

广义激子模型理论中的初值问题

缪容之 吴国华 葛凌霄

(中国科学院近代物理研究所, 兰州)

摘要

本文在高能炮弹入射条件下, 由首次碰撞组态的统计性质的讨论, 给出了复杂粒子入射引起的预平衡过程的初值问题的完整表述。

一、引言

在广义激子模型理论中^[1,2], 系统在某时刻 t 所处的状态是由包含角度的态占据几率主方程

$$\frac{dq(n, \vec{\varrho}, t)}{dt} = \sum_{m=n-2}^{n+2} \lambda_{m-n} \int d\vec{\varrho}' G(\vec{\varrho}\vec{\varrho}') q(m, \vec{\varrho}', t) - q(n, \vec{\varrho}, t) \left[\omega(n) + \sum_{m=n-2}^{n+2} \lambda_{n-m} \right]^{[2]}$$

规定的。在前一时刻该系统所处的激子态、快粒子的角位置, 通过态-角跃迁和粒子发射的节链决定了这一时刻系统所处的激子态及角位置。因此, 在广义激子模型中, 初值问题的正确给定具有十分重要的意义。

广义激子模型的初值问题包含了两个方面: 即初粒子数 n_0 与初角占据几率。G. Mantzouranis 等人^[3]曾给出了一个关于初角占据几率的表示

$$q(n, \vec{\varrho}, t=0) = \delta_{n,n_0} \cdot \frac{1}{\pi} \cos \theta H\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad (1)$$

正如作者自己所强调的那样, 这个初值条件只适合单核子入射情况。对于 $A > 1$ 的炮弹, 这个建立在核子-核子自由散射截面基础上的初值条件表述显然是不合理的。因为, 这实际上是一方面假定炮弹是作为一个整体与靶核中的核子发生碰撞; 而另一方面又认为这样的碰撞过程仍然可以由核子-核子自由散射截面加以描述。炮弹质量 (A) 愈大, 这种不合理性就愈尖锐。然而, 人们, 包括 G. Mantzouranis 本人, 依然把它作为真实的初值条件的一个坏的近似予以使用^[1]。我们的一个早期工作^[3], 为了集中讨论初激子数 n_0 的影响, 也在这个意义上使用了它。

本工作首先对于炮弹-靶核远离对称的情况, 由首次碰撞具有统计性质的假定, 给出广义激子模型初值问题的完整表述; 并在这一初值条件下, 求解包含角度的态占据几率主

方程,然后给出预平衡发射的双微分截面、角分布及能谱的统计权重表示。在第六节讨论了炮弹-靶核接近对称时相应问题;最后,给出了算例及讨论。

二、初值问题的一般表述

一个激子系统的初值条件是指,当炮弹 a 入射到处于基态的靶核内,炮弹核子与靶核核子发生首次碰撞后,系统处于 n 激子态且快粒子出现在 $\vec{\Omega} = \Omega(\theta, \varphi)$ 方向的几率,以 $q(n, \vec{\Omega}, t=0)$ 表示。

我们假定这个高速入射的复杂粒子集团可以被看成是没有结构的 p_a 个自由核子集团,它与靶核粒子并不是以整体发生碰撞的。参与首次碰撞的炮弹粒子可能不止一个,例如同时有 k 个,发生这样的首次碰撞几率为 P_k 。这 k 个炮弹核子可能在靶核中通过能量交换激发出 i 对粒子-空穴,它的几率记为 χ_k^i , $i = 0, 1, 2 \dots k$ 。系统的一个可能的初激子数 n_0 满足

$$n_0 = p_a + 2i, \quad i = 0, 1, 2 \dots k, \quad k = 1, 2, p_a. \quad (2)$$

即首次碰撞行为的统计性质规定了初激子数 n_0 的统计性质,我们已在先前的工作[3]中作了阐述;在这里我们要进一步指出的是,它也规定了初角占据几率的统计性质。

p_a 个核子入射,如果有 k 个参与了首次碰撞,而 $(p_a - k)$ 个未参与首次碰撞,那末,这两组快粒子对系统带来的影响是不一样的:前者与靶核粒子交换能量,从而产生新的激子,它们的飞行方向可以由核子-核子自由散射截面近似描述;而后者并不激发新的激子,并且依然以平面波向前传播。

若这两组快粒子所引起的 $t = 0$ 时刻系统的态-角占据几率分别以 $q_c(n, \vec{\Omega}, t=0)$ 及 $q_{unc}(n, \vec{\Omega}, t=0)$ 表示,那末,由 k 对核子参与首次碰撞,而使系统具有初激子数 n_0 的初值条件为:

$$q^{(n_0, k)}(n, \vec{\Omega}, t=0) = \delta_{nn_0} \left[\frac{k}{p_a} q_c(n, \vec{\Omega}, t=0) + \frac{p_a - k}{p_a} q_{unc}(n, \vec{\Omega}, t=0) \right], \quad (3)$$

而发生这样初值条件的权重是^[3]

$$h_k(n_0) = P_k \chi_k^{\frac{n_0 - k}{2}}. \quad (4)$$

这里

$$P_k = C_{p_a}^k C^k, \quad (5a)$$

满足

$$\sum_{k=1}^{p_a} P_k = 1. \quad (5b)$$

而

$$\chi_k^i = \left[\frac{k!}{(k-i)! i!} \left(\frac{gE}{2p_a} \right)^{2i} \right] / \left[\sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)! j!} \left(\frac{gE}{2p_a} \right)^{2j} \right]. \quad (5c)$$

对于一切可能的初激子数 n_0 (它的权重是 $h(n_0)$, $h(n_0) = \sum_{k=1}^{p_a} h_k(n_0)$) 和一切可能的首次碰撞核子对数 k ,系统在 $t = 0$ 时刻的态-角占据几率为

$$q(n, \vec{Q}, t=0) = \sum_{\substack{n_0=\rho_a \\ \Delta h_0=2}}^{\rho_a} \sum_{k=1}^{\rho_a} h_k(n_0) q^{(n_0, k)}(n, \vec{Q}, t=0). \quad (6)$$

三、 $q^{(n_0, k)}(n, Q, t=0)$ 的推导

显然, 我们可以直接写下^[1, 2]

$$q_c(n, \vec{Q}, t=0) = \frac{1}{\pi} \cos \theta \Theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \quad (7a)$$

满足

$$\int q_c(n, \vec{Q}, t=0) d\vec{Q} = 1 \quad (7b)$$

现在, 我们着手推导 $q_{wnc}(n, \vec{Q}, t=0)$.

设在核子-核子质心系中, 描述核子-核子相对运动的波函数为

$$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} e^{ikz}, \\ \vec{\nabla} &= \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_c} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta_c} \frac{\partial}{\partial \varphi_c} \end{aligned}$$

故, 入射粒子流密度

$$j_i = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\hbar k}{\mu} = v$$

且出射粒子流密度各分量为

$$j_\varphi = 0, \quad j_r = v \cos \theta_c, \quad j_{\theta_c} = -v \sin \theta_c^{[4]}$$

因此, 未经散射的快粒子角分布在核子-核子质心系中为

$$\frac{d\sigma_c(\theta_c)}{dQ_c} = \frac{\left(\frac{dn_r}{dQ_c} \right)}{j_i} = \frac{j_r ds}{j_i} = \cos \theta_c \bar{r}^2, \quad (8a)$$

这里, \bar{r} 是快粒子在基态靶核中的平均自由程. 在实验室系

$$\frac{d\sigma_L(\theta_L)}{dQ_L} = 4\bar{r}^2 \cos 2\theta_L \cos \theta_L = 4\bar{r}^2 (2 \cos^3 \theta_L - \cos \theta_L)$$

注意到 $\theta_L \in \left[\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi \right) \right]$ 时 $(\cos \theta_L \cos 2\theta_L) < 0$, 无意义, 故

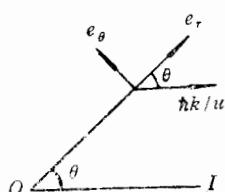


图 1

$$\frac{d\sigma_L(\theta_L)}{dQ_L} = 4\bar{r}^2(2\cos^3\theta_L - \cos\theta_L)H\left(\frac{\pi}{4} - \theta_L\right). \quad (8b)$$

我们舍弃了 $\frac{\pi}{2} \leq \theta_L \leq \frac{3\pi}{4}$ 这部份贡献, 这是因为它对于向前传播的平面波是无意义的。故

$$q_{unc}(n, \vec{Q}, t=0) = \frac{4}{\pi} (2\cos^3\theta_L - \cos\theta_L)\Theta\left(\frac{\pi}{4} - \theta_L\right) \quad (8c)$$

在炮弹-靶核质心系:

$$q_{unc}(n, \vec{Q}, t=0) = q_{unc}(n, \vec{Q}_L, t=0) \cdot \frac{dQ_L}{dQ}$$

对于炮弹靶核远离对称的情况恒有

$$\beta = \frac{m_p}{m_T} \rightarrow 0 \quad \frac{dQ_L}{dQ} \rightarrow 1$$

故最后有

$$q_{unc}(n, \vec{Q}, t=0) = \frac{4}{\pi} (2\cos^3\theta - \cos\theta)\Theta\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \quad (8d)$$

四、主方程的解

对态-角占据几率作勒让德展开

$$q(n, \vec{Q}, t) = \sum_l \eta_l(t) P_l(\cos\theta),$$

则第一节中的主方程将变为^[2]

$$\frac{d}{dt} \vec{\eta}_l(t) = \mathcal{B}^l \vec{\eta}_l(t).$$

其时间积分形式为

$$\mathcal{B}^l \xi_l = -\vec{\eta}_l(0),$$

这里

$$\xi_l = \int_0^\infty \vec{\eta}_l(t) dt.$$

相应地, 在确定的 (n_0, k) 组态下的初值条件为

$$q^{(n_0, k)}(n, \vec{Q}, t=0) = \delta_{nn_0} \cdot \sum_l \eta_l(0) P_l(\cos\theta) \equiv \sum_l \eta_l P_l(\cos\theta),$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_l &= \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi q^{(n_0, k)}(n, \vec{Q}, t=0) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \delta_{nn_0} \\ &\cdot \left[\frac{k}{p_a} \eta_{cl} + \frac{p_a - k}{p_a} \eta_{unc} \right] \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\eta_{cl} = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi q_c(n, \vec{Q}, t=0) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{al+1}{4\pi} \mu_l, \quad (9b)$$

$$\eta_{uncl} = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi q_{uncl}(n, \vec{Q}, t=0) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{al+1}{4\pi} \nu_l, \quad (9c)$$

文献[2]给出了 μ_l 的前七个值;这里我们给出 ν_l 的前七个值如下:

$$\begin{cases} \nu_0 = 1, & \nu_1 = \frac{8}{15} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & \nu_2 = \frac{3}{4}, & \nu_3 = \frac{1}{35} (32 - 9\sqrt{2}) \\ \nu_4 = \frac{31}{96}, & \nu_5 = \frac{1}{8}, & \nu_6 = \frac{207}{3840}. \end{cases} \quad (10)$$

显然,我们有

$$\vec{\xi}_l = \vec{\xi}_{cl} + \vec{\xi}_{uncl}, \quad (11)$$

采用 S. N. Gupta 所倡导的连分数解法^[5],立刻得到

$$\begin{cases} \xi_{cl}(n_0) = \frac{k}{p_a} \eta_{cl} \tau_l(n_0) \mathcal{F}_{n_0} \\ \xi_{cl}(n) = \frac{k}{p_a} \eta_{cl} \tau_l(n) \mathcal{F}_n \prod_{\substack{k=n_0 \\ \Delta k=2}}^{n-2} A_l^+(k) \tau_l(k) \mathcal{F}_{k+2}, \end{cases} \quad (12a)$$

以及

$$\begin{cases} \xi_{uncl}(n_0) = \frac{p_a - k}{p_a} \eta_{uncl} \tau_l(n_0) \mathcal{F}_{n_0} \\ \xi_{uncl}(n) = \frac{p_a - k}{p_a} \eta_{uncl} \tau_l(n) \mathcal{F}_n \prod_{\substack{k=n_0 \\ \Delta k=2}}^{n-2} A_l^+(k) \tau_l(k) \mathcal{F}_{k+2}. \end{cases} \quad (12b)$$

这里,

$$\mathcal{F}_n \equiv \frac{1}{1 -} \cdot \frac{F_n}{1 -} \cdot \frac{F_{n+1}}{1 -} \dots \quad (12c)$$

$$F_n \equiv A_l^+(n) A_l^-(n+2) \tau_l(n) \tau_l(n+2)$$

A_l^\pm 以及 τ_l 的定义见文献[2].

五、双微分截面、角分布与能谱

对于确定的 (n_0, k) 组态, 我们得到双微分截面

$$\left[\frac{d^2\sigma(\varepsilon_b, \theta)}{d\varepsilon_b d\Omega} \right]^{(n_0, k)} = \sigma_a \sum_{n=n_0}^{n_{\max}} T_n(\theta) W_b(n, \varepsilon_b), \quad (13a)$$

其中

$$T_n(\theta) = \sum_l \xi_l(n) P_l(\cos \theta). \quad (13b)$$

而 σ_a 以及 W_b 分别表示复合核形成截面以及 b 粒子发射率. 它们的表达式分别可以在文献[6]和[7]中找到.

最后, 对于一切可能的 $n_0 = p_a, p_a + 2, p_a + 4, \dots, 3p_a$, 以及 $k = 1, 2 \dots, p_a$, 我们有

$$\begin{cases} \frac{d^2\sigma(\varepsilon_b, \theta)}{d\varepsilon_b d\Omega} = \sum_{n_0} \sum_k P_k \chi_k^{\frac{n_0-p_a}{2}} \left[\frac{d^2\sigma(\varepsilon_b, \theta)}{d\varepsilon_b d\Omega} \right]^{(n_0, k)} \\ \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \sum_{n_0} \sum_k P_k \chi_k^{\frac{n_0-p_a}{2}} \left[\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right]^{(n_0, k)} \\ \frac{d\sigma(\varepsilon_b)}{d\varepsilon_b} = \sum_{n_0} \sum_k P_k \chi_k^{\frac{n_0-p_a}{2}} \left[\frac{d\sigma}{d\varepsilon_b} \right]^{(n_0, k)}. \end{cases} \quad (14)$$

值得注意的是，(14)式与我们在先前工作[3]中的相应的表达式

$$\begin{cases} \frac{d^2\sigma(\varepsilon_b, \theta)}{d\varepsilon_b d\Omega} = \sum_{n_0} h(n_0) \left[\frac{d^2\sigma(\varepsilon_b, \theta)}{d\varepsilon_b d\Omega} \right]^{(n_0)} \\ \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \sum_{n_0} h(n_0) \left[\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right]^{(n_0)} \\ \frac{d\sigma(\varepsilon_b)}{d\varepsilon_b} = \sum_{n_0} h(n_0) \left[\frac{d\sigma(\varepsilon_b)}{d\varepsilon_b} \right]^{(n_0)} \end{cases} \quad (14')$$

并不一样，后者，(14')，只考虑了首次碰撞组态对初激子数 n_0 的统计性质的影响而忽略了它对初角占据几率的统计性质的影响。因此，(14')是(14)的一个相当粗略的，有时可以认为是很坏的近似。

六、炮弹-靶核对称情况

在炮弹-靶核对称、或接近对称时，情况有了重大改变：复合系统平均场发生强烈畸变，粒子-空穴对激发也不再主要依赖于单粒子碰撞，因此必须重新考察它的初值问题。

由 W. Nörenberg^[8] 给出了的非绝热的双中心壳模型 (DDD) 精确地描述了两个对称核在快速的相互逼近过程中单粒子能级的畸变、倾斜、扭曲与交叉。对于大的集体运动速度，核子束不及绝热地调节它的波函数以跟随绝热的单粒子能级的变动。因此能级交叉前占据较低能级的核子，当核能级与一条较高的未被占据的能级交叉后，将仍然停留在这个能级上以保持波函数的特征，即非绝热的单粒子运动导致了粒子-空穴态的激发。

我们在文献[9]中给出了由这一激发机制计算初值激子数 n_0 的方法。它是在经典转折点近似下，由计算经典拐点 R 处能级交叉的数目来确定的。显然，这样的 n_0 与首次碰撞无关。即不管首次碰撞如何进行，由 DDD 获得的初激子数 n_0 是完全确定的。而快粒子的初角占据几率，在这个处于高激发态的系统中，仍受制于首次碰撞组态。我们假定，这两个机制近乎独立，可以分别处理。

设 p_a 个核子组成的炮弹入射时，有 k 个核子参与首次碰撞，则其初角占据几率为

$$q_k(n, \Omega, t=0) = \delta_{n_0} \left[\frac{k}{p_a} q_c(n, \Omega, t=0) + \frac{p_a - k}{p_a} q_{u.c.}(n, \Omega, t=0) \right] \quad (3')$$

而系统在 $t=0$ 时刻角占据几率为

$$q(n, \Omega, t=0) = \sum_{k=1}^{p_a} P_k q_k(n, \Omega, t=0), \quad (6')$$

与第四节一样，我们求得系数主方程时间积分分解(11)。最后得到双微分截面，角分布及能

谱:

$$\begin{cases} \frac{d^2\sigma(\varepsilon_b, \theta)}{d\varepsilon_b d\Omega} = \sum_k P_k \left[\frac{d^2\sigma(\varepsilon_b, \theta)}{d\varepsilon_b d\Omega} \right]^{(k)}, \\ \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \sum_k P_k \left[\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right]^{(k)}, \\ \frac{d\sigma(\varepsilon_b)}{d\varepsilon_b} = \sum_k P_k \left[\frac{d\sigma(\varepsilon_b)}{d\varepsilon_b} \right]^{(k)}. \end{cases} \quad (14'')$$

七、计算结果与讨论

1. 我们计算了反应 $^{181}\text{Ta}(\alpha, p)$, $E_\Delta = 54.8\text{MeV}$ 的能谱及 $E_b = 22, 34\text{MeV}$ 时的双微分截面。实验点采自文献[1]。其中虚线部分来自文献[1], 它采用的初值条件形式如(1)式, 并且不考虑 n_0 的统计性质。而双点划线部份来自文献[3], 它是我们的一个早期工作, 它考虑了 n_0 的统计性质, 但未考虑首次碰撞对初角占据几率的影响, 初值条件取为:

$$q(n, \Omega, t=0) = \sum_{n_0} h(n_0) q_c(n, \Omega, t=0). \quad (15)$$

而实线是本工作的结果, 所取的初值条件是(6)式。

比较这三种计算结果, 可以看到:

(1) 就能谱而言, 本工作(实线)与文献[3](双点划线)是几乎完全重合的; 但比之文献[1](虚线)与实验拟合程度要好。这是因为能谱更多地依赖初激子数 n_0 , 它对初角占据几率是不敏感的。

(2) 就双微分截面看, 虚线(文献[1])对实验点偏离是相当大的; 双点划线(文献[3])的拟合有了明显改进; 而实线(本工作)拟合最好。这表明初激子数与初角占据几率这两个因素都是不容忽略的因素, 后者对双微分截面的影响是显著的。

(3) 比较三种计算的双微分截面的曲线, 可以看到, 在大角部分它们之间的差异还

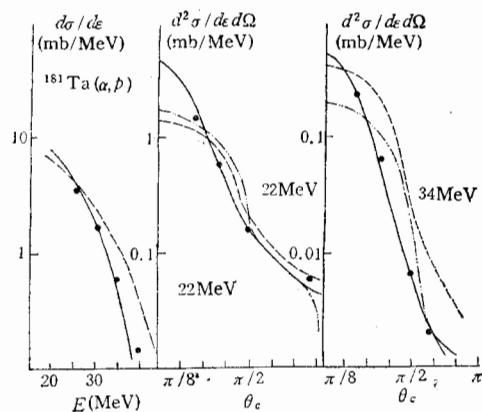
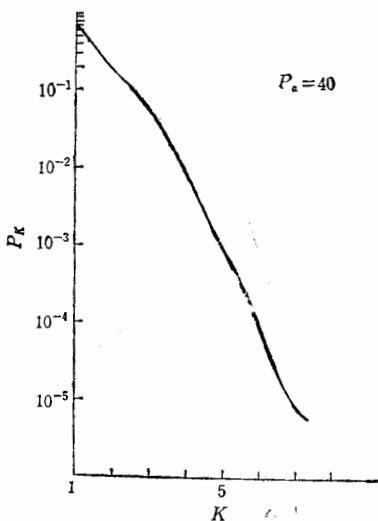
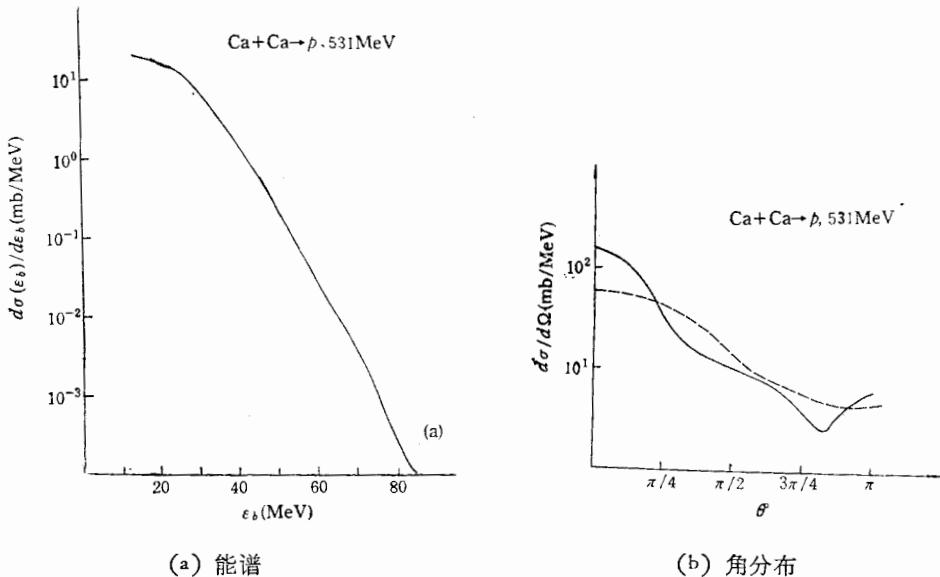


图 2 $^{181}\text{Ta}(\alpha, p)$, $E_L = 54.8\text{MeV}$ 的能谱及双微分截面
——本工作 ---- 文献[1] ····· 文献[3] • 实验值

图3 P_k 的 k 依赖关系图4 ${}^{40}\text{Ca} + {}^{40}\text{Ca} \rightarrow p, E_L = 531$

不算很大；但是，采取(1)式的初角占据几率表式的曲线，虚线与双点划线，比之实线来得高；而在小角部份，它们又比实线来得低。这就是说采取初值条件(6)式的计算，将有更强烈的向前角聚焦倾向。

事实上，当我们取形如(1)式的初值条件时，相当于假定 $k = p_2$ ，即所有的炮弹核子都参加了首次碰撞，从而有较大的机会参与能量交换，激发新的激子对，而只有较小的机机会在向前角区出射。而当我们采取形如(6)式的初值条件时，由于 $P_1 \approx 0.7, P_2 \approx 0.2$ ，所以有相当大的一部份炮弹核子在首次碰撞发生之后 ($t = 0$ 时刻)，仍聚焦于 $\theta \approx 0^\circ$ 的

窄区里,从而获得更大的机会在向前角区被发射。因此(6)式将比(1)式更好地反映预平衡发射的向前角成峰的特征。

2. 我们计算了反应 ${}^{40}\text{Ca} + {}^{40}\text{Ca} \rightarrow p$, $E_L = 531\text{MeV}$ 。作为炮弹-靶核对称情况处理的实例。由文献[9],我们得到 $n_0 = 32$; $E^* = 197\text{MeV}$ 。在图1我们给出了 $p_a = 40$ 时 $P_k \sim k$ 关系。当 $k \geq 3$, P_k 是指数下降的, $\therefore P_k/p_i \approx 1.5 \times 10^{-4}$, 故取 $k_{\max} = 6$ 。在图(4a)图(4b)给出了能谱与角分布。实线部份以(6')为初值条件,虚线部份以 $q_c(n, \Omega, t=0)$ 为初值条件。由于能谱对初值条件不敏感,故虚、实线几乎完全重合;而对角分布两者差异就显著了: 实线部份在前角区强烈成峰;中间大角区急剧地衰减;在向后角区又出现了较大的回升。而虚线部分则显得徐缓平坦,体现了两种初角占据几率带来的影响。

3. 我们再次强调,本工作中的处理方法,只有在高能炮弹入射,使系统处于高激发态的条件下才成立。不然的话,系统中的核子不再能近似地看作自由粒子,粒子的角跃迁几率将与能量相关^[10];另一方面核子的费米运动效应与泡利原理限制将变得不可忽视^[11]。这都将导致(6)式的失效。

参 考 文 献

- [1] G. Mantzouranis et al., *Z. Phys.*, **A276**(1976), 145—154.
- [2] J. M. Akkermans et al., *Phys. Rev.*, **C22**(1980), 73—89.
- [3] Rongzhi Miao et al., *Chinese Phys.*, Vol. 5, (1986), 880—886.
- [4] 曾谨言,量子力学,科学出版社,北京,p332—335。
- [5] S. N. Gupta, 私人通讯。
- [6] C. K. Cline and M. Blann, *Nucl. Phys.*, **A172**(1971), 225—259.
- [7] Rongzhi Miao et al., *Chinese Phys.*, Vol. 6, (1986), 344—349.
- [8] W. Nörenberg, *Nucl. Phys.*, **A428**(1978), 177.
- [9] L. X. Ge and W. Nörenberg, *Z. Phys.*, **A393** (1986), 293.
- [10] A. Iwamoto and K. Harada, *Nucl. Phys.*, **A419** (1984), 472.
- [11] S. Ziyang et al., *Z. Phys.*, **A305**(1982), 61.

THE PROBLEM OF INITIAL VALUE IN GENERALIZED EXCITON MODEL THEORY

MAO RONGZHI WU GUOHUA GE LINGXIAO

(Institute of Modern Physics, Academia Sinica, Lanzhou)

ABSTRACT

Under the condition of high energy projectile's incidence, the discussion on statistical property of configurations of the first collision gives a complete expression of problem of initial value in preequilibrium process induced by complex projectile.