

${}^6\text{Li}$ 的 $d-\alpha$ 集团态间 $E2$ 跃迁 RGM 计算分析

李盘林 赵玄 曾繁安
(中国科学院上海原子核所)

摘 要

有实验证据表明, ${}^6\text{Li}$ 核的基态和第一、三激发态主要是 $d-\alpha$ 集团结构态. 本文采用单道共振群方法 (RGM) 计算了 ${}^6\text{Li}$ 的这些集团态之间的电四极跃迁, 算得的电四极约化跃迁几率 $B(E2; E_1 \rightarrow E_0) = 21.06\text{fm}^4$, 比用含 P 态激发的双中心集团模型算得的 12.14, 13.11 和 18.14 fm^4 以及和用 LCCO 算得的 13.88 fm^4 更符合于实验值 $25.1 \pm 2.0\text{fm}^4$. 算得的 $B(E2; E_3 \rightarrow E_0) = 9.67\text{fm}^4$, 亦在实验值 $6.483 \pm 3.360\text{fm}^4$ 的误差范围内符合: 这些符合说明了所用的 RGM 波函数是比较好的.

一、引 言

在原子核内, 特别是轻核系统的一些低能态, 集团效应往往是十分重要的. 现有的实验证据表明, ${}^6\text{Li}$ 的基态和第一、三、五激发态具有明显的 $d-\alpha$ 集团结构象征 (见表 1^[1]). Suelzel 等人的研究指出^[2], ${}^6\text{Li}$ 的基态电荷半径 $r_c = 2.54(\text{fm})$, 比较之为重的核, 如 ${}^7\text{Li}$ 和 ${}^{12}\text{C}$ 等的电荷半径 (2.39 和 2.46 fm) 还大些; 还有, 实验测得 ${}^6\text{Li}$ 基态有较小的 $d-\alpha$ 集团分离能 $E_B = 1.47\text{MeV}$, 所以它的平均距离较大, 电荷展布范围也就较大. 这两点都说明 ${}^6\text{Li}$ 的基态具有典型的集团结构. 另外, Eingenbrod 由电子的非弹性散射实验测得 $B(E2; E_1 \rightarrow E_0) = 25.1 \pm 2.0(\text{fm}^4)$ ^[3] 远比单粒子跃迁理论的结果 $\sim 3(\text{fm}^4)$ 大得多, 这又进一步表明, 对涉及集团结构态的现象应当用集团模型来处理.

表 1 ${}^6\text{Li}$ 的低能级特性^[1]

E_x (MeV \pm keV)	$J^\pi; T$	Γ_{CM} (keV)	Decay
g. s.	1 ⁺ ; 0		Stable
2.185 \pm 3	3 ⁺ ; 0	26	γ, d, α
3.56289 \pm 0.10	0 ⁺ ; 1	<5	γ
4.31 \pm 30	2 ⁺ ; 0	1700 \pm 200	γ, d, α
5.366 \pm 15	2 ⁺ ; 1	540 \pm 20	γ
5.65 \pm 50	1 ⁺ ; 0	+600 1000 -400	d, α

我们知道,共振群方法是一种能统一处理核结构和核反应的微观集团理论,对轻核的集团现象采用 RGM 来处理独具优越性,这方面的工作已经有很多作者做过,并已取得引人瞩目的成功^[4]. 本文的部分作者曾采用单道、无扭曲的 RGM 研究了 ${}^6\text{Li}$ 的基态和第一、三、五激发态的 d - α 集团结构,并得到了较满意的结果^[5]. 然而能级的计算对核力的选取有密切的关系,对模型波函数也有依赖关系,但不十分敏感. 而电子散射和电磁跃迁,对波函数的依赖则十分敏感,故跃迁几率的计算对波函数将是一个较为严格的考验. 本文用单道、无特殊扭曲的 RGM 来计算 ${}^6\text{Li}$ 的基态和第一、三激发态之间的电四极约化跃迁几率,并通过与实验和别的理论结果的比较来研究 RGM 在计算核的集团态之间的跃迁的适用性,从而考查集团态的 RGM 波函数的正确性.

二、计算步骤和公式

通常的电多极约化跃迁几率公式为^[6]

$$B(EL) = \sum_{M_f M_i} \frac{1}{2J_i + 1} \left| \langle \phi_{J_f}^{M_f} | \sum_j e_j r_j^L Y_{LM}^*(\hat{r}_j) - \sum_j \frac{ie\hbar u_j \omega}{2mc^2} \sigma_j \times \mathbf{r}_j \cdot \nabla r_j^L Y_{LM}^*(\hat{r}_j) | \phi_{J_i}^{M_i} \rangle \right|^2, \quad (1)$$

其中,第一项和第二项分别为

$$Q_{LM} \equiv \langle \phi_{J_f}^{M_f} | e r^L Y_{LM}^*(\hat{r}) | \phi_{J_i}^{M_i} \rangle \simeq e R^L,$$

$$Q'_{LM} \equiv \left\langle \phi_{J_f}^{M_f} \left| \frac{e\hbar\omega}{mc^2} \sigma \times \mathbf{r} \cdot \nabla r^L Y_{LM}^*(\hat{r}) \right| \phi_{J_i}^{M_i} \right\rangle \simeq \frac{\hbar\omega}{mc^2} e R^L.$$

由于 $Q_{LM}/Q'_{LM} \simeq \frac{mc^2}{\hbar\omega} \sim 10^3$, 所以 Q'_{LM} 相对于 Q_{LM} 而言可忽略不计,于是有

$$B(EL) = \sum_{M_f M_i} \frac{1}{2J_i + 1} \left| \left\langle \phi_{J_f}^{M_f} \left| \sum_j e_j r_j^L Y_{LM}^*(\hat{r}_j) \right| \phi_{J_i}^{M_i} \right\rangle \right|^2. \quad (1')$$

(1)和(1')式中的 $\phi_{J_i}^{M_i}$ 和 $\phi_{J_f}^{M_f}$ 分别为系统的初、末态总波函数.

由于我们所考察的能级是具有集团结构特性的,并采用 RGM 来描述,故态的总波函数和电四极跃迁算符都必须采用集团坐标表象表示.

1) 系统的总波函数

系统的总波函数可写为

$$\phi_J^M = \mathcal{A} \left\{ \phi(d)\phi(\alpha) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=|l-1|}^{l+1} \frac{1}{R} f_{jl}(R) \mathcal{Y}_{lJM}(\hat{\mathbf{R}}) \right\} Z(\mathbf{R}_{CM}), \quad (2)$$

其中 \mathcal{A} 是全反对称化算符; $\phi(d)$ 是 d 的内部波函数的空间部分,采用如下的三高斯型函数:

$$\phi(d) = \sum_{p=1}^3 A_p \exp \left[-\frac{\alpha_p}{2} \sum_{j=1}^2 (\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_d)^2 \right],$$

$$A_1 = 1.0, \quad A_2 = 3.631, \quad A_3 = 5.746,$$

$$\alpha_1 = 0.072 \text{fm}^{-2}, \quad \alpha_2 = 0.3657 \text{fm}^{-2}, \quad \alpha_3 = 1.4696 \text{fm}^{-2};$$

$\phi(\alpha)$ 是 α 的内部波函数的空间部分, 采用如下单高斯型函数:

$$\phi(\alpha) = \exp\left[-\frac{\bar{\alpha}}{2} \sum_{j=3}^6 (\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_\alpha)^2\right],$$

$$\bar{\alpha} = 0.514 \text{fm}^{-2};$$

$\mathcal{Y}_{lJM}(\hat{\mathbf{R}})$ 是归一化的自旋-同位旋-角度波函数, 可写为

$$\mathcal{Y}_{lJM}(\hat{\mathbf{R}}) = \sum_{\mu=-1}^1 C_{l,M-\mu,1,\mu}^{JM} \chi_{1\mu}(d) \chi_{00}(\alpha) Y_{l,M-\mu}(\hat{\mathbf{R}}),$$

这里的 $C_{l,M-\mu,1,\mu}^{JM}$ 是 Clebsh-Gordon 系数; $\chi_{1\mu}(d)$ 和 $\chi_{00}(\alpha)$ 分别是 d 和 α 的自旋-同位旋波函数; $Y_{l,M-\mu}(\hat{\mathbf{R}})$ 和 (2) 式中的 $\frac{1}{R} f_{Jl}(R)$ 是 d 和 α 的相对运动波函数的角度分波和径向分波, 在 RGM 中最基本的计算就是要求解 $f_{Jl}(R)$; $z(\mathbf{R}_{CM})$ 则是归一化总质心波函数, 它对我们研究的问题无关紧要, 可分离出去.

2) 径向分波满足的积分-微分方程

用波函数(2)和[5]中所用的哈密顿可推得 $f_{Jl}(R)$ 所满足的积分-微分方程

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dR^2} - \frac{l(l+1)}{R^2} \right] + E - V_N(R) - V_C(R) - V_{s.o.}(R) \right\} f_{Jl}(R) \\ = \int_0^\infty [k_l^N(R, R') + k_l^C(R, R') + \eta_{l,l} k_l^{s.o.}(R, R')] f_{Jl}(R') dR', \quad (3)$$

其中 μ 为约化质量; V_N , V_C 和 $V_{s.o.}$ 分别是直接中心势, 直接库仑势和直接自旋-轨道势; k_l^N , k_l^C 和 $k_l^{s.o.}$ 是相应的非定域交换核函数, 它们的具体表达式和参数取自文献[7]; $\eta_{l,l}$ 的取值如下: $\eta_{l+1,l} = 2l$, $\eta_{l,l} = -2$, $\eta_{l-1,l} = -2(l+1)$.

3) 电多极跃迁矩阵元和电四极约化跃迁几率.

将(1')中的 $\phi_{J_i}^{M_i}$ 和 $\phi_{J_f}^{M_f}$ 写成(2)的形式, 同时将电多极跃迁算符的表示由单粒子表象变换到 RGM 的集团表象中来, 经过冗长的推导, 可得集团表象表示的电 2^L 极约化跃迁几率 $B(EL)$. 当 $L=2$ 时, 算得的电四极约化跃迁几率为

$$B(E2) = \sum_{M_f M_i} \frac{1}{2J_i + 1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left\{ \left[\int R^2 f_{J_i M_i}(R) f_{J_i M_i}(R) dR \right. \right. \\ + \sum_{p,q=1}^3 A_p \cdot A_q \sum_{R=1}^2 (-1)^R e_R(p, q) \left[R^2 f_{J_i M_i}(R') f_{J_i M_i}(R) \right. \\ \times \exp\left[-\frac{2}{3} (a'_R R^2 + b'_R R'^2)\right] S_{l_f} \left(-\frac{2}{3} C'_R\right) dR dR' / G_0 \\ \left. \left. \times (a_1 Y_- + a_2 Y_0 + a_3 Y_+) \right\} \right\}^2 \frac{1}{B_0}, \quad (4)$$

其中各项的表达式详见附录.

三、计算结果和讨论

在束缚态边界条件下, 采用[5]中求广义特征值和特征向量的方法解方程(3), 可得

${}^6\text{Li}(d+\alpha)$ 的基态和第一、三激发态的本征能量和相应的本征波函数 $\frac{1}{R} f_{Jl}(R)$ 值, 并将相关的 $\frac{1}{R} f_{Jl}(R)$ 值代入电四极约化跃迁几率公式(4), 即可求得欲算的 $B(E2)$ 值. 本文在数值求解方程(3)进行离散化时, 对非边界域采用了二级差分近似, 在边界上则采用一级差分近似表示, 以避免在边界上出现向前差分和向后差分的未知项. 此外, 对所有的数值积分均取辛普生公式.

图(1)中画出了 ${}^6\text{Li}$ 低能级的理论计算值和实验值.

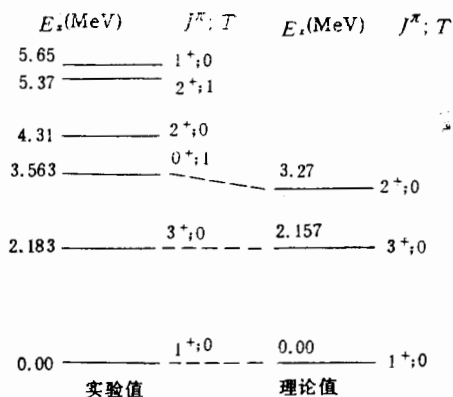


图 1 ${}^6\text{Li}$ 的能级图

计算时, 取交换混合参数 $u = 1.175$; 自旋-轨道势的深度参数 $V_1 = 100\text{MeV}$ 和力程参数 $\lambda = 1.2\text{fm}^{-2}$, 这样计算得到的 ${}^6\text{Li}$ 基态的 d 和 α 的分离能 $E_B = 1.43\text{MeV}$, 与实验值 1.47MeV 符合甚好. 由图 1 可见, 计算的能级的 ($J^\pi; T$) 与实验完全一致; 理论能级的位置也与实验符合尚好, 只是第三激发态的位置较实验值偏低约 1MeV , 这主要是因为我们采用了单道、无特殊扭曲的近似计算所致; 对特殊扭曲效应在文献[4]中已有详细的讨论, 认为在 $l =$ 偶数的情况, 这种特殊扭曲效应是很重要的, 并建议用有效交换混和参数 $u_l''(E)$ 来近似地考虑这种特殊扭曲效应, 而有效交换混合参数则与能量和 l 的奇偶性有关. 在本文的计算中, u 仅只是以 E_B 满足实验值来定的, 一经确定后, 即统一使用它来计算其他的激发态本征能量, 这样的做法过于粗糙, 对能级计算带来一定的影响, 特别是对较高激发态的影响尤为明显. 此外, 我们在相作用 V_{ij} 中未考虑张量力的成分, 也会影响能量的计算.

表 2 列出了我们用 RGM 计算的 $B(E2)$ 值和含 p 态激发的双中心集团壳模型^[8]及 LCCO 理论计算的 $B(E2)$ 值^[9], 也列出了实验测量的 $B(E2)$ 值, 以资比较.

由表 2 可见, 对于 $B(E2; E_1 \rightarrow E_0)$, 实验值为 $25.1 \pm 2.0(\text{fm}^4)$; 本文的计算值为 $21.06(\text{fm}^4)$, 比单粒子跃迁理论的计算值 $\sim 3(\text{fm}^4)$ 大有改进; 甚至比含 p 态双中心集团壳模型及 LCCO 计算值更符合于实验, 这个事实说明了 ${}^6\text{Li}$ 的第一激发态主要亦是 d - α 集团结构态. 对于 $B(E2; E_3 \rightarrow E_0)$ 来说, 实验值为 $6.483 \pm 3.360(\text{fm}^4)$, 本文的计算值为 $9.67(\text{fm}^4)$, 也在实验误差范围内与实验值符合. 但我们也必须看到, 本文的计算结果与

表 2 ${}^6\text{Li}$ 的 $B(E2)$ 理论计算值和实验值

$B(E2)$ (fm^4)	单粒子壳模型	LCCO (Volkov力)	双中心集团壳模型 (Volkov力)			RGM (本文)	实验测量值
			I	II	III		
$E_1 \rightarrow E_0$	3	13.88	12.14	13.11	18.14	21.06	25.1 ± 2.0 25.1 ± 2.0
$E_3 \rightarrow E_0$						9.67	6.483 ± 3.36

实验值尚有一定的偏差,这是因为所用的参数 u, V_1, λ 等都是由符合 ${}^6\text{Li}$ 基态的 d 和 α 的分离能来确定的,显然这样定的参数值对计算分离能来说起了补偿所用的近似方法的不足和其它一些未考虑到的因素的作用,但对较高一些能级的能量和各能态的波函数的计算带来不利影响,而跃迁对波函数又十分敏感,所以算得的跃迁结果尚有不足之处.不过,总的说来,本文算得的跃迁与实验的符合还是比较满意的,因而可以说所用的RGM波函数还是比较好的.

附 录

在 RGM 框架中的电四极约化跃迁几率

$$\begin{aligned}
 B(E2) = & \sum_{M_f M_i} \frac{1}{2J_i + 1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left\{ \left[\int R^2 f_{J_f l_f}(R) f_{J_i l_i}(R) dR \right. \right. \\
 & + \sum_{p,q=1}^3 A_p \cdot A_q \sum_{k=1}^2 (-1)^k e_k(p, q) \int R^2 f_{J_f l_f}(R') f_{J_i l_i}(R) \\
 & \times \exp\left[-\frac{2}{3}(a'_k R^2 + b'_k R'^2)\right] S_{l_f}\left(-\frac{2}{3} C'_k\right) dR dR' / G_0 \Big] \\
 & \left. \times (a_1 Y_- + a_2 Y_0 + a_3 Y_+) \right\}^2 \cdot \frac{1}{B_0}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 a_1 & \equiv C_{l_i, M_i-1, 1, 1}^{J_i M_i} \cdot C_{l_i, M_i-1, 1, 1}^{J_i M_i}; \quad Y_- \equiv \int Y_{l_f M_f-1}^*(\hat{R}) Y_{2M}^*(\hat{R}) Y_{l_i M_i-1}(\hat{R}) d\Omega_R \\
 & = (-1)^M \cdot \sqrt{\frac{5(2l_i + 1)}{4\pi(2l_f + 1)}} \cdot C_{2, 0, l_i, 0}^{l_f 0} \cdot C_{2, -M, l_i, M_i-1}^{l_f M_f-1} \\
 a_2 & \equiv C_{l_i, M_i, 1, 0}^{J_i M_i} \cdot C_{l_i, M_i, 1, 0}^{J_i M_i}; \quad Y_0 \equiv \int Y_{l_f M_f}^*(\hat{R}) Y_{2M}^*(\hat{R}) Y_{l_i M_i}(\hat{R}) d\Omega_R \\
 & = (-1)^M \cdot \sqrt{\frac{5(2l_i + 1)}{4\pi(2l_f + 1)}} \cdot C_{2, 0, l_i, 0}^{l_f 0} \cdot C_{2, -M, l_i, M_i}^{l_f M_f} \\
 a_3 & \equiv C_{l_i, M_i+1, 1, -1}^{J_i M_i} \cdot C_{l_i, M_i+1, 1, -1}^{J_i M_i}; \quad Y_+ \equiv \int Y_{l_f M_f+1}^*(\hat{R}) Y_{2M}^*(\hat{R}) Y_{l_i M_i+1}(\hat{R}) d\Omega_R \\
 & = (-1)^M \sqrt{\frac{5(2l_i + 1)}{4\pi(2l_f + 1)}} \cdot C_{2, 0, l_i, 0}^{l_f 0} \cdot C_{2, -M, l_i, M_i+1}^{l_f M_f+1}
 \end{aligned}$$

[1]
[2]
[3]
[4]
[5]
[6]
[7]
[8]
[9]

culate
the e
model
the e

$$e_1(p, q) = -2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{\pi}{\bar{\alpha}}\right)^3 \cdot \left(\frac{\pi}{4\bar{\alpha} + 3\alpha_p + 3\alpha_q}\right)^{3/2},$$

$$e_2(p, q) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{\pi}{2\bar{\alpha}}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\pi}{\bar{\alpha} + \alpha_p}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\pi}{\bar{\alpha} + \alpha_q}\right)^{3/2}.$$

$$a'_1 = [6\bar{\alpha}^3 + \bar{\alpha}(5\alpha_p + 17\alpha_q) + 6\alpha_p\alpha_q]/[12\bar{\alpha} + 9(\alpha_p + \alpha_q)],$$

$$b'_1 = [6\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}(17\alpha_p + 5\alpha_q) + 6\alpha_p\alpha_q]/[12\bar{\alpha} + 9(\alpha_p + \alpha_q)],$$

$$c'_1 = [12\bar{\alpha}^2 + 4\bar{\alpha}(\alpha_p + \alpha_q) + 12\alpha_p\alpha_q]/[12\bar{\alpha} + 9(\alpha_p + \alpha_q)];$$

$$a'_2 = \frac{5}{3}\bar{\alpha}, \quad b'_2 = a'_2 = \frac{5}{3}\bar{\alpha}, \quad c'_2 = -\frac{8}{3}\bar{\alpha};$$

$$B_0 \equiv \int f_{j_1 l_1}(R) dR \cdot \int f_{j_2 l_2}(R) dR,$$

$$G_0 \equiv \sum_{p, q} A_p \cdot A_q \left(\frac{\pi^3}{4\bar{\alpha}^3}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\pi}{\alpha_p + \alpha_q}\right)^{3/2},$$

$$S(\lambda) \equiv \frac{4\pi}{\lambda} g_{l+1/2}(\lambda R R').$$

参 考 文 献

- [1] Ajzenberg-Selove, *Nucl. Phys.*, **A320**(1979), 1.
 [2] L. R. Suelzle et al., *Phys. Rev.*, **162**(1967), 992; H. A. Bentz, *Z. Naturforsch.*, **24a**(1969), 858; I. Sick and J. S. McCarthy, *Nucl. Phys.*, **A150**(1970), 631; G. C. Li et al., *Nucl. Phys.*, **A162**(1971), 583; F. A. Bumiller et al., *Phys. Rev.*, **C5**(1972), 391.
 [3] F. Eingenbrod, *Z. Phys.*, **228**(1969), 337.
 [4] D. R. Thompson and Y. C. Tang, *Phys. Rev.*, **C8**(1973), 1649; H. H. Hackenbroich et al., *Nucl. Phys.*, **A221**(1974), 461; M. Lemere, Y. C. Tang and D. R. Thompson, *Nucl. Phys.*, **A266**(1976), 1; D. R. Thompson, M. Lemere and Y. C. Tang, *Nucl. Phys.*, **A286**(1977), 53; Hiroyuki Kanada et al., *Prog. Theor. Phys.*, **63**(1980), 842.
 [5] 赵 玄、侯仁辑、曾繁安, 高能物理与核物理, **9**(1985), 742.
 [6] 卢希庭, 原子核物理, 原子能出版社 (1981).
 [7] D. R. Thompson and Y. C. Tang, *Phys. Rev.*, **179**(1969), 971.
 [8] 卢兆启等人, 高能物理与核物理, **4**(1980), 261.
 [9] Y. Suzuki and K. Kubodera, *Prog. Theor. Phys.*, **44**(1970), 617.

ANALYSIS OF THE $E2$ TRANSITIONS BETWEEN THE $d+\alpha$ CLUSTER STATES OF ${}^6\text{Li}$ WITH THE RGM

LI PANLIN ZHAO XUAN ZHENG FANAN

(Institute of Nuclear Research, Shanghai, Academia Sinica)

ABSTRACT

The $E2$ reduced transition probabilities between the d - α cluster states of ${}^6\text{Li}$ were calculated by the RGM in this paper. The resulting $B(E2; E_1 \rightarrow E_0) = 21.06 \text{ fm}^4$ consistent with the experimental value $25.1 \pm 2.0 \text{ fm}^4$ more than the calculated values of the double-well cluster model including p -state exciting and LCCO. Also, the $B(E2; E_8 \rightarrow E_0) = 9.67 \text{ fm}^4$ coincided with the experimental value $6.483 \pm 3.360 \text{ fm}^4$ within the error range.