

# 自持磁约束电子云的流体理论\*

## (I) 流体方程组

郁庆长

(中国科学院高能物理研究所,北京)

### 摘 要

本文利用流体理论研究轴对称自持磁约束电子云。这种电子云是依靠 Penning 放电维持的。在电子云中电子的运动特性可以用由连续性方程、动量方程、能量方程、Poisson 方程和热传导方程组成的流体方程组来描述。文中还讨论了电子云中电子的扩散、逃逸和能量输运等问题。

### 一、引 言

利用电磁场可以把大量电子约束在一定的装置中,这些电子的集合称为磁约束电子云。它是一种非中性等离子体,可以用研究等离子体的一些方法来研究它。对磁约束电子云的研究在理论和应用方面都颇有价值,它引起了不少物理学家的兴趣<sup>[1,2]</sup>。

最简单的约束装置由三个等径圆筒电极组成。两侧的电极接地,中央电极加适当正偏压。整个装置处于轴向磁场和高真空中(图1)。电子云被约束在中央电极内,由于云的空间电荷效应,中央电极内的电场主要是径向的。电子云中的电子,一方面绕磁力线作螺旋运动,另一方面在电场与磁场联合作用下绕对称轴漂移。

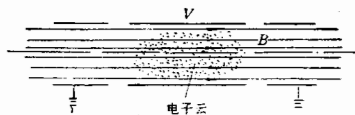


图1 最简单的电子云磁约束装置

由于电子和残余气体原子的碰撞,电子将逐渐向云外扩散,一些电子将落到约束装置的壁上而损失。损失的电子可用多种方法加以补充,常用的一种方法是使装置中发生自持 Penning 放电<sup>[3,4]</sup>,一些气体原子在放电中被电离。当电离产生的电子和损失的电子达到平衡时,电子云处于稳定状态。我们称这种电子云为自持磁约束电子云。

本文从电子运动的流体理论出发来研究轴对称的自持磁约束电子云。假定电子云位

本文1989年11月27日收到。

\* 国家自然科学基金资助项目。

于对称轴附近,环状电子云不在研究范围之内。

## 二、电子运动的流体方程组

Ilic 导出了包括电离作用在内的电子运动的流体方程组<sup>[4]</sup>:

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = Zn, \quad (1)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{e}{m}(\nabla U - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{mn} \nabla(nkT) - \nu'\mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{5}{2} kT \right) = e\mathbf{v} \cdot \nabla U - Z \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{5}{2} kT + E_i \right) - \frac{3m\nu}{M} kT. \quad (3)$$

式(1)、(2)、(3)分别是电子的连续性方程、动量方程和能量方程。 $e, m, n, T, \mathbf{v}$ 分别为电子的电荷(绝对值)、质量、密度、温度和平均速度, $k$ 为 Boltzmann 常数, $U$ 为电位, $\mathbf{B}$ 为磁感应强度, $\nu$ 为电子-原子碰撞的有效动量传输频率, $Z$ 为电离频率, $\nu' = \nu + Z, M$ 与  $E_i$ 为气体原子的质量与电离能。

为了利用上述方程组描述磁约束电子云中电子的运动,需要说明以下几点:

1. 考虑到电子云的空间电荷效应方程组中还应包括 Poisson 方程

$$\nabla^2 U = \frac{en}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

此处  $\epsilon_0$  为真空介电常数。电子云中电流对磁场的影响较小,因此  $\mathbf{B}$  可认为已知量。

2. 方程组没有包括电子-电子碰撞项和热导项。前者几乎不引起电子扩散,可以不予考虑。后者将在第五节中讨论。

3. 式(3)的最后一项较小,下面将略去它。

对于轴对称系统采用圆柱坐标系  $(r, \varphi, z)$  是合适的。令  $v_\varphi = \omega r$ , 把上述方程组重写为以下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (n v_z) = Zn, \\ & r v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + r v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{e}{m} (v_r B_z - v_z B_r) - 2v_r \omega - \nu' \omega r, \\ & v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{e}{m} \left( \frac{\partial U}{\partial r} - \omega r B_z \right) + \omega^2 r - \frac{1}{mn} \frac{\partial}{\partial r} (nkT) - \nu' v_r, \\ & v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{e}{m} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \omega r B_r \right) - \frac{1}{mn} \frac{\partial}{\partial z} (nkT) - \nu' v_z, \\ & v_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{5}{2} kT \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{5}{2} kT \right) \\ & = e v_r \frac{\partial U}{\partial r} + e v_z \frac{\partial U}{\partial z} - Z \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{5}{2} kT + E_i \right), \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{en}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

我们称  $\omega$  为漂移角速度,  $v_r$  与  $v_z$  为径向与轴向扩散速度。

### 三、平衡态和近平衡态

如果不考虑碰撞, 即认为  $v = 0$ ,  $Z = 0$ , 电子云将逐渐达到平衡态, 此时  $v_r = 0$ ,  $v_z = 0$ ,  $T$  为常数. 在轴对称情况下由于正则角动量守恒  $\omega$  也为常数<sup>[6,7]</sup>.

对于平衡态, 方程(1)、(3)两端都为 0, 因此无意义. 方程组只剩下两个方程:

$$\frac{e}{m} (\nabla U - \omega r \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B}) + \omega^2 r \mathbf{e}_r - \frac{kT}{mn} \nabla n = 0, \quad (6)$$

$$\nabla^2 U = \frac{en}{\epsilon_0}. \quad (7)$$

$\mathbf{e}_r$  与  $\mathbf{e}_\varphi$  为径向与角向单位矢量. 引入修正位<sup>[8]</sup>

$$\phi = U - \omega r A_\varphi + \frac{m\omega^2 r^2}{2e}, \quad (8)$$

$\mathbf{A}$  为磁场的矢量位,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . 代式(8)入式(6)得

$$e \nabla \phi = \frac{kT}{n} \nabla n. \quad (9)$$

和电位  $U$  一样, 可以任意选取修正位  $\phi$  的零点. 现在取  $n = n_0$  处的  $\phi$  为 0,  $n_0$  为  $n$  的最大值. 显然

$$n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right), \quad (10)$$

再代入式(7)得

$$\nabla^2 \phi = \frac{en_0}{\epsilon_0} \exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right) - 2\omega \left( B_z - \frac{m\omega}{e} \right). \quad (11)$$

当外电磁场和  $n_0$ ,  $\omega$ ,  $T$  已知时, 解方程(11)即可求出各点的  $n$  和  $U$ <sup>[8]</sup>. 但是平衡态理论本身无法确定  $n_0$ ,  $\omega$ ,  $T$ .

在实际的自持磁约束电子云中电子-原子碰撞是不可忽略的. 虽然这种电子云不处于平衡态, 但若电子云中  $\omega$  和  $T$  变化不大而电子扩散速度又较小, 仍可认为它接近于平衡态, 或者说它处于近平衡态.

### 四、电子的扩散

假定电子云中电子扩散速度较小, 流体方程组中  $v_r$ ,  $v_z$  的二次项均可略去, 此时式(2)可改写为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{v} \times \mathbf{Q} + m\nu' \mathbf{v}, \quad (12)$$

此处  $\mathbf{Q} = \frac{e}{m} \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{F}$  为除磁场项和碰撞项之外各项之和:

$$F_r = e \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial r} (nkT) + m\omega^2 r, \quad \left\{ \right.$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\varphi} &= -2m\nu\omega - mrv_r \frac{\partial\omega}{\partial r} - mrv_z \frac{\partial\omega}{\partial z}, \\ F_z &= e \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial z} (nkT). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

将  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{v}$  分解为沿磁力线的分量  $F_L, v_L$ , 在  $(r, z)$  平面上垂直于磁力线的分量  $F_N, v_N$  以及角向分量  $F_{\varphi}, v_{\varphi}$ . 显然

$$\begin{aligned} F_L &= m\nu'v_L, \\ F_N &= m\omega rQ + m\nu'v_N, \\ F_{\varphi} &= m\nu'\omega r - m\nu_NQ. \end{aligned} \quad (14)$$

消去  $\omega$  可得

$$v_L = \frac{F_L}{m\nu'}, \quad v_N = \frac{\nu'}{m(Q^2 + \nu'^2)} \left( F_N - \frac{Q}{\nu'} F_{\varphi} \right). \quad (15)$$

$F_L, F_N$  与  $F_r, F_z$  的关系为

$$F_L = F_r \sin\theta + F_z \cos\theta, \quad F_N = F_r \cos\theta - F_z \sin\theta, \quad \theta = \arctan\left(\frac{B_r}{B_z}\right). \quad (16)$$

我们称电子沿磁力线的扩散为纵向扩散, 称垂直于磁力线的扩散为横向扩散. 在磁场约束下电子横向扩散需要依靠碰撞, 而自持磁约束电子云中  $\nu$  远小于  $Q$  (通常  $\nu/Q$  小于  $10^{-6}$ ), 因此横向扩散比纵向扩散困难得多. 另一方面, 对于纵向扩散, 较小的  $F_L$  就能产生很大的  $v_L$ . 为了保持电子云的稳定, 扩散速度不能过大, 因此  $F_L$  只能取很小的值, 即

$$F_L = e \frac{\partial U}{\partial L} - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial L} (nkT) + m\omega^2 r \sin\theta \approx 0. \quad (17)$$

这里  $\frac{\partial}{\partial L}$  表示沿磁力线方向的导数.

## 五、电子的逃逸

由于扩散, 一些电子将落到约束装置的壁上而损失. 为了研究的方便, 可以沿壁的内表面划出一个封闭的边界面, 边界面内为约束区域. 我们认为一个电子一旦逸出就不可能再返回约束区域.

现在计算由边界面上一点附近逸出的电子流密度  $j$ . 电子的角向运动对  $j$  没有贡献, 可以不考虑. 由于电子扩散速度较小, 近似地认为各个电子的速度  $\omega$  遵循 Maxwell 分布, 其分布函数为

$$f(\omega) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2kT}\right). \quad (18)$$

当边界与磁力线垂直时电子进行纵向逃逸,

$$j = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{\infty} \omega^3 f(\omega) d\omega = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}, \quad (19)$$

$\theta$  为  $\omega$  与磁力线的夹角。当边界与磁力线平行时电子进行横向逃逸, 此时电子穿越边界需要依靠碰撞。由于碰撞, 一些电子的导向中心将向外移动, 单位时间内它们在垂直于磁力线方向上移动量的平均值为  $\frac{\nu}{Q^2} \overline{\mathbf{Q} \times \boldsymbol{\omega}^{(9)}}$ , 因此

$$j = \frac{n\nu}{Q} \overline{\boldsymbol{\omega} \sin \theta} = \frac{2\pi\nu}{Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^\infty \omega^3 f(\boldsymbol{\omega}) d\omega = \frac{n\nu}{2Q} \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}. \quad (20)$$

式(19)、(20)表明电子的横向逃逸比纵向逃逸小得多, 常可忽略。当边界与磁力线成  $\alpha$  角时,

$$j = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \sin \alpha. \quad (21)$$

设电子云中电子总数为  $N$ , 根据由电离产生的电子和逸出电子之间的平衡关系, 有

$$N\bar{Z} = \iint j dA. \quad (22)$$

$\bar{Z}$  为电子云中电离频率的平均值,  $dA$  为面元, 积分对整个边界面进行。定义  $V_e = N/n_0$  为电子云的等效体积,  $\sigma = j/n_0$  为边界上一点附近的泄漏因子, 上式可改写为

$$V_e = \frac{1}{\bar{Z}} \iint \sigma dA. \quad (23)$$

如果电子云处于近平衡态则

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right) \sin \alpha. \quad (24)$$

## 六、电子云中的能量输运

Illic 的方程组中略去了热导项。在研究电子云中的能量输运时有必要补上这一项此时方程(3)变为

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{5}{2} kT \right) = e \mathbf{v} \cdot \nabla U - \frac{1}{n} \nabla \cdot \mathbf{q} - Z \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{5}{2} kT + E_i \right). \quad (25)$$

$\mathbf{q}$  为热流密度, 它可由热传导方程

$$\frac{5nkT}{2m} \nabla(kT) + \frac{e}{m} \mathbf{q} \times \mathbf{B} + \nu \mathbf{q} = 0 \quad (26)$$

计算。在轴对称系统中上式可写作

$$\frac{5nkT}{2m} \frac{\partial}{\partial r} (kT) + \frac{e}{m} q_\varphi B_z + \nu q_r = 0,$$

$$\frac{5nkT}{2m} \frac{\partial}{\partial z} (kT) - \frac{e}{m} q_\varphi B_r + \nu q_z = 0,$$

$$\frac{e}{m} (q_z B_r - q_r B_z) + \nu q_\varphi = 0. \quad (27)$$

利用式(26)和式(12)的类似性可导出

$$q_L = -\frac{5nkT}{2m\nu} \frac{\partial}{\partial L}(kT),$$

$$q_N = -\frac{5m\nu kT}{2m(\Omega^2 + \nu^2)} \frac{\partial}{\partial N}(kT). \quad (28)$$

$q_L, \frac{\partial}{\partial L}(kT)$  为  $\mathbf{q}, \nabla(kT)$  在磁力线方向的分量,  $q_N, \frac{\partial}{\partial N}(kT)$  为  $\mathbf{q}, \nabla(kT)$  在  $(r, z)$  平面上垂直于磁力线的分量. 由于  $\nu$  很小, 为了使  $q_L$  不过大,  $\frac{\partial}{\partial L}(kT)$  只能取很小的值.

电子云中的能流密度

$$\mathbf{S} = n\mathbf{v} \left( \frac{1}{2} m\nu^2 + \frac{5}{2} kT \right) + \mathbf{q}. \quad (29)$$

利用式(1)可将式(25)改写为更简单的形式

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = en\mathbf{v} \cdot \nabla U - ZnE_i. \quad (30)$$

与式(19)–(21)类似, 可计算由边界上一点附近逸出的电子流所带走的能量. 当边界与磁力线垂直时,

$$S = \frac{1}{2} j m \omega^2 r^2 + \pi m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\infty} w^5 f(w) dw = j \left( \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + 2kT \right).$$

当边界与磁力线平行时,

$$S = \frac{1}{2} j m \omega^2 r^2 + \frac{\pi m \nu}{\Omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{\infty} w^5 f(w) dw = j \left( \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + 2kT \right).$$

显然它与边界和磁力线夹角无关, 都有

$$S = j \left( \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + 2kT \right) = n_0 \sigma \left( \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + 2kT \right). \quad (31)$$

单位时间内电场加速电子所作的功为

$$\oiint jU dA - \iiint ZnU dV$$

前一项对整个边界面积分,  $dA$  为面元, 后一项对约束区域积分,  $dV$  为体元. 根据能量守恒, 这个功应等于电离消耗的能量和逸出电子带走的能量,

$$en_0 \oiint \sigma U dA - e \iiint ZnU dV = n_0 \bar{Z} V_e E_i + n_0 \oiint \sigma \left( \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + 2kT \right) dA$$

或

$$\oiint \sigma \left( eU - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right) dA = \bar{Z} V_e (E_i + 2kT_e) + \frac{e}{n_0} \iiint ZnU dV, \quad (32)$$

$T_e$  为逸出电子的平均温度

$$T_e = \frac{1}{\bar{Z} V_e} \oiint \sigma T dA. \quad (33)$$

以上研究了轴对称自持磁约束电子云中电子运动的流体方程组, 并对电子云中电子的扩散、逃逸和能量输运等过程进行了讨论. 进一步的研究需要利用数值方法. 在本文

的下一部分中将对电子云中磁面的特性和数值计算方法进行研究。

本文初稿承徐建铭先生审阅,特此志谢。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] A. W. Trivelpiece, *Comm. Plasma Phys. Controlled Fusion*, 1(1972), 57.
- [ 2 ] R. C. Davidson, *Theory of Nonneutral Plasma*, Benjamin, Reading, MA, 1974.
- [ 3 ] H. W. Lefevre and R. Booth, *IEEE Trans.*, NS-26(1979), 3115.
- [ 4 ] W. Schunrman, *Physica*, 36(1967), 136.
- [ 5 ] D. B. Ilic, *J. Appl. Phys.*, 44(1973), 3993.
- [ 6 ] T. M. O'Neil and C. F. Driscoll, *Phys. Fluids*, 22(1979), 266.
- [ 7 ] 郁庆长, *高能物理与核物理*, 13(1989), 298.
- [ 8 ] 郁庆长, *原子能科学技术*, 21(1987), 666.
- [ 9 ] В. Е. Голант и др., *Основы Физики Плазмы*, Атомиздат, Москва, 1977.

## THE FLUID THEORY OF SELF-SUSTAINING MAGNETICALLY CONFINED ELECTRON CLOUDS (I) FLUID EQUATIONS

YU QINGCHANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing*)

### ABSTRACT

In this paper the axisymmetrical self-sustaining magnetically confined electron clouds are studied by means of the fluid theory. In the electron clouds which supported by the Penning discharge the property of motion of electrons can be described by the fluid equations: continuity equation, momentum equation, energy equation, Poisson equation and heat transfer equation. The problems of the diffusion and escape of electrons and the energy transport in the electron clouds are discussed.