第12卷 第2期 高能物理与核物理 Vol.12, No.2
1988年3月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 1988

快报

6维纯 Kaluza-Klein 理论的孤子背景中的费米子场方程*

张广元 蔡唯成 李新洲
(复旦大学,上海)

摘 要

由于偶数维与奇数维时空中的旋量差别很大,在偶数维与奇数维纯 Kaluza-Klein 理论的孤子背景中的费米子动力学性质有本质差异.本文讨论了费米子在6维纯 Kaluza-Klein 理论的孤子背景中运动方程导出的一般方法,并以球对称孤子示例.中性无质量费米子方程能完全退耦,并与在 Schwarzschild 黑洞情形时零四元组形式所得到的方程一致.

Gross-Perry[1] 和 Sorkin[2] 首先发现了5维 Kaluza-Klein 的孤子解. 新近,我们已得到了 $(4+k)$ 维阿贝尔理论(即纯 Kaluza-Klein 理论)中的孤子解[3]. 特别地,我们得到了最一般的6维球对称磁单极解. 我们还发现,在6维阿贝尔磁单极几何中的费米子动力学性质与4维或5维理论均有本质差异[4]. 在6维理论中,Dirac 波函数在 $r=0$ 带有奇性,但是并不存在 Rubakov 效应. 另一方面,引力场与费米子的相互作用,已经有了相当多的研究. Brill 和 Wheeler[5] 在球对称背景时空中分离了 Dirac 方程,Chandrasekhar[6] 在 Kerr 几何中,Page 和 Güven[7] 在 Kerr-Newman 几何中分离了 Dirac 方程. Soh 和 Pac[8] 研究了5维 Kaluza-Klein 孤子解背景中费米子的场方程. 综合上述二个方面,在本文中我们给出了6维孤子背景中费米子场方程导出的一般方法,这是对我们在文献[4]中讨论的推广. 利用 Clifford 代数和 $SO(5,1)$ 的旋表示,我们构造了6维弯曲时空中费米子场方程所需的自旋联络1形式,并在球对称孤子情况下给出中性和荷电费米子场方程. 中性无质量费米子方程能退耦成常微分方程,并与 Schwarzschild 黑洞情形时的 Teukolsky[9] 和 Bose[10] 方程一致,后者是用零四元组形式导出的.

本文符号与文献[4]一致. 度规 $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ 的号差是 $-+++++$,$x^{\hat{\mu}}=(x^{\mu}, y^{i})$,$\mu=0,1,2,3$; $i=1,2$. 作用量为

$$S=S_G+S_F,$$

$$S_G=-\frac{1}{16\pi G_6}\int d^6x\sqrt{-g_6}\;R_6 \tag{1}$$

* 国家自然科学基金资助课题.
本文1987年7月2日收到.

$$S_F = i\int d^6x\sqrt{-g_6}\,\bar{\psi}\gamma^{\hat{c}}e^{\hat{\mu}}_{\hat{c}}(\partial_{\hat{\mu}} - \omega_{\hat{\mu}})\psi,$$

其中 $\gamma^{\hat{c}}$ 是平坦空间的 6 维 Dirac 矩阵，$\omega_{\hat{\mu}}$ 是自旋联络 1 形式，$e^{\hat{\mu}}_{\hat{c}}$ 是标架场. 真空几何是 $M^4\otimes S^1_{(1)}\otimes S^1_{(2)}$，其中 M^4 是 4 维 Minkowski 空间，$S^1_{(i)}$ 是半径为 R_i 的圆周[3]. 度规 $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ 和费米子场 ψ 是周期为 $2\pi R_i$ 的 y_i 的周期函数，

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x,\ y) = \sum_{n_1,n_2} g^{(n_1,n_2)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x)\exp[i(n_1y^1/R_1 + n_2y^2/R_2)],$$

$$\psi(x,\ y) = \sum_{n_1,n_2}\psi^{(n_1,n_2)}(x)\exp[i(n_1y^1/R_1 + n_2y^2/R_2)], \tag{2}$$

其中 $n_1, n_2 = 1, 2, 3, \cdots$. 下面我们用新的记号表述 $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$，

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + V(dy^1 + A_\mu dx^\mu)^2 + (dy^2)^2. \tag{3}$$

利用关系式

$$\eta_{\hat{a}\hat{b}}e^{\hat{a}}_{\hat{\mu}}e^{\hat{b}}_{\hat{\nu}} = g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \tag{4}$$

可导出标架场表式为

$$e^{\hat{\mu}}_{\hat{c}} = \begin{bmatrix} e_\mu{}^c & 0 & 0 \\ -A_\mu e_\mu{}^c & \dfrac{1}{\sqrt{V}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

对作用量(1)作标度变换 $g_{\mu\nu}\to V^{-\frac{1}{3}}g_{\mu\nu}$，$V\to V^{-\frac{1}{3}}V$ 和 $\psi\to V^{\frac{1}{12}}\psi$，可得

$$\begin{aligned} S = \frac{-1}{16\pi G_4}\int d^4x\sqrt{-g_4}\left(R_4 + \frac{1}{6}g^{\mu\nu}\cdot\frac{\partial_\mu V\partial_\mu V}{V} + \frac{1}{4}V^{\frac{1}{3}}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \\ + i\int d^4x\sqrt{-g_4}\left[\bar{\psi}\gamma^c e_\mu{}^c\left(\partial_\mu - \omega'_\mu - A_\mu\frac{in_1}{R_1} + A_\mu\omega'_5\right)\right]\psi \\ + \bar{\psi}\gamma^5\left(\frac{in_1}{R_1} - \omega'_5\right)\frac{1}{\sqrt{V}}\psi + \bar{\psi}\gamma^6\left(\frac{in_2}{R_2} - \omega'_6\right)\psi\Big], \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，$\omega'$ 是重新标度后的 ω 的表式. 为了得到 ω 和 ω' 的形式，在正交标架下利用关系式 $\theta^{\hat{c}} = e^{\hat{c}}_{\hat{\mu}}dx^{\hat{\mu}}, d\theta^{\hat{c}} = -\Gamma^{\hat{c}}_{\hat{b}}\Lambda\theta^{\hat{b}}$ 以及 $\Gamma_{\hat{c}\hat{b}} + \Gamma_{\hat{b}\hat{c}} = 0$ 计算，可以得到联络 1 形式 Γ. 由于进行了上述标度变换，Γ 应变换成 Γ'，

$$\Gamma'^{\hat{c}}_{\hat{b}} = \Gamma^{\hat{c}}_{\hat{b}} - (f'^{\hat{c}}\theta_{\hat{b}} - f'_{\hat{b}}\theta^{\hat{c}}), \tag{7}$$

其中 $f'_{\hat{c}} = e^{\hat{\mu}}_{\hat{c}}\partial_{\hat{\mu}}(\ln V^{-\frac{1}{6}})$. 如将联络 Γ' 看作是 $SO(5,1)$ 李代数值 1 形式，可以直接构造出 ω'.

作为上述一般形式的应用，我们考虑 6 维球对称度规[1,3]

$$\begin{aligned} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}dx^{\hat{\mu}}dx^{\hat{\nu}} = -\left[\frac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{m}{r}}\right]^{\frac{2}{\alpha}}(dt)^2 + \left[1+\frac{m}{r}\right]^4\left[\frac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{m}{r}}\right]^{2(\alpha-\beta-1)/\alpha} \\ + \left[\frac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{m}{r}}\right]^{\frac{2\beta}{\alpha}}(dy^1)^2 + (dy^2)^2, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\alpha = \left(\beta^2 + \beta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，当 $\alpha = \beta = \infty$ 时(8)是孤子解，当 $\alpha = 1, \beta = 0$ 时 $r = m$ 有

Schwarzschild 奇性．1 形式 $\theta'^{\hat{c}}$ 是

$$\theta'^{\hat{t}} = g_{tt}^{\frac{1}{2}}\, g_{55}^{-\frac{1}{6}} dt,\quad \theta'^{\hat{r}} = g_{rr}^{\frac{1}{2}}\, g_{55}^{-\frac{1}{6}}\, dr,\quad \theta'^{\hat{\theta}} = g_{rr}^{\frac{1}{2}}\, g_{55}^{-\frac{1}{6}}\, r d\theta,$$
$$\theta'^{\hat{\phi}} = g_{rr}^{\frac{1}{2}}\, g_{55}^{-\frac{1}{6}}\, r\sin\theta d\phi,\quad \theta'^{\hat{5}} = g_{55}^{\frac{2}{3}}\, dy^1,\quad \theta'^{\hat{6}} = g_{55}^{-\frac{1}{3}} dy^2. \tag{9}$$

通过直接计算可得联络 1 形式 Γ'，

$$\Gamma' = a_0\theta^{\hat{t}}L^{\hat{t}\hat{r}} + a_1\theta^{\hat{\theta}}L^{\hat{r}\hat{\theta}} + a_1\theta^{\hat{\phi}}L^{\hat{r}\hat{\phi}} + a_2\theta^{\hat{\phi}}L^{\hat{\theta}\hat{\phi}} + a_3\theta^{\hat{5}}L^{\hat{5}\hat{5}} + a_4\theta^{\hat{6}}L^{\hat{6}\hat{6}}, \tag{10}$$

其中 $L^{\hat{c}\hat{b}}$ 是 $SO(5,1)$ 的生成元，而

$$a_0 = (g_{tt}g_{rr})^{-\frac{1}{2}}(dg_{tt}^{\frac{1}{2}}/dr) - \frac{1}{3}(g_{rr}g_{55})^{-\frac{1}{2}}(dg_{55}^{\frac{1}{2}}/dr),$$
$$a_1 = r^{-2}g_{rr}^{-\frac{1}{2}} + r^{-1}\, g_{rr}^{-1}(dg_{rr}^{\frac{1}{2}}/dr) - \frac{1}{3}(g_{rr}g_{55})^{-\frac{1}{2}}(dg_{55}^{\frac{1}{2}}/dr), \tag{11}$$
$$a_2 = (rg_{rr}^{\frac{1}{2}})^{-1}\cot\theta,\quad a_3 = \frac{2}{3}(g_{rr}g_{55})^{-\frac{1}{2}}(dg_{55}^{\frac{1}{2}}/dr),$$
$$a_4 = \frac{1}{3}(g_{rr}g_{55})^{-\frac{1}{2}}(dg_{55}^{\frac{1}{2}}/dr).$$

我们可以利用 M^6 多重矢集[4,11]构成 Clifford 代数 C_6，一个 M^6 旋量是一个 S_8 的 8 分量矢量．特别地，对应于 M^6 的正交矢量基 $e_0, e_1, \cdots, e_3, e_5, e_6$ 是 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma^3, \gamma^5, \gamma^6$，其中 $\gamma^{\hat{c}}$ 是 8×8 矩阵，且有 $\{\gamma^{\hat{c}}, \gamma^{\hat{b}}\} = 2\eta^{\hat{c}\hat{b}}$．让我们取 Dirac 类型基，那末

$$\gamma^t = \begin{bmatrix} 0 & -I & & \\ I & 0 & & \\ & & 0 & -I \\ & & I & 0 \end{bmatrix},\quad \gamma^r = \begin{bmatrix} -\sigma_3 & 0 & & \\ 0 & \sigma_3 & & \\ & & -\sigma_3 & 0 \\ & & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix},$$
$$\gamma^\theta = \begin{bmatrix} -\sigma_1 & 0 & & \\ 0 & \sigma_1 & & \\ & & -\sigma_1 & 0 \\ & & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix},\quad \gamma^\phi = \begin{bmatrix} -\sigma_2 & 0 & & \\ 0 & \sigma_2 & & \\ & & -\sigma_2 & 0 \\ & & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix},$$
$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} & & 0 & -I \\ & & -I & 0 \\ 0 & -I & & \\ -I & 0 & & \end{bmatrix},\quad \gamma^6 = \begin{bmatrix} & & 0 & iI \\ & & iI & 0 \\ 0 & -iI & & \\ -iI & 0 & & \end{bmatrix}, \tag{12}$$

并设 $\tilde{\psi} = (g, f, h, j)$．利用 $\gamma^{\hat{c}}$矩阵，构造 $SO(5,1)$ 李代数的生成元 $\Sigma^{\hat{c}\hat{b}} = \frac{1}{2i}[\gamma^{\hat{c}}, \gamma^{\hat{b}}]$，它给出李代数的旋表示．那末，旋量联络 1 形式 ω' 为

$$\omega' = \frac{i}{2}\,(a_0\hat{\theta}^t\Sigma^{\hat{t}\hat{r}} + a_1\theta^{\hat{\theta}}\Sigma^{\hat{r}\hat{\phi}} + a_1\theta^{\hat{\phi}}\Sigma^{\hat{r}\hat{\phi}} + a_2\theta^{\hat{\phi}}\Sigma^{\hat{\theta}\hat{\phi}}$$
$$+ a_3\theta^{\hat{5}}\Sigma^{\hat{5}} + a_4\theta^{\hat{6}}\Sigma^{\hat{r}\hat{6}}). \tag{13}$$

Φ的场方程为

$$-g_{tt}^{-\frac{1}{2}}\partial_t g - uf - vj = 0,$$
$$g_{tt}^{-\frac{1}{2}}\partial_t f + uf - vh = 0,$$

$$
-g_{tt}^{-\frac{1}{2}}\partial_t j - uh - vg = 0,
$$
$$
g_{tt}^{-\frac{1}{2}}\partial_t h + u_j - vf = 0, \tag{14}
$$

其中 $u = g_{rr}^{-\frac{1}{2}}\sigma_2\partial_r + \gamma^{-1}g_{rr}^{-\frac{1}{2}}\sigma_1\partial_\theta + (r\sin\theta)^{-1}g_{rr}^{-1}\sigma_2\partial_\phi + \left[\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{12}g_{55}^{-\frac{1}{2}}\right.$ $\left.\times\ (dg_{55}^{\frac{1}{2}}/dr)\right]\sigma_3 + \frac{1}{2}a_1\sigma_1$, $v = g_{55}^{-\frac{1}{2}}\frac{in_1}{R_1} - \frac{n_2}{R_2}$.

当 $n_1 = n_2 = 0$ 时,即当费米子是零质量中性费米子时,方程退化成 $-g_{tt}^{-\frac{1}{2}}\partial_t g - uf = 0$ 和 $g_{tt}^{\frac{1}{2}}\partial_t f - ug = 0$，另两个方程可由 $j \to g$，$h \to f$ 得到. 这些方程的区别仅在于 $g_{tt}^{-\frac{1}{2}}\partial_t$ 前面的符号. 这些方程都能完全退耦,例如对于 g 的二个分量之一 g_1 的方程为

$$
\left\{\left(\partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right)\left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right)\right.
$$
$$
\left. - \left(rg_{rr}^{\frac{1}{2}}g_{tt}^{-\frac{1}{2}}\partial_t - r\partial_r - s\right)\left(rg_{rr}^{\frac{1}{2}}g_{tt}^{-\frac{1}{2}} + r\partial_r + s\right)\right\}g_1 = 0, \tag{15}
$$

另一分量 g_2 的方程仅改变(15)式中微分算符次序,其中

$$
s = 1 + \frac{r}{2}g_{tt}^{-\frac{1}{2}}\frac{dg_{tt}^{\frac{1}{2}}}{dt} + rg_{rr}^{-\frac{1}{2}}\frac{dg_{rr}^{\frac{1}{2}}}{dr}.
$$

(15)式与在 Schwarzschild 黑洞情形时零四元组形式所得到的方程一致，它是 Teukolsky[9] 和 Bose[10] 的中微子运动方程的简单扩充.

(7)式的一个重要应用即是我们在文献[4]中通过直接计算得到的关于 6 维阿贝尔磁单极的 Rubakov 效应的讨论.

参 考 文 献

[1] D. J. Gross and M. Perry, *Nucl. Phys.*, **B226**(1983), 29.
[2] R. D. Sorkin, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983), 87.
[3] Li Xinzhou, Yu Feng and Zhang Jianzu, *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 1124.
[4] Cai Shengshan, Hu Sizhu and Li Xinzhou, *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 2523.
[5] D. R. Brill and J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, **29**(1957), 465.
[6] S. Chandrasekhar, *Proc. R. Soc. London*, **A340**(1976), 571.
[7] D. N. Page, *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 1509; R. Güven, *ibid.*, **D16**(1977), 1706.
[8] K. S. Soh and P. Y. Pac, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 544.
[9] S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.*, **185**(1973), 635.
[10] S. K. Bose, *J. Math. Phys.*, **16**(1975), 772.
[11] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Kexue Tongbao*, **29**(1984), 1307.

FERMION FIELDS IN THE SOLITON BACKGROUND OF SIX-DIMENSIONAL PURE KALUZA-KLEIN THEORIES

ZHANG GUANGYUAN　CAI WEICHENG　LI XINZHOU

(Fudan University, Shanghai)

ABSTRACT

Dirac wave functions in six-dimensional Abelian monopole geometry show a singularity around $r=0$, in contrast to the five-dimensional theory. Field equations for fermions in soliton background of a six-dimensional pure Kaluza-Klein theory are derived and illustrated by the spherically symmetric soliton case. Neutral fermion equations are decoupled into ordinary differential equations which agree with those obtained by the nulltetrad formalism in the Schwarzschild black-hole case.