi^i|\omega\rangle \quad i = 1, \cdots, m \tag{1.14}$$

则

$$d + \delta \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (Q + Q^*) \tag{1.15}$$

于是，椭圆边值问题变成 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Q + Q^*),\ (1.16)\right\}$，即条件(1.11),(1.12)变成：

$$\sum_{\substack{\{i_1\cdots i_p\} \\ \text{有一个}i_j=m}} a_{i_1\cdots i_p}\psi^{i_1}\cdots\psi^{i_p}|\omega\rangle = 0,\ \text{在边界上}$$

$$\sum_{\substack{\{i_1\cdots i_{p+1}\} \\ \text{有一个}i_j=m}} \partial_{i_1} a_{i_2\cdots i_{p+1}}\psi^{i_1}\cdots\psi^{i_{p+1}}|\omega\rangle = 0,\ \text{在边界上} \tag{1.16}$$

不过，下面将看到，椭圆边值问题 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Q + Q^*),(1.16)\right\}$ 只有在近M的边界处度规是乘积的时才能很好定义，原因是现在还得多加一个约束："微分形式" ψ^i 与坐标 ϕ^i 之间存在一个超对称变换 Δ.

(1.16)有几个特殊情况.

$$\left\langle\omega\left|g_{im}\psi^{+i}\frac{D}{d\tau}\psi^m\right|\omega\right\rangle\Big|_{\partial M} = 0$$

$$\left\langle\omega\left|g_{mj}\psi^{+m}\frac{D}{d\tau}\psi^j\right|\omega\right\rangle\Big|_{\partial M} = 0 \tag{1.17}$$

$$\langle\omega|R_{ijml}\psi^{+i}\psi^{+j}\psi^m\psi^l|\omega\rangle|_{\partial M} = 0$$

$$\langle\omega|R_{mjkl}\psi^{+m}\psi^{+j}\psi^k\psi^l|\omega\rangle|_{\partial M} = 0$$

于是，在边界上，作用量(1.9)变成

$$L|_{\partial M} = \left(\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot\phi^\alpha\dot\phi^\beta + \frac{i}{2}\psi^{+\alpha}\frac{D}{d\tau}\psi^\beta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta\gamma\delta}\psi^{+\alpha}\psi^{+\beta}\psi^\gamma\psi^\delta\right)\Big|_{\partial M}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}g_{\alpha m}\dot\phi^\alpha\dot\phi^m + \frac{1}{2}g_{m\alpha}\dot\phi^m\dot\phi^\alpha + \frac{1}{2}g_{mm}\dot\phi^m\dot\phi^m\right)\Big|_{\partial M} \tag{1.18}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \cdots, m-1$. 若要求 $\delta(L|_{\partial M})$ 等于 τ 的全微分，则对 $\alpha = 1, \cdots, m-1$，由(1.13)，在边界上

$$\delta\phi^\alpha = \bar\varepsilon\psi^\alpha$$
$$\delta\psi^\alpha = -i\gamma^0\dot\phi^\alpha\varepsilon - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\bar\varepsilon\psi^\beta\psi^\gamma \tag{1.19}$$

在(1.19)下

$$\delta(L|_{\partial M}) = (g_{\alpha m}\delta\dot\phi^\alpha\dot\phi^m + g_{\alpha m}\dot\phi^\alpha\delta\dot\phi^m + g_{mm}\delta\dot\phi^m\dot\phi^m)|_{\partial M}$$
$$+ \text{全散度项} \tag{1.20}$$

在(1.20)中，$\delta\dot\phi^\alpha$, $\dot\phi^m$, $\dot\phi^\alpha$ 在边界上都不为零. 要使(1.20)为全散度项，只有 $\delta\dot\phi^m|_{\partial M} = 0$ 和 $g_{m\alpha}|_{\partial M} = 0$.

考虑(1.13)，取 $j = m$，由 $g_{m\alpha}|_{\partial M} = 0$，可得：

$$\Gamma^{\alpha}_{mm}|_{\partial M} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{m\beta,m} + g_{\beta m,m} - g_{mm,\beta})_{\partial M} = 0 \tag{1.21}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{mm,\beta}\Big|_{\partial M} &= g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \phi^m} g_{m\beta}\Big|_{\partial M} \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi^m}(g^{\alpha\beta} g_{m\beta})\Big|_{\partial M} - \left(\frac{\partial}{\partial \phi^m} g^{\alpha\beta}\right) g_{m\beta}\Big|_{\partial M} \end{aligned} \tag{1.22}$$

因为 $g^{\alpha\beta} g_{m\beta} = \delta^{\alpha}_{m} = 0$，$g_{m\beta}|_{\partial M} = 0$，所以

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{mm,\beta}\Big|_{\partial M} = 0 \tag{1.23}$$

即

$$g_{mm,\alpha}|_{\partial M} = 0 \tag{1.24}$$

也就是说，g_{mm} 在边界上只是 ϕ^m 的函数

$$g_{mm}|_{\partial M} = f(\phi^m) \tag{1.25}$$

因此，

$$g_{ij} d\phi^i d\phi^j|_{\partial M} = f(\phi^m) d\phi^m d\phi^m + g_{\alpha\beta}(\phi)|_{\partial M} d\phi^\alpha d\phi^\beta \tag{1.26}$$

这样，我们得出结论：椭圆边值问题 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+Q^*),(1.16);\ \Delta\right\}$ 只有在边界度规是乘积的流形上才能很好定义。

二、Gauss-Bonnet-Chern 定理

给定一个边界上是乘积度规的流形 M，由以上讨论，可以在其上定义椭圆边值问题 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+Q^*),(1.16);\ \Delta\right\}$. 于是就有超对称结构(1.6)和(1.7).它的 Witten index 可用路径积分形式表示[14]

$$\chi(M) = \mathrm{Tr}(-1)^F e^{-\beta H} = \int_{PBC} \mathscr{D}\phi(\tau)\mathscr{D}\bar{\phi}(\tau)\mathscr{D}\phi(\tau)\exp(-s) \tag{2.1}$$

其中

$$s = \int_0^\beta \mathscr{L} d\tau \tag{2.2}$$

由于(2.1)的值与 β 的取值无关，所以可以在 $\beta \to 0$ 极限下计算(2.1)：

$$\begin{aligned} \chi(M) = &\int d\phi_0 d\bar{\Phi}_0 d\phi_0 \exp\left(-\frac{\beta}{4} R_{ijkl}\phi_0^{+i}\phi_0^{+j}\phi_0^k\phi_0^l\right) \\ &\cdot \int \mathscr{D}'\phi(\tau)\mathscr{D}'\bar{\Phi}(\tau)\mathscr{D}'\phi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\beta g_{ij}\dot{\phi}^i\dot{\phi}^j + i\phi^{+i}\frac{D}{d\tau}\phi^j g_{ij}\right) \\ &(\beta \to 0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

在(2.3)中，含 τ 的变量的积分是 Gauss 型积分，给出常数 $1/(2\pi\beta)^{m/2}$. 而

$$\int d\phi_0 d\bar{\Phi}_0 d\phi_0 = \int \prod_{n=1}^{m} d\phi_0^n d\bar{\Phi}_0^n d\phi_0^n.$$

对积分

$$\int \prod_{n=1}^{m} d\bar{\Phi}_0^m d\phi_0^m \exp\left(-\frac{\beta}{4} R_{ijkl}\phi_0^{+i}\phi_0^{+j}\phi_0^k\phi_0^l\right) \tag{2.4}$$

作级数展开发现只有正比于 $\phi_0^{+i_1}\cdots\phi_0^{+i_{m/2}}\phi_0^{k_1}\cdots\phi_0^{l_{m/2}}$ ($i_1\neq j_1\neq\cdots\neq i_{m/2}\neq j_{m/2}\neq k_1\neq l_1\neq\cdots\neq k_{m/2}\neq l_{m/2}$) 的项才对积分有贡献. 于是,(2.3)变成

$$\begin{aligned}\chi(M)&=\frac{(-1)^{m/2}}{2^m\left(\frac{m}{2}\right)!\,\Pi^{m/2}}\int_M d^M\phi\varepsilon^{i_1j_1\cdots i_{m/2}j_{m/2}}\varepsilon^{k_1l_1\cdots k_{m/2}l_{m/2}}\\&\quad\cdot R_{i_1j_1k_1l_1}\cdots R_{i_{m/2}j_{m/2}k_{m/2}l_{m/2}}\\&=\int_M E(T(M))\end{aligned}\tag{2.5}$$

这就是边界是乘积度规时的 Gauss-Bonnet-Chern 定理,与流形无边界时的形式一样[4,5]. 当然,这要在(2.1)能被很好定义,即H是一个拉普拉斯算子的前提下才会有这样的结果. 事实上,只有流形的边界允许有乘积度规时,(2.1)才有很好的定义,所以(2.5)只有对有乘积边界的流形成立.

给定一个流形 M, 在 ∂M 上不允许有乘积度规. 这样, M上就不能有很好定义的椭圆边值问题 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+Q^*),\ (1.16);\ \triangle\right\}$. 扩展这个流形, 定义流形 MUN, 其中 $N=\partial M\times[0,1]$. 在 MUN 的边界上,可以有乘积度规[13]. 因此,$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+Q^*),\ (1.16);\ \triangle\right\}$ 在 MUN 上有很好的定义,所以

$$\begin{aligned}\chi(MUN)&=\int_{MUN}E(T(MUN))\\&=\int_M E(T(MUN))+\int_N E(T(MUN))\end{aligned}\tag{2.6}$$

显然,

$$\int_M E(T(MUN))=\int_M E(T(M))\tag{2.7}$$

定义 g_1 是 MUN 上的度规,它是平滑的,且在近 $\partial M\times 1$ 处是乘积的,满足:

$$g_1|_M=g\tag{2.8}$$

这里 g 是M上原来的度规. 再设 g_2 是N上的乘积度规. 定义 ∇_1, ∇_2 是 g_1, g_2 相应的联络,令

$$\nabla_t=t\nabla_1+(1-t)\nabla_2,\quad 0\leqslant t\leqslant 1\tag{2.9}$$

且由于 g_2 在一个方向上是平的,所以 $E(T(N))=E(g_2)=0$, 于是

$$\begin{aligned}\int_N E(T(MUN))&=\int_N E(g_1).\\&=\int_N E(g_1)-E(g_2)=\int_N dQ(\nabla_1,\nabla_2)\\&=\int_{\partial M\times 1}Q(\nabla_1,\nabla_2)\end{aligned}\tag{2.10}$$

其中 $Q(\nabla_1,\nabla_2)$ 就是 Chern-Simons 形式. 由于 $\partial M\times 1$ 与 ∂M 同伦; 且由于切向量场在[0,1]方向无奇点,所以可以把 MUN 沿[0,1] 方向收缩成 M, 即M与MUN是同伦的,具有相同的拓扑不变量. 特别地,

$$\chi(MUN) = \chi(M) \tag{2.11}$$

于是，对任何一个流形M，我们通过扩展它到一个边界是乘积度规的流形 MUN，则都可以用超对称的方法证明

$$\chi(M) = \int_M E(T(M)) + \int_{\partial M} Q(\nabla_1, \nabla_2) \tag{2.12}$$

其中[15]

$$\begin{aligned}
&Q(\nabla_1, \nabla_2) = \sum_j Q_j \\
&Q_j = c_j \varepsilon^{i_1 \cdots i_{m-1}} \Omega_{i_1 i_2} \Lambda \cdots \Lambda \Omega_{i_{2j-1} i_{2j}} \Lambda \nabla_{2j+1, m} \Lambda \cdots \Lambda \nabla_{i_{m-1}, m} \\
&\Omega_{ij} = R_{ijkl} d\phi^k \Lambda d\phi^l \\
&c_j = (-1)^j / (\Pi^k j! 2^{k+j} 1 \cdot 3 \cdots (2k - 2j - 1)) \\
&\nabla_{ij} = (\nabla_1)_{ij} - (\nabla_2)_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

参　考　文　献

[1] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B202**(1982), 253.
[2] E. Witten, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 667.
[3] E. Witten, Holomorphic morse inequalities, Priceton Preprint (1982).
[4] L. Alvarez-Gamme, *Commun. Math. Phys.*, **90**(1983), 161.
[5] P. Windey, CERN Preprint TH3758(1983).
[6] E. Getzler, *Commun. Math. Phys.*, **92**(1983), 163.
[7] I. M. Bismat, Orsay Preprint (1983).
[8] B. Zumino, LBL Preprint 17972(1982).
[9] E. Witten, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 2991.
[10] P. Divecchia and S. Ferrara, *Nucl. Phys.*, **B130**(1977), 93.
[11] D. Z. Freedman and P. K. Townsend, *Nucl. Phys.*, **B177**(1981), 282.
[12] M. F. Atiyah and R. Bott, Diff. Analysis (Bombay Colloquium), Oxford, London (1964).
[13] P. B. Gilkey, *Adv. Math.*, **15**(1975), 334.
[14] S. Cecotti and L. Girardello, *Phys. Lett.*, **B110**(1982), 39.
[15] S. S. Chern, *Ann. Math.*, **46**(1942), 46.

SUPERSYMMETRY AND GAUSS-BONNET-CHERN THEOREM

Yu Yue

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

Because the de Rham complex on compact manifolds with boundary must satify the elliptic boundary conditions, their boundary metric must be a product if the structures of supersymmetry satisfying the conditions exist in the field manifolds with boundary on 0+1 dimensions. Using the witten index for a supersymmetric field theory, we proved the Gauss-Bonnet-Chern theorem.