第 12 卷 第 1 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 12, No. 1
1988 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1988

关于径向方程哈密顿量的厄米性问题

马 中 骐　　　　戴 安 英
（中国科学院高能物理研究所，北京）　　（北京工业学院）

摘　　要

径向方程的哈密顿量定义在半直线上，它的厄米性与波函数在原点的边界条件有密切关系．当波函数在原点不趋于零亦不发散时，哈密顿量厄米性的要求等价于原点径向几率流为零的条件，而且其中包含一个待定常数．本文系统讨论径向方程哈密顿量厄米性问题，并对费米子在磁单极场中运动问题，讨论了各种确定待定常数的方法及其意义．

一、引　　言

定义在半直线上的算符，它的厄米性和波函数的边界条件有直接关系．径向方程的哈密顿量定义在$[0, \infty)$的半直线上，当波函数在原点不趋于零亦不发散时，哈密顿量的厄米性，以及由此而来的能量本征函数间的正交性，决定于波函数在原点的边界条件．这问题在数学上已有清楚的了解[1]，用 Weyl-von Neumann 的术语说，这样的哈密顿量是在原点极限圈型 (limit circle type)，在无穷远极限点型的 (limit point type)，哈密顿量存在一个参数族的自共轭推广[1-3]． 近十年来随着对费米子在磁单极场和强库仑场中运动问题的研究，物理学家也开始对这问题发生兴趣．从物理观点看，哈密顿量必须是厄米的，同时不允许存在一个不确定的任意参数．

Kazama-Yang-Goldhaber 最早讨论这待定常数的确定问题[4]．因为磁单极场在原点存在 Lipkin-Weisberger-Peshkin[5] 困难，他们引入一个无穷小的附加磁矩，让费米子波函数在原点趋于零．这方法的实质是引入一项只在原点附近起作用的附加作用势，从而选定了上述待定常数．戴显熹和倪光炯[6]指出，当波函数在原点不为零时，哈密顿量厄米性与波函数在原点径向几率流为零有关．他们引入“正交-变分原则”来确定这待定常数，但是他们并没有把这变分原则贯彻到底，而是用手放的零能解条件来代替，从而得到与 Kazama-Yang-Goldhaber 相同的结果．Yamagishi 进一步讨论了费米子在磁单极场中的运动[7]，指出这待定参数与真空分数电荷有关，磁单极实际变成了双子，并用 Witten[8] 公式把这待定参数与 θ 真空参数联系起来．磁单极子在实验上尚未肯定发现，θ 真空参数也没有实验测定，上述两种确定待定参数的方法有待将来的实验检验．

本文试图系统讨论径向方程哈密顿量的厄米性问题，从物理角度研究待定参数的由

本文 1986 年 11 月 5 日收到．

来和意义．在具体讨论费米子与磁单极场的相互作用体系时，用非阿贝尔规范场中全空间解析的磁单极场中的费米子解来作比较，说明这待定参数的意义，比较各种确定待定参数的方法．

本文作如下安排．第二节就 Schrödinger 径向方程问题说明待定参数的来源，奇性哈密顿量自共轭推广的方法．第三节讨论费米子在磁单极场中运动问题，介绍数学上哈密顿量自共轭推广的一般方法和物理上确定待定参数的各种方法，提出一种新的确定参数的方法．第四节与在 $SU(5)$ 大统一模型基本磁单极解中费米子运动问题相比较，说明这待定参数的意义．

另一个与哈密顿量厄米性有关的感兴趣的物理问题是强库仑场中费米子能级问题，由于它的复杂性，我们将在另文讨论．

二、Schrödinger 径向方程哈密顿量厄米性

哈密顿量厄米性与边界条件的关系，实际上在 Schrödinger 径向方程中已存在，只是它并未引起足够的兴趣．

Schrödinger 径向方程 ($\hbar = c = 2m = 1$) 为

$$u'' + \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = 0 \tag{1}$$

这里假设球对称势函数 $V(r)$ 在原点和无穷远足够快地趋于零．哈密顿量的厄米性定义为

$$\int u_1^* H u_2 dr - \int (Hu_1)^* u_2 dr = 0 \tag{2}$$

对哈密顿量的本征函数有

$$(E_2 - E_1)\int u_1^* u_2 dr = 0 \tag{3}$$

H 厄米性保证了能量本征函数的正交性．对于径向方程(1)，取实数解，(2)式左边经过分部积分，哈密顿量厄米性条件化为

$$(u_1u_2' - u_1'u_2)\big|_0^\infty = 0 \tag{4}$$

对 $E<0$，波函数在无穷远趋于零，对 $E>0$ 而能量不相同时，波函数在无穷远处迅速振荡平均为零，对 $E>0$ 相同能量的两组解，Wronskian 保证(4)式左侧为零．因此哈密顿量厄米性条件又化为

$$(u_1u_2' - u_1'u_2)\big|_{r=0} = \left[u_1u_2\left(\frac{u_2'}{u_2} - \frac{u_1'}{u_1}\right)\right]_{r=0} = 0 \tag{5}$$

对 $l \geqslant 1$，取原点收敛解，$u(r)|_{r\to 0} \sim r^{l+1} \sim 0$，(5) 式成立．对 S 波，两组解在原点都不发散，通解在原点趋于有限常数．u 在原点有限使总波函数在原点发散，但原点附近小体积内的几率仍是有限的．对此情况，哈密顿量厄米性条件化为波函数在原点对数微商是与能量无关的常数

$$u'/u\big|_{r=0} = \text{const.} \tag{6}$$

它也是能量本征函数互相正交的条件．

取两本征函数的复线性组合，$u = c_1u_1 + c_2u_2$，在原点的径向几率流正比于

$$-i[u^*u' - u^{*\prime}u]_{r=0} = (I_m c_1^* c_2)[u_1u_2' - u_2u_1']_{r=0} \tag{7}$$

可见，当波函数 u 在原点不为零但有限时，哈密顿量厄米性条件(5)等价于波函数在原点径向几率流为零的条件.

数学上，(6)式称为奇性哈密顿量含一个参数的厄米性推广. 常数选择的不同会使散射态相移和束缚态能级不同，后者是可以通过实验测定的量，因此物理上是不允许任意常数存在的. 通常的选择是让波函数在原点趋于零，即(6)式的常数趋于无穷大. 这种选择可通过如下物理模型来实现. 设想 S 波的角动量是趋于零而不是严格等于零，这相当于存在一项附加的离心势能 $\varepsilon(\varepsilon+1)/r^2$，$\varepsilon>0$ 但为无穷小量. 这项离心势能在有限的 r 值可以忽略不计，仅当 $r\sim 0$ 附近才有重要贡献，它使一组解在原点发散，而另一组收敛解在原点趋于零. 这种物理模型实际上是 Kazama-Yang-Goldhaber[4] 引入无穷小反常磁矩思想的一种应用.

与磁单极问题不同，这种模型是容易得到实验鉴别的. 此外，Schrödinger 方程还有其本身的特点. 径向方程(1)来自三维的 Schrödinger 方程

$$\nabla^2\psi + [E - V(r)]\psi = 0 \tag{8}$$

$$\psi = \frac{1}{r}u_l(r)Y_m^l(\theta,\varphi) \tag{9}$$

在原点 $u(r)\sim \text{const.}$，代入(8)式得 δ 函数

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{10}$$

从 Schrödinger 方程的观点看，因为方程(8)在原点没有 δ 函数的势，原点趋于常数的 $u(r)$ 解应该排除. 而从数学观点看，作为径向方程(1)的解，原点趋于常数的解似乎可以保留.

三、费米子在磁单极场中的运动

如果 Dirac 方程球对称势 $V(r)$ 在原点有良好渐近形式，波函数在原点趋于零，不存在哈密顿量奇性问题. 但讨论费米子在磁单极场或强库仑场中运动，原点又产生奇性问题，哈密顿量厄米性与波函数在原点边界条件有关. 本文讨论磁单极场的情况，强库仑场问题留待另文讨论.

费米子在磁单极场中运动的 Dirac 方程为

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{W}) + \beta M]\psi = E\psi \tag{11}$$

取吴-杨 $U(1)$ 磁单极解[9]，引入区域规范[10]，对应最小角动量 $j=0$ 的态，波函数在原点可能不趋于零. 令

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} if(r) & \eta(\theta,\varphi) \\ g(r) & \eta(\theta,\varphi)\end{pmatrix},\quad \eta(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Y_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \\ Y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\end{pmatrix} \tag{12}$$

其中 Y 是磁单极谐和函数[10]. 径向方程为

$$f' = -(E+M)g,\quad g' = (E-M)f \tag{13}$$

在 $|E|>M$ 时得到散射解

$$f=\sqrt{E+M}\sin(kr+\delta_0),\quad g=-\sqrt{E-M}\cos(kr+\delta_0),\quad E>M$$
$$f=\sqrt{|E|-M}\sin(kr+\delta_0),\quad g=\sqrt{|E|+M}\cos(kr+\delta_0),\quad E<-M \tag{14}$$

f 和 g 在原点趋于常数，使 ϕ 在原点发散且不单值，但在原点附近小体积内几率是有限和确定的．哈密顿量厄米性条件为

$$\int \phi_1^+ H\phi_2(d^3x)-\int (H\phi_1)^+\phi_2(d^3x)$$
$$=(f_1^*g_2-g_1^*f_2)|_0^\infty=\left[g_1g_2\left(\frac{f_1}{g_1}-\frac{f_2}{g_2}\right)\right]_{r=0} \tag{15}$$

与 Schrödinger 方程情形一样，右侧在无穷远处贡献为零．当波函数 f 和 g 在原点不趋于零但有限时，哈密顿量的厄米性条件是

$$\left.\frac{f}{g}\right|_{r=0}=\text{const.} \tag{16}$$

它的物理意义还是保证波函数在原点径向几率流为零． 因为对波函数的复组合，$\phi=c_1\phi_1+c_2\phi_2$，原点径向几率流正比于

$$-i(f^*g-g^*f)|_{r=0}=(I_m c_1^*c_2)\left[g_1g_2\left(\frac{f_1}{g_1^*}-\frac{f_2}{g_2}\right)\right]_{r=0} \tag{17}$$

条件(16)同时保证能量本征函数互相正交．常数(16)选取的不同会使散射态相移和束缚态能级不同．

数学上，按照 Weyl-von Neumann 的术语[1]，这样的哈密顿量称为原点极限圈型和无穷远极限点型算符，它存在 $\pm iM$ 的本征解，解在原点有限：

$$f_\pm=Me^{\pm i\pi/8}e^{-\sqrt{2}r},\quad g_\pm=Me^{\mp i\pi/8}e^{-\sqrt{2}r},\quad E=\pm iM \tag{18}$$

存在的 $E=\pm iM$ 独立解数目称为缺陷指数[2] (deficiency indices) (m_+,m_-)，在现在情况 $m_+=m_-=1$．按照数学上的一般处理方法[2]，引入实参数 θ，使

$$\left.\frac{f}{g}\right|_{r=0}=\left.\frac{e^{i\theta}f_++e^{-i\theta}f_-}{e^{i\theta}g_++e^{-i\theta}g_-}\right|_{r=0} \tag{19}$$

具体以(18)式代入，相当(16)式常数取

$$C=\frac{\cos(\theta+\pi/8)}{\cos(\theta-\pi/8)}=\frac{1}{\sqrt{2}}[1-\tan(\theta-\pi/8)] \tag{20}$$

即 C 可取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的任何数值．

对于给定的 C，以(14)式代入，定出相移是能量函数

$$\tan\delta_0=\begin{cases}-C\sqrt{\dfrac{E-M}{E+M}} & E>M\\[2ex] C\sqrt{\dfrac{|E|+M}{|E|-M}} & E<-M\end{cases} \tag{21}$$

对 $|E|<M$，(13) 式有解

$$f=\sqrt{M+E}\,e^{-\sqrt{M^2-E^2}r},\quad g=\sqrt{M-E}\,e^{-\sqrt{M^2-E^2}r} \tag{22}$$

束缚态能级满足

$$\sqrt{\frac{M+E}{M-E}}=C \tag{23}$$

Kazama-Yang-Goldhaber 引入无穷小附加磁矩[4]

$$\frac{Ze}{2M}(1+\kappa), \quad |\kappa| \ll 1 \tag{24}$$

相当引入附加哈密顿量

$$H_{附}=-\kappa q\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}(2Mr^3)^{-1} \tag{25}$$

它在 r 有限区域可以忽略不计，而在原点附近有重要贡献，它选定(16)式的常数为[4]

$$\left.\frac{f}{g}\right|_{r\to 0+}=-\frac{\kappa q}{|\kappa q|}=C \tag{26}$$

由(23)式，当 $C=1$ 有零能解，$C=-1$ 则不存在束缚态解[11].

戴显熹和倪光炯[6]引入“正交-变分原理”. 要求本征函数正交，就是要求条件(16)式；按照他们的变分原理，“真正的物理基态是所有态中能量最低的态”[6]，则由(23)式明显得到极值在 $E=\pm M$. 由于方程(13)的具体形式，$E=\pm M$ 的解不是束缚的. 文献[6]规定最低能量是 $E=0$，从而得到 $C=1$，与文献[4]结果一致. 这样的手放条件显得有些勉强.

Yamagishi[7] 发现(16)式常数 C 与真空分数电荷有关，从而通过 Witten 公式[8]与 θ 真空参数联系起来. 这当然是一种可以接受的物理条件，尽管结果与文献[4]和[6]不同.

如果模仿 Schrödinger 方程的情况，引入无穷小的赝标量耦合[12]

$$H_{附}=i\frac{\varepsilon}{r}\gamma_5 \tag{27}$$

它仅在原点附近有明显作用. 径向方程(13)变为

$$f'-\frac{\varepsilon}{r}f=-(E+M)g, \quad g'+\frac{\varepsilon}{r}g=(E-M)f \tag{28}$$

这相当引入小角动量，即 Dirac 方程与角动量有关的参数 $\kappa=\mp\left(j+\frac{1}{2}\right)$，现在变成

$$\kappa=-\varepsilon \tag{29}$$

从而选定了

$$C=\begin{cases}0 & \varepsilon<0\\ \infty & \varepsilon>0\end{cases} \tag{30}$$

由(23)式知，不存在束缚态.

四种定常数的方法得到三种不同的结果，孰是孰非将最后由实验鉴别.

四、费米子在非阿贝尔磁单极场中的运动

1974 年 'tHooft 和 Polyakov[13] 找到 $SU(2)$ 规范场中全空间解析的能量有限的磁单极解，把它嵌入物理模型——$SU(5)$ 大统一模型中去，得到 $SU(5)$ 基本磁单极解. 费米子在解析的磁单极场中运动，Dirac 方程可以精确求解[14]. 在磁单极壳外，基本解等同于吴-杨[9]解，取阿贝尔规范，Dirac 方程化为 Kazama-Yang-Goldhaber 所讨论的方程.

通常认为 $U(1)$ 磁单极解是非阿贝尔磁单极解在磁单极壳外的近似形式．基于这种观点，希望通过费米子在非阿贝尔磁单极场中的运动来研究(16)式常数的意义．

费米子在 $SU(5)$ 基本磁单极场中运动的 Dirac 方程为

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla}-e\boldsymbol{W})+\beta M]\psi=E\psi \tag{31}$$

在 Prasad-Sommerfield[15] 极限下，磁单极解为

$$\boldsymbol{W}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\wedge\boldsymbol{\tau}}{2er}[1-v(r)],\quad v(r)=\frac{M_m r}{\sinh M_m r} \tag{32}$$

其中 M_m 为磁单极质量，$M_m\gg M$，$\boldsymbol{\tau}$ 为同位旋 Pauli 矩阵．对最低角动量态，$j=0$[15]，

$$\begin{gathered}\psi(x)_a=\sum_{a'=\pm\frac{1}{2}}\mathscr{D}^{1/2}_{aa'}(R_\delta^{-1})\frac{1}{r}\begin{pmatrix}i\ f^{(2)}_{a'}\phi^{(2)}_{a'}(R_\delta)\\ g^{(2)}_{a'}\phi^{(2)}_{a'}(R_\delta)\end{pmatrix}\\ \phi^{(2)}_a(R_\delta)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix}-\mathscr{D}^{1/2}_{a,-1/2}\ (R_\delta)\\ \mathscr{D}^{1/2}_{a,1/2}\ (R_\delta)\end{pmatrix},\quad R_\delta=R(\varphi,\theta,\delta)\end{gathered} \tag{33}$$

$\psi(x)$ 实际上与 δ 角无关．过渡到 Abel 规范

$$f^{(2)}_a=f_a,\quad g^{(2)}_a=\pm g_a,\quad a=\pm\frac{1}{2} \tag{34}$$

右侧就是 Kazama-Yang-Goldhaber 解，这里标上了同位旋指标．

适当组合 $f^{(2)}_a$ 和 $g^{(2)}_a$，

$$\begin{aligned}F_1&=f^{(2)}_{1/2}+f^{(2)}_{-1/2},\quad G_1=g^{(2)}_{1/2}-g^{(2)}_{-1/2}\\ F_2&=f^{(2)}_{1/2}-f^{(2)}_{-1/2},\quad G_2=g^{(2)}_{1/2}+g^{(2)}_{-1/2}\end{aligned} \tag{35}$$

它们分别满足分离的两组方程，得到精确解[14]如下：

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\sqrt{E+M}\left[\frac{2k}{M_m}\sin kr+\tanh\frac{M_m r}{2}\cos kr\right]\\ G_1&=\sqrt{E-M}\left[-\frac{2k}{M_m}\cos kr+\coth\frac{M_m r}{2}\sin kr\right]\\ F_2&=\sqrt{E+M}\left[-\frac{2k}{M_m}\cos kr+\coth\frac{M_m r}{2}\sin kr\right]\\ G_2&=-\sqrt{E-M}\left[\frac{2k}{M_m}\sin kr+\tanh\frac{M_m r}{2}\cos kr\right]\end{aligned}\right\}\quad E>M \tag{36}$$

在磁单极壳外但足够小的 r 处

$$\frac{1}{M_m}\ll r\ll\frac{1}{M},\ \frac{1}{k} \tag{37}$$

取两组独立解的任意线性组合

$$\begin{aligned}F_1&\sim\sin\delta_0\sqrt{E+M}\cos kr,\quad G_1\sim\sin\delta_0\sqrt{E-M}\sin kr\\ F_2&\sim\cos\delta_0\sqrt{E+M}\sin kr,\quad G_2\sim-\cos\delta_0\sqrt{E-M}\cos kr\end{aligned} \tag{38}$$

代回(34)和(35)式

$$\left.\begin{aligned}f_{\frac{1}{2}}&=\sqrt{E+M}\sin(kr+\delta_0),\quad g_{\frac{1}{2}}=-\sqrt{E-M}\cos(kr+\delta_0)\\ f_{-\frac{1}{2}}&=-\sqrt{E+M}\sin(kr-\delta_0),\quad g_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{E-M}\cos(kr-\delta_0)\end{aligned}\right\}\quad E>M \tag{39}$$

这正是(14)式型的解，但是两种同位旋态是相关连的，这种关连性保证了哈密顿量的厄米性．用下标(1)和(2)表两组不同能量的解，(15)式化为

$$[f^*_{(1)\frac{1}{2}}g_{(2)\frac{1}{2}} - g^*_{(1)\frac{1}{2}}f_{(2)\frac{1}{2}} + f^*_{(1)-\frac{1}{2}}g_{(2)-\frac{1}{2}} - g^*_{(1)-\frac{1}{2}}f_{(2)-\frac{1}{2}}]_{r=0} = 0 \tag{40}$$

以(39)式代入,(40)式自然满足，哈密顿量是厄米的，不需要附加 δ_0 与能量无关的条件(16). 注意费米子在纯 $SU(5)$ 基本磁单极场中不存在束缚态[14,16].

总结起来,定义在半直线上的算符厄米性问题与波函数边界条件有关,把算符作自共轭推广需引入一个参数. 物理上,选定参数保证了哈密顿量厄米性,保证能量本征函数正交,保证在原点径向几率流为零. 但是,参数的不同选择，使散射相移和束缚态能级都不同,这在物理上是不能接受的,其物理实质是漏掉了某个目前尚不了解的物理条件，看起来这物理条件与点源假定有关. 在磁单极问题中，通过扩大自由度(引入同位旋)可以克服这一困难. 费米子在强库仑场中运动问题中同样存在这一困难.

作者感谢倪光炯、汪荣泰、许伯威、戴显熹等教授的有益的讨论.

附　　注

最近见到倪光炯等人的预印本 (G. J. Ni and Y. Cen, On the electric charge of Dirac dyon, 即将在 Phys. Lett. B. 发表),对他们的思想有新的发展.

参　考　文　献

[1] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics-Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness, subsect. 10.1 (New York, N. Y., 1975).

[2] C. Burnap, H. Brysk and P. F. Zweifel, *Nuovo Cimento*, **64B**(1981), 407.

[3] A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 1815; C. J. Callias, *ibid*, **D16**(1977), 3068.

[4] Y. Kazama, C. N. Yang and A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2287.

[5] H. J. Lipkin, W. I. Weisberger and M. Peshkin, *Ann. Phys.* (N. Y.) **53**(1969), 203.

[6] 戴显熹和倪光炯，高能物理与核物理，**2**(1978)，225.

[7] H. Yamagishi, *Phys. Rev.*, **D27**(1983), 2383.

[8] E. Witten, *Phys. Lett.*, **86B**(1979), 283; F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1146.

[9] T. T. Wu and C. N. Yang, Properties of Matter under Unusual Conditions, Ed. H. Mark and S. Fernbach, 1969 (New York: Interscience) p. 344.

[10] T. T. Wu and C. N. Yang, *Nucl. Phys.*, **B107**(1976), 365.

[11] Y. Kazama and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2300.

[12] 作者感谢倪光炯、汪荣泰教授在 1986 年大连会议上有启发性的讨论.

[13] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79**(1974), 276; A. M. Polyakov, *JETP Lett.*, **20**(1974), 194.

[14] W. J. Marciano and I. J. Muzinich, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1035; Z. Q. Ma, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 2203.

[15] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 760.

[16] T. F. Walsh, P. Weisz and T. T. Wu, *Nucl. Phys.*,**B332**(1984), 349.

ON THE HERMITIAN OF THE HAMILTONIAN OF RADIAL EQUATION

MA ZHONG-QI

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing*)

DAI AN-YING

(*Institute of Industry of Beijing*)

ABSTRACT

The Hamiltonian of a radial equation is defined on a half-line, and there is a close relation between its hermitian and the boundary condition of the wave functions at the origin. If the wave functions are nonvanishing and convergent at the origin, the Hamiltonian has a one-parameter family of self-adjoint extensions which are related with the vanishness of the radial probability current at the origin. In this paper the problem on the hermitian of the Hamiltonian of a radial equation is studied systematically. Some methods for determining the parameter for the fermion moving in the magnetic monopole field are discussed.