

强子中海层子分布函数的 QCD 预言

沈齐兴 吴济民
(中国科学院高能物理研究所,北京)

宋孝同 杜建国 张洪宪
(杭州大学物理系)

摘 要

本文从 Altarelli-Parisi 方程出发,得到了海层子分布函数解析的级数表达式. 由此得到的与海层子分布函数有关的一些计算值和实验数据符合得比较好.

在部分子模型^[1]提出后的近二十年中,强子由部分子构成的物理图象已为众多的实验所证实. 因此,确定强子中层子和胶子的分布函数已成为研究强子结构的重要课题.

二十年来,利用轻子-核子深度非弹性散射测量了核子内层子、反层子和胶子的分布函数 $q(x, Q^2)$ 、 $\bar{q}(x, Q^2)$ 和 $G(x, Q^2)$, 它们不仅是 x 的函数,也是 Q^2 的函数,即出现所谓的无标度性破坏现象. 利用这些实验数据可以拟合出这些分布函数的参数化表达形式^[2]. 但是,分布函数的这种表达式毕竟只是拟合现有实验结果的经验公式. 为了理论研究和唯象学的需要,文献[3]利用 A-P 方程,提出了一种直接求得价层子分布函数的方法,并得到了描述价层子分布函数随 Q^2 演化的级数解析表达式. 它很好地解释了有关结构函数行为和标度性破坏等实验现象^[4]. 在文献[5]中,我们利用这种方法求得了强子中胶子分布函数的演化行为. 同样地,这个级数收敛得很快,和有关的实验结果符合得也比较好.

按照部分子模型,在小 x 区域海层子的贡献是十分重要的,因此本文将上述方法作进一步的推广,用来求得强子中海层子分布函数的级数表达式,并和有关的实验结果作了比较.

在带头对数近似下,层子和胶子的分布函数满足如下的 A-P 方程^[6]:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i(x, t)}{dt} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q^i(y, t) + P_{qG} \left(\frac{x}{y} \right) G(y, t) \right] \\ \frac{dG(x, t)}{dt} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[P_{Gq} \left(\frac{x}{y} \right) \sum_{i=1}^{2f} q^i(y, t) + P_{GG} \left(\frac{x}{y} \right) G(y, t) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\alpha_s = \frac{1}{b_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}, \quad b_0 = \frac{33 - 2f}{12\pi}, \quad t = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

P_{ij} 在 Mellin 变换下相应于 QCD 理论中的反常量纲^[7]. $f = 4$ 是层子的味道数.

按照文献[5]给出的方法,先对方程(1)作 Mellin 变换,得到关于矩的一阶微分方程组,再对此方程组的解作逆 Mellin 变换,即得第 i 种海层子的分布函数 $q_i^i(x, t)$ ($i = u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}, c, \bar{c}$) 所满足的方程:

$$q_i^i(x, t) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[q_i^i(z, t_0) - \frac{1}{2f} q(z, t_0) \right] \tilde{F}_{qq1} \left(\frac{x}{z}, t \right) + \frac{1}{2f} \int_x^1 \frac{dz}{z} q(z, t_0) \tilde{F}_{qq2} \left(\frac{x}{z}, t \right) + \int_x^1 \frac{dz}{z} G(z, t_0) \tilde{F}_{qG} \left(\frac{x}{z}, t \right) \quad (2)$$

其中

$$q(x, t_0) = \sum_{i=1}^{2f} [q_i^i(x, t_0) + q_i^i(x, t_0)]$$

$q_i^i(x, t_0)$, $q_i^i(x, t_0)$ 和 $G(x, t_0)$ 分别是在初始值 $t = t_0$ 时第 i 种价层子、第 i 种海层子和胶子的分布函数. \tilde{F} 是相应 F 的逆 Mellin 变换:

$$\tilde{F}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} dx x^{-n} F(n, t) \quad (3)$$

为了求解(2)式,我们首先完成逆 Mellin 变换(3),然后代入(2)式,再加入适当的起始条件即可求得海层子的分布函数.为此,我们先把 $F(n, t)$ 按 $\frac{1}{n}$ 幂次作展开(我们的最终计算结果表明,级数收敛得很快,因此对 $F(n, t)$ 的展开只需取前几项,具体的展开形式可从文献[5]中找到.)经过冗长的代数运算,得到

$$F_{qq1}(n, t) = e^{(\frac{3-c}{4})t} \frac{1}{n^s} \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(0)}(s) \frac{1}{n^k},$$

$$F_{qq2}(n, t) = e^{\frac{45-2f-52c}{32}t} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{13}{8}t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} Q_{ki}^{(1)}(s) \frac{(\ln n)^k}{n^i}$$

$$F_{qG}(n, t) = e^{\frac{45-2f-52c}{32}t} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{13}{8}t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} Q_{ki}^{(2)}(s) \frac{(\ln n)^k}{n^i} \quad (4)$$

这里,系数 $Q_k^{(0)}(s)$, $Q_{ki}^{(1)}(s)$ 和 $Q_{ki}^{(2)}(s)$ 都只是 s 的函数,它们是:

$$Q_{ki}^{(0)}(s) = \sum_{l=0}^i \left\{ G_l \left[f_{k,i-l}^{(1)} + \frac{5}{4} (1 - \delta_{k0}) f_{k-1,i-l}^{(2)} \right] + C_l^{(1)} f_{k,i-l}^{(2)} \right\}, \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$Q_{k0}^{(2)}(s) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$Q_{ki}^{(2)}(s) = \sum_{l=1}^i C_l^{(2)} f_{k,i-l}^{(2)}, \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots \\ i = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right) \quad (5)$$

$Q_k^{(0)}(s)$, $C_l^{(1)}$ 和 $C_l^{(2)}$ 在附录1中, $G_l(s)$, $f_{ki}^{(1)}(s)$ 和 $f_{ki}^{(2)}(s)$ 的形式见文献[5]. 再利用在 n 复平面上有关的迴路积分公式^[5],即可完成逆 Mellin 变换运算,得到

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{qq1}(x, t) &= e^{(\frac{3}{4}-c)t} \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^{(0)}(s) \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)} \\
 \tilde{F}_{qq2}(x, t) &= e^{\frac{45-2f-52c}{32}t} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\frac{13}{8}s-1} \\
 &\quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d_{lm}^{(1)}(s) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^m \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^l \\
 \tilde{F}_{qG}(x, t) &= e^{\frac{45-2f-52c}{32}t} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\frac{13}{8}s-1} \\
 &\quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d_{lm}^{(2)}(s) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^m \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^l
 \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}
 d_{0m}^{(i)}(s) &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \left\{ Q_{0m}^{(i)} + \phi(\eta) Q_{1m}^{(i)} + \left[\phi^2(\eta) - \frac{d}{d\eta} \phi(\eta) \right] Q_{2m}^{(i)} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\phi^3(\eta) - 3\phi(\eta) \frac{d}{d\eta} \phi(\eta) + \frac{d^3}{d\eta^2} \phi(\eta) \right] Q_{3m}^{(i)} \right\} \\
 d_{1m}^{(i)}(s) &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \left\{ -Q_{1m}^{(i)} - 2\phi(\eta) Q_{2m}^{(i)} - 3 \left[\phi^2(\eta) - \frac{d}{d\eta} \phi(\eta) \right] Q_{3m}^{(i)} \right\} \\
 d_{2m}^{(i)}(s) &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \left\{ Q_{2m}^{(i)} + 3\phi(\eta) Q_{3m}^{(i)} \right\} \\
 d_{3m}^{(i)}(s) &= -\frac{1}{\Gamma(\eta)} Q_{3m}^{(i)} \quad (i=1, 2) \\
 \eta &= \frac{13}{8}s + m
 \end{aligned} \tag{7}$$

$\phi(\eta)$ 为 Psi 函数, c 为欧拉常数.

从 (2) 式我们看到, 为了得到海层子分布函数的级数表达式, 还需要输入在初始值 $t = t_0$ 时层子的分布函数 $q^i(x, t_0)$ 和胶子的分布函数 $G(x, t_0)$. D. W. Duke 和 J. F. Owens^[2]在分析了深度非弹性散射、双 μ 子质量分布以及 J/ψ 的 x_F 分布等大量实验数据的基础上拟合出了一组很好的层子(包括价层子和海层子)和胶子分布函数的经验公式. 我们选取该文中给出的在 $Q_0^2 = 4(\text{GeV}/c)^2$ 时的如下分布函数的参数化形式作为我们的初始输入:

$$\begin{aligned}
 x \left[q_i^j(x, t_0) - \frac{1}{2f} q(x, t_0) \right] &= \sum_{j=1}^3 K_j x^{a_j} (1-x)^{b_j} \\
 xq(x, t_0) &= \sum_{j=4}^6 K_j x^{a_j} (1-x)^{b_j} \\
 xG(x, t_0) &= \sum_{j=7}^8 K_j x^{a_j} (1-x)^{b_j}
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -0.234, K_2 = -0.937, K_3 = \begin{cases} 0.0527 & (\text{对 } u, d, s \text{ 海层子}) \\ -0.158 & (\text{对 } c \text{ 海层子}) \end{cases} \\
 K_4 &= 1.874, K_5 = 8.246, K_6 = 1.265 \\
 K_7 &= 1.56, K_8 = 14.04 \\
 a_1 &= a_4 = 0.419, a_2 = a_5 = 1.419, a_3 = a_6 = a_7 = 0, a_8 = 1 \\
 b_1 &= b_2 = b_4 = b_5 = 3.46, b_3 = b_6 = 8.05, b_7 = b_8 = 6.
 \end{aligned} \tag{9}$$

将(6)式和(8)式代入(2)式,最后可得强子中海层子分布函数的级数表达式:

$$\begin{aligned}
 xq_i^j(x, z) &= e^{\left(\frac{3}{4}-c\right)s} \sum_{j=1}^3 K_j x^{a_j} (1-x)^{b_j} \sum_{M=0}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+M} R^{(0)}(M, a_j, b_j, s) \\
 &+ \frac{1}{8} e^{\frac{45-2f-52c}{32}s} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\frac{13}{8}s} \left\{ \sum_{j=4}^6 K_j x^{a_j} (1-x)^{b_j} \right. \\
 &\times \sum_{M=0}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^M \left[R_0^{(1)}(M, a_j, b_j, s) + R_1^{(1)}(M, a_j, b_j, s) \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right) \right. \\
 &+ R_2^{(1)}(M, a_j, b_j, s) \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^2 + R_3^{(1)}(M, a_j, b_j, s) \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^3 + \dots \left. \right] \\
 &+ \sum_{j=7}^8 K_j x^{a_j} (1-x)^{b_j} \sum_{M=0}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^M \left[R_0^{(2)}(M, a_j, b_j, s) \right. \\
 &+ R_1^{(2)}(M, a_j, b_j, s) \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right) + R_2^{(2)}(M, a_j, b_j, s) \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^2 \\
 &+ R_3^{(2)}(M, a_j, b_j, s) \left(\ln \ln \frac{1}{x}\right)^3 + \dots \left. \right] \left. \right\} \tag{11}
 \end{aligned}$$

其中函数 $R^{(0)}(M, a_j, b_j, s)$ 和 $R_l^{(i)}(M, a_j, b_j, s)$ ($i = 1, 2; l = 0, 1, 2, \dots$) 给出在附录2中.

公式(11)是本文的主要结果,它将核子中海层子分布函数表示成一个解析的级数表达式.这个级数包括两部分,第一部分是 $\ln \frac{1}{x}$ 的幂级数,第二部分是既含 $\ln \frac{1}{x}$ 又含 $\ln \ln \frac{1}{x}$ 的幂级数.计算表明这二种级数收敛得都很快,例如在 $Q^2 = 6(\text{GeV}/c)^2, x=0.1$ 的情况下,(11)式第二大项中 $\ln \ln \frac{1}{x}$ 的零次幂、一次幂、二次幂和三次幂的贡献分别为这四项总贡献的 97.32%、2.63%、0.038% 和 0.00034%.这表明在计算中只取这前四项已足够精确.同样地,这一大项中包含 $\ln \frac{1}{x}$ 的零次、一次、二次、三次和四次幂项的贡献分别为这五项总贡献的 96.18%、2.87%、0.56%、0.28% 和 0.12%,也具有较快的收敛性.因此,在我们后面给出的数值结果中也只计算到 $M = 4$.

图1和图2分别给出了 $x\bar{u}(x, Q^2)$ ($=x\bar{d}(x, Q^2) = x\bar{s}(x, Q^2)$) 和 $x\bar{c}(x, Q^2)$ 随 x 和 Q^2 的演化行为.可以看到,这些分布函数都随 x 的增加而迅速减小,基本上集中在 $x < 0.3$ 的区域中.在图3中我们给出了 $\bar{q}^v \equiv x(\bar{u} + \bar{d} + \bar{s}) = 4x\bar{u}$ 的计算值,并和文献[8]中的实验值作了比较.从文献[3]可以看到,由于当时我们只得到了价层子的分布函

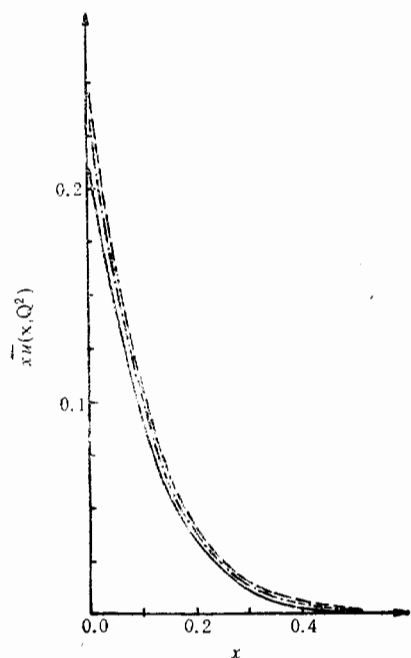


图 1

— $Q^2 = 6(\text{GeV}/c)^2$ ···· $Q^2 = 50(\text{GeV}/c)^2$
 ---- $Q^2 = 200(\text{GeV}/c)^2$

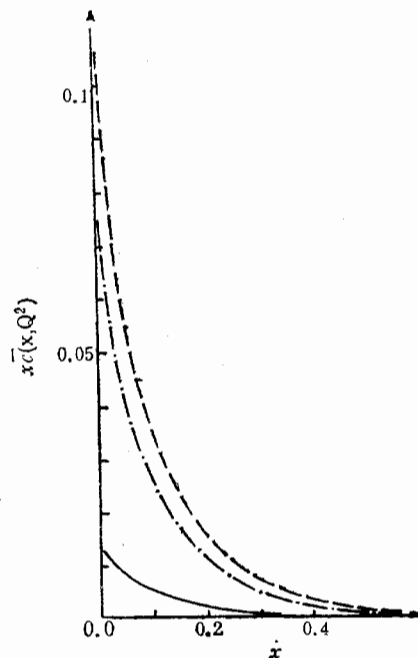


图 2

— $Q^2 = 6(\text{GeV}/c)^2$ ···· $Q^2 = 50(\text{GeV}/c)^2$
 ---- $Q^2 = 200(\text{GeV}/c)^2$

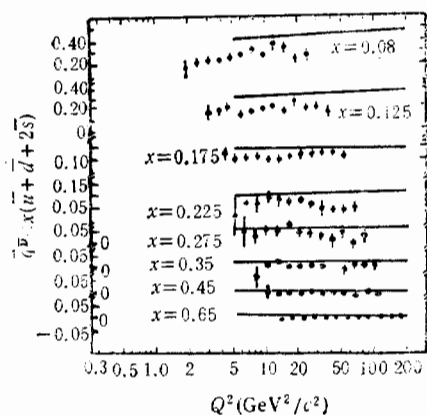


图 3

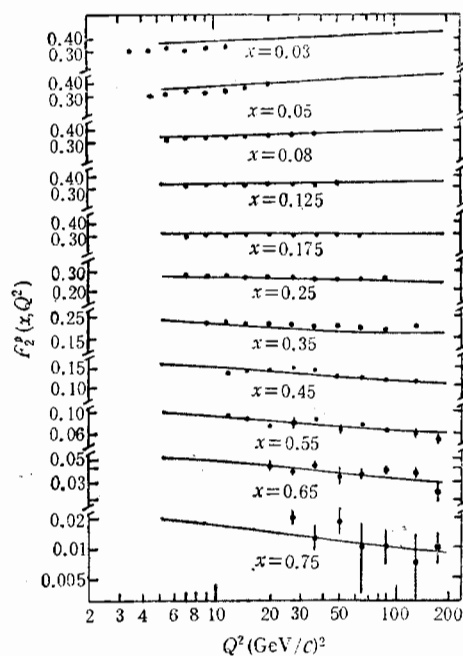


图 4

数, 忽略了海层子的贡献, 因此在和实验值 $F_2^i(x, Q^2)$ 作比较时, 对于比较小的 x , 例如 $x = 0.25$, 计算值比实验值略小. 本文图 4 给出 $F_2^i(x, Q^2)$ 的计算值, 其中包括了由(11)

式表示的海层子分布函数的贡献,并和文献[9]引用的实验值作了比较.从图中看到,即使在 x 较小时,计算值和实验值符合得也很好.

本文从 A-P 方程出发,利用在初始值 $Q_0^2 = 4(\text{GeV}/c)^2$ 时分布函数的参数化形式作为初始输入,求得了核子中海层子分布函数的解析表达式.这个级数收敛得很快,由它得到的结构函数 $F_2^p(x, Q^2)$ 的行为和实验值符合得很好.值得指出的是,一旦从实验上测出了在某个 Q_0^2 时其它强子中层子和胶子分布函数的行为,利用我们已经求得的价格层子^[3]、海层子和胶子^[5]分布函数的解析表达式,就可以预言这些强子的所有分布函数(或结构函数)随 Q^2 的演化行为,为进一步作各种唯象学和理论的研究提供了方便.

附 录

1. 公式(4)和(5)中的几个函数:

$$Q_0^{(0)} = 1, Q_1^{(0)} = -\frac{s}{2}, Q_2^{(0)} = \frac{1}{8}s^2 + \frac{7}{12}s,$$

$$Q_3^{(0)} = -\frac{s^3}{48} - \frac{7}{24}s^2 - \frac{s}{2},$$

$$Q_4^{(0)} = \frac{s^4}{384} + \frac{7}{96}s^3 + \frac{121}{288}s^2 + \frac{59}{120}s,$$

$$Q_5^{(0)} = -\frac{s^5}{3840} - \frac{7}{576}s^4 - \frac{85}{576}s^3 - \frac{129}{240}s^2 - \frac{s}{2},$$

.....

$$C_1^{(1)} = \frac{5}{8} - \omega G_1, C_2^{(1)} = -\frac{197}{48} + \frac{5}{8}G_1 - \omega G_2,$$

$$C_3^{(1)} = 4 - \frac{197}{48}G_1 + \frac{5}{8}G_2 - \omega G_3,$$

$$C_4^{(1)} = -\frac{1679}{96} + 4G_1 - \frac{197}{48}G_2 + \frac{5}{8}G_3 - \omega G_4,$$

$$C_5^{(1)} = 31 - \frac{1679}{96}G_1 + 4G_2 - \frac{197}{48}G_3 + \frac{5}{8}G_4 - \omega G_5,$$

.....

$$\omega = \frac{1}{16}(21 - 2f - 20c)$$

$$C_1^{(2)} = \frac{3}{8}, C_2^{(2)} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{8}G_1,$$

$$C_3^{(2)} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}G_1 + \frac{3}{8}G_2,$$

$$C_4^{(2)} = -\frac{21}{4} + \frac{9}{4}G_1 - \frac{3}{4}G_2 + \frac{3}{8}G_3,$$

$$C_5^{(2)} = \frac{45}{4} - \frac{21}{4}G_1 + \frac{9}{4}G_2 - \frac{3}{4}G_3 + \frac{3}{8}G_4,$$

.....

2. 公式(11)中的几个函数:

$$R^{(0)}(M, a, b, s) = \sum_{m=0}^M \frac{Q_m^{(0)}}{\Gamma(s+m)} \mathcal{A}_{M-m}(a-1, b, s+m),$$

$$R_0^{(i)}(M, a, b, s) = \sum_{m=0}^M \left\{ d_{0m}^{(i)} \mathcal{A}_{M-m}\left(a-1, b, \frac{13}{8}s+m\right) \right. \\ \left. + d_{1m}^{(i)} \mathcal{A}'_{M-m} + d_{2m}^{(i)} \mathcal{A}''_{M-m} + d_{3m}^{(i)} \mathcal{A}'''_{M-m} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 R_1^{(i)}(M, a, b, s) &= \sum_{m=0}^M \left\{ d_{1m}^{(i)} \mathcal{A}_{M-m} \left(a-1, b, \frac{13}{8}s+m \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2d_{2m}^{(i)} \mathcal{A}'_{M-m} + 3d_{3m}^{(i)} \mathcal{A}''_{M-m} \right\} \\
 R_2^{(i)}(M, a, b, s) &= \sum_{m=0}^M \left\{ d_{2m}^{(i)} \mathcal{A}_{M-m} + 3d_{3m}^{(i)} \mathcal{A}'_{M-m} \right\} \\
 R_3^{(i)}(M, a, b, s) &= \sum_{m=0}^M d_{3m}^{(i)} \mathcal{A}_{M-m} \left(a-1, b, \frac{13}{8}s+m \right). \\
 &\quad (i=1, 2)
 \end{aligned}$$

其中函数 $\mathcal{A}_i(a, b, s)$ 见文献[3]的附录.

参 考 文 献

- [1] R. P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.*, **23**(1969), 1415.
 [2] R. Baier, J. Engels and B. Petersson, *Z. Phys.*, **C2**(1979), 265; A. J. Buras and K. J. Gaemers, *Nucl. Phys.*, **B132**(1978), 249; M. Gluck, E. Hoffmann and E. Reya, *Z. Phys.*, **C13**(1982), 119; D. W. Duke and J. F. Owens, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 49.
 [3] 沈齐兴, 吴济民等, 高能物理与核物理, **7**(1983), 170.
 [4] 沈齐兴, 吴济民等, 高能物理与核物理, **7**(1983), 5, 301, 309.
 [5] 吴济民, 沈齐兴等, 高能物理与核物理, **13**(1989), 494—502.
 [6] G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys.*, **B26**(1977), 298.
 [7] C. M. Wu, *Nucl. Phys.*, **B167**(1980), 349.
 [8] H. Abramowicz et al., *Z. Phys.*, **C17**(1983), 283.
 [9] J. J. Aubert et al., *Nucl. Phys.*, **B259**(1985), 189.

QCD PREDICTIONS FOR THE SEA QUARK DISTRIBUTION FUNCTION IN HADRONS

SHEN QIXING WU JIMIN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

SONG XIAOTONG DU JIANGUO ZHANG HONGXIAN

(Physics Department of Hangzhou University)

ABSTRACT

We get the analytical series expressions for the sea quark distribution function in hadrons from Altarelli-Parisi equation. The calculated values, which relate to the sea quark distribution function, are consistent with experimental data.