第14卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 14, No. 2
1990年2月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1990

轻核中的 $U(90)$ 动力学对称性

李光华　　贺慧勇
（长沙水电师范学院）

摘　　要

在 IBM4 中，当存在 s、d、g 玻色子时，体系的对称性群为 $U(90)$. 本文研究了子群链:

$$U_{90} \supset U_{15}(sdg) \times U_6(ST) \supset SU_{15}(sdg) \times U_6(ST) \supset SU_5(sdg) \times O_6(ST)$$
$$\supset SO_5(dg) \times O_3(S) \times O_3(T) \supset O_3(dg) \times O_3(S) \times O_3(T) \supset O_3(J) \times O_3(T),$$

给出了约化规则和典型能谱，并在轻核中找到了具有这种动力学对称性的能谱的例子，偶偶核 ^{34}S 与奇奇核 ^{34}Cl 在一个多重态中.

一、引　　言

相互作用玻色子模型（IBM）成功地唯象地描述了中重和重偶偶核低集体激发态[1]. 对于轻核，由于质子与中子处于同一壳，就必须引入同位旋. 将 IBM 推广用于轻核就叫 IBM4[2]，体系的对称性群是 $U(36)$[3]. 本文把价核子对看成是玻色子，其轨道角动量 $l=0$、2 或 4，自旋 s 与同位旋 τ 的组合为 $s=0$、$\tau=1$ 或 $s=1$、$\tau=0$. 由于我们仍认为玻色子数守恒，故体系的对称性群是 U_{90}. 本文讨论了它的一条子群链和约化规则，并给出了一个例子: ^{34}S 与 ^{34}Cl.

二、U_{90} 的群结构

设 $b^+_{lmsm_s\tau m_\tau}$ 与 $b_{lmsm_s\tau m_\tau}$ ($l=0$、2、4; $s=0, \tau=1$; $s=1, \tau=0$; $m=l, l-1, \cdots, -l$; $m_s=s, s-1, \cdots, -s$; $m_\tau=\tau, \tau-1, \cdots, -\tau$) 为玻色子的产生与湮灭算符，则 U_{90} 的生成元可以写为

$$B_{(ls\tau, l's'\tau')}\begin{matrix} K & S & T \\ q & M_S & M_T \end{matrix} = \sum_{\substack{mm_sm_\tau \\ m'm'_sm'_\tau}} \langle lm, l'm' | Kq \rangle \langle sm_s, s'm'_s | SM_S \rangle$$
$$\cdot \langle \tau m_\tau, \tau' m'_\tau | TM_T \rangle b^+_{lmsm_s\tau m_\tau} \tilde{b}_{l'm's'm'_s\tau'm'_\tau} \qquad (1)$$

其中 $\tilde{b}_{lmsm_s\tau m_\tau} = (-)^{l+m+s+m_s+\tau+m_\tau} b_{l-ms-m_s\tau-m_\tau}$，它们满足对易关系

本文 1988 年 7 月 28 日收到.

$$\begin{aligned}
&\left[B_{(l_1s_1\tau_1,l_2s_2\tau_2)}{}^{K_1\ S_1\ T_1}_{q_1\ M_{S_1}\ M_{T_1}},\ B_{(l_3s_3\tau_3,l_4s_4\tau_4)}{}^{K_2\ S_2\ T_2}_{q_2\ M_{S_2}\ M_{T_2}}\right] \\
&= \sum_{\substack{KST\\ qM_SM_T}} (-)^{q+M_S+M_T}[K_1, K_2, K, S_1, S_2, S, T_1, T_2, T]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S \\ M_{S_1} & M_{S_2} & -M_S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T \\ M_{T_1} & M_{T_2} & -M_T \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \Big[(-)^{K_1+K_2+K+S_1+S_2+S+T_1+T_2+T}\delta_{l_2l_3}\delta_{s_2s_3}\delta_{\tau_2\tau_3} \\
&\quad \cdot \begin{Bmatrix} K_1 & K_2 & K \\ l_4 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} S_1 & S_2 & S \\ s_4 & s_1 & s_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ \tau_4 & \tau_1 & \tau_2 \end{Bmatrix} B_{(l_1s_1\tau_1,l_4s_4\tau_4)}{}^{K\ \ S\ \ T}_{q\ M_S\ M_T} \\
&\quad - \delta_{l_1l_4}\delta_{s_1s_4}\delta_{\tau_1\tau_4}\begin{Bmatrix} K_1 & K_2 & K \\ l_3 & l_2 & l_1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} S_1 & S_2 & S \\ s_3 & s_2 & s_1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ \tau_3 & \tau_2 & \tau_1 \end{Bmatrix} \\
&\quad \cdot B_{(l_3s_3\tau_3,l_2s_2\tau_2)}{}^{K\ \ S\ \ T}_{q\ M_S\ M_T}\Big],
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $[K_1, K_2, \cdots, K_n]^{\frac{1}{2}} = [(2K_1+1)(2K_2+1)\cdots(2K_n+1)]^{\frac{1}{2}}$.

我们考虑 U_{90} 的如下群链：

$$\begin{aligned}
&U_{90} \supset U_{15}(sdg) \times U_6(ST) \supset SU_{15}(sdg) \times U_6(ST) \supset SU_5(sdg) \times O_6(ST) \\
&\supset SO_5(dg) \times O_3(S) \times O_3(T) \supset O_3(dg) \times O_3(S) \times O_3(T) \supset O_3(J) \times O_3(T).
\end{aligned} \tag{3}$$

$U_{15}(sdg)$ 群的生成元为，

$$B_{(l,l')}{}^{K}_{q} = \sum_{s,\tau}[(2s+1)(2\tau+1)]^{\frac{1}{2}} B_{(ls\tau,l's\tau)}{}^{K\ 0\ 0}_{q\ 0\ 0}, \tag{4}$$

其中 l、$l' = 0$、2、4；$K = |l-l'|, |l-l'|+1, \cdots, l+l'$；$q = -K, -K+1, \cdots, K$. 利用 (2) 式可以求出它们满足的对易关系．将它们去迹，就得 $SU_{15}(sdg)$ 群的生成元，我们记 $SU_{15}(sdg)$ 群的不可约表示，

$$\{f_1, f_2, f_3, \cdots, f_{14}\} \equiv \{f_1, f_2\},\ 当\ f_3 = f_4 = \cdots = f_{14} = 0\ 时.$$

$SU_5(sdg)$ 群的生成元为

$$U^1_q = \sqrt{10}B(2,2)^1_q + \sqrt{60}B(4,4)^1_q \equiv L_q, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
U^2_q =& 2\sqrt{2}[B(2,0)^2_q + B(0,2)^2_q] - \frac{3}{7}\sqrt{10}B(2,2)^2_q \\
&+ \frac{12}{7}\sqrt{2}[B(2,4)^2_q + B(4,2)^2_q] + \frac{6}{7}\sqrt{55}B(4,4)^2_q,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$U^3_q = \frac{30}{7}[B(2,4)^3_q + B(4,2)^3_q] - \frac{8}{7}\sqrt{10}B(2,2)^3_q + \frac{3}{7}\sqrt{110}B(4,4)^3_q, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
U^4_q =& 2\sqrt{2}[B(0,4)^4_q + B(4,0)^4_q] + \frac{1}{7}\sqrt{286}B(4,4)^4_q \\
&+ \frac{10}{7}\sqrt{11}[B(2,4)^4_q + B(4,2)^4_q] + \frac{4}{7}\sqrt{10}B(2,2)^4_q,
\end{aligned} \tag{8}$$

$SO_5(dg)$ 的生成元为 U_q^1 和 U_q^2，$SO_3(dg)$ 的生成元为 $U_q^1 \equiv L_q$. 记 $SU_5(sdg)$ 的 $IR[g_1, g_2, g_3, g_4] \equiv [g_1, g_2]$，当 $g_3 = g_4 = 0$ 时. 记 $SO_5(dg)$ 群的不可约表示为 (τ_1, τ_2).

$U_6(ST)$ 群的生成元为

$$B_{(s\tau, s'\tau')} \begin{matrix} S & T \\ M_S & M_T \end{matrix} = \sum_l (2l+1)^{\frac{1}{2}} B_{(ls\tau, ls'\tau')} \begin{matrix} 0 & S & T \\ 0 & M_S & M_T \end{matrix}, \qquad (9)$$

利用(2)式可以得到它们满足的对易关系. $O_6(ST)$、$O_3(S)$、$O_3(T)$ 与 $O_3(J)$ 的生成元见文献[4].

三、动力学对称性与能谱

对于由 n 个玻色子组成的体系，U_{90} 的不可约表示是全对称表示 $\{n\}$. 利用 Schur 函数可以得到(3)式的约化规则. $U_{90} \supset U_{15}(sdg) \times U_6(ST)$ 的约化为

$$\{n\} = \sum_{\nu} \{\nu\}_{U_{15}(sdg)} \times \{\nu\}_{U_6(ST)}, \qquad (10)$$

其中 ν 是 n 的一个配分，部份数不超过 6. $SU(15) \supset SU(5)$ 的约化为 $\{f,0\} = \sum_{\nu} \{\nu\}$.

表 1 $SU(15)$ 到 $SU(5)$ 的约化

$\{f, 1\}$	$[g_1, g_2, g_3, g_4]$
{1,1}	[3,1]
{2,1}	[5,1] [4,2] [3,2,1]
{3,1}	[7,1] [6,2] [5,3] [5,2,1] [4,3,1] [4,2,2] [3,2,2,1]
{4,1}	[9,1] [8,2] [7,3] [6,4] [7,2,1] [6,3,1] [5,4,1] [5,3,2] [5,2,2,1] [4,4,2] [4,3,2,1] [4,2,2,2] [2,1,1,1]
{5,1}	[11,1] [10,2] [9,3] [8,4] [7,5] [9,2,1] [8,3,1] [8,2,2] [7,4,1] [7,3,2] [7,2,2,1] [6,5,1] [6,4,2]^2 [6,3,2,1] [6,2,2,2] [5,4,3] [5,4,2,1] [5,3,2,2] [4,4,3,1] [4,4,2,2] [4,1,1,1] [3,2,1,1] [2]
{6,1}	[13,1] [12,2] [11,3] [10,4] [9,5] [8,6] [11,2,1] [10,3,1] [10,2,2] [9,4,1] [9,3,2] [9,2,2,1] [8,5,1] [8,4,2]^2 [8,3,2,1] [8,2,2,2] [7,6,1] [7,5,2] [7,4,3] [7,4,2,1] [7,3,2,2] [6,6,2] [6,5,3] [6,5,2,1] [6,4,4] [6,4,3,1] [6,4,2,2]^2 [6,1,1,1] [5,4,4,1] [5,4,3,2] [5,2,1,1] [4,4,4,2] [4,3,1,1] [4] [3,3,2,1] [3,1] [2,2]
{7,1}	[15,1] [14,2] [13,3] [12,4] [11,5] [10,6] [9,7] [13,2,1] [12,3,1] [12,2,2] [11,4,1] [11,3,2] [11,2,2,1] [10,5,1] [10,4,2]^2 [10,3,2,1] [10,2,2,2] [9,6,1] [9,5,2] [9,4,3] [9,4,2,1] [9,3,2,2] [8,7,1] [8,6,2]^2 [8,5,3] [8,5,2,1] [8,4,4] [8,4,3,1] [8,4,2,2]^2 [8,1,1,1] [7,6,3] [7,6,2,1] [7,5,4] [7,5,2,2] [7,4,4,1] [7,4,3,2] [7,2,1,1] [6,6,4] [6,6,3,1] [6,6,2,2] [6,5,4,1] [6,5,3,2] [6,4,4,2]^2 [6,3,1,1] [6] [5,4,4,3] [5,4,1,1] [5,3,2,1] [5,1] [4,3,3,1] [4,2]^2 [3,3,3,2,] [3,2,1] [2,2,2]

其中 $\{\nu\}$ 是 $2f$ 的偶配分(即各个部份都是偶数)，部份数不超过 5；当部份数为 5 时，$[\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5] = [\nu_1 - \nu_5, \nu_2 - \nu_5, \nu_3 - \nu_5, \nu_4 - \nu_5]$. $\{f, 1\}$ 的约化见表 1，$[6, 4, 2]^2$ 表示 $SU(5)$ 的 $IR[6, 4, 2]$ 出现两次.

$SU(5) \supset SO(5)$ 的约化，对于 $[g_1, g_2]$，文献[5]附录给出了迭推公式，这里给出一般公式：

$$[2n, 2m] = \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{2i} (2k+1-j, 2i-j) + \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{i} (2m-2l, 2i-2l), \quad (n \geqslant m) \tag{11}$$

$$[2n+1, 2m] = \sum_{k=m}^{n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{2i} (2k+1-j, 2i-j), \quad (n \geqslant m) \tag{12}$$

$$[2n, 2m+1] = \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{2i+1} (2k-j, 2i+1-j), \quad (n > m) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}[2n+1, 2m+1] = & \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{2i+1} (2k+1-j, 2i+1-j) \\ & + \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{i} (2m-2l+1, 2i-2l+1), \quad (n \geqslant m)\end{aligned} \tag{14}$$

当 $SU(5)$ 的 $IR[g_1g_2g_3g_4]$ 中不为 0 的部份的数目超过 2 时，其约化见表 2.

$SO(5) \supset SO(3)$ 的约化，对于 $(\tau_1, 0)$ 是大家都熟知的；对于 $(\tau_1, 1)$，有 $(1,1) = (1)+(3)$，$\tau_1 > 1$ 时有迭推关系：$(\tau_1, 1) - (\tau_1 - 1, 1) = (\tau_1) + (\tau_1 + 2) + (\tau_1 + 3) + \cdots + (2\tau_1) + (2\tau_1 + 1)$；$(\tau_1, 2)$ 中包含 L 的次数 K 见表 3.

至于 $U_6(ST) \supset O_6(ST) \supset O_3(S) \times O_3(T)$ 的约化，可参看文献[4].

若原子核体系具有群链(3)的动力学对称性，则其波函数近似为

$$\left| \begin{matrix} U_{90} SU_{15}(sdg) & SU_5(sdg) & SO_5(dg) & O_3(dg) O_6(ST) & O_3(S) & O_3(T) & O_3(J) \\ \{n\} & \{f_1 f_2\} & \xi_1 [g_1 g_2 g_3 g_4] \xi_2 (\tau_1 \tau_2) & \nu_\Delta \quad L \quad \langle \mu_1 \mu_2 \mu_3 \rangle & S & T & J \end{matrix} \right\rangle$$

表 2　$SU(5)$ 到 $SO(5)$ 的约化

$[g_1, g_2, g_3, g_4]$	[1110]	[1111]	[2110]	[2111]	[2210]
(τ_1, τ_2)	(11)	(10)	(21) (11)	(20) (11)	(22) (21) (10)
$[g_1, g_2, g_3, g_4]$	[2211]	[2220]	[2221]	[2222]	[3110]
(τ_1, τ_2)	(21) (11)	(22) (20) (00)	(21) (10)	(20) (00)	(31) (21) (11)
$[g_1, g_2, g_3, g_4]$	[3111]	[3210]	[3211]	[3220]	[3221]
(τ_1, τ_2)	(30) (21) (10)	(32) (31) (22) (21) (20) (11)	(31) (22) (21) (20) (11)	(32) (30) (22) (21) (10)	(31) (22) (21) (20) (11)
$[g_1, g_2, g_3, g_4]$	[3222]	[3310]	[3311]	[3320]	[3321]
(τ_1, τ_2)	(30) (21) (10)	(33) (32) (31) (21) (11)	(32) (30) (22) (21) (10)	(33) (32) (31) (21) (11)	(32) (31) (22) (21) (20) (11)

$[g_1, g_2, g_3, g_4]$	[3330]	[3331]	[3332]	[3333]
(τ_1, τ_2)	(33) (31) (11)	(32) (30) (21) (10)	(31)(20)(11)	(30) (10)

表 3 $(\tau_1, 2)$ 所包含的 L 值及其重复度 K

τ_1 \ L (K)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
2	1	0	1	1	1	0	1																				
3	0	1	2	1	2	2	1	1	1																		
4	1	1	2	2	3	2	3	2	2	1	1																
5	1	1	2	3	3	3	4	3	3	3	2	1	1														
6	0	1	3	2	4	4	4	4	5	3	4	3	2	1	1												
7	1	1	2	3	4	4	5	5	5	5	5	4	4	3	2	1	1										
8	1	1	2	3	4	4	6	5	6	6	6	5	6	4	4	3	2	1	1								
9	0	1	3	2	4	5	5	6	7	6	7	7	6	6	6	4	4	3	2	1	1						
10	1	1	2	3	4	4	6	6	7	7	8	7	8	7	7	6	6	4	4	3	2	1	1				
11	1	1	2	3	4	4	6	6	7	8	8	8	9	8	8	8	7	6	6	4	4	3	2	1	1		
12	0	1	3	2	4	5	5	6	8	7	9	9	9	9	10	8	8	7	7	6	6	4	4	3	2	1	1

其哈密顿量可用(3)中各子群的 Casimir 算符表示:

$$H = E_0 C_{1U_{90}(sdg)} + AC_{2SU_{15}(sdg)} + BC_{2SU_5(sdg)} + CC_{2SO_5(dg)} + DC_{2O_3(dg)} + \alpha C_{2O_6(ST)} + \beta C_{2O_3(S)} + \delta C_{2O_3(T)} + \gamma C_{2O_3(J)}$$

对于低能态，只需考虑 $U_{15}(sdg)$ 和 $U_6(ST)$ 的全对称表示 $\{n, 0\}$，而且只需考虑 $SU_5(sdg)$ 的 $IR[2n, 0]$，这时哈密顿量的本征值为

$$E = E_0' + C\tau(\tau + 3) + DL(L + 1) + \beta S(S + 1) + \delta T(T + 1) + \gamma J(J + 1). \quad (15)$$

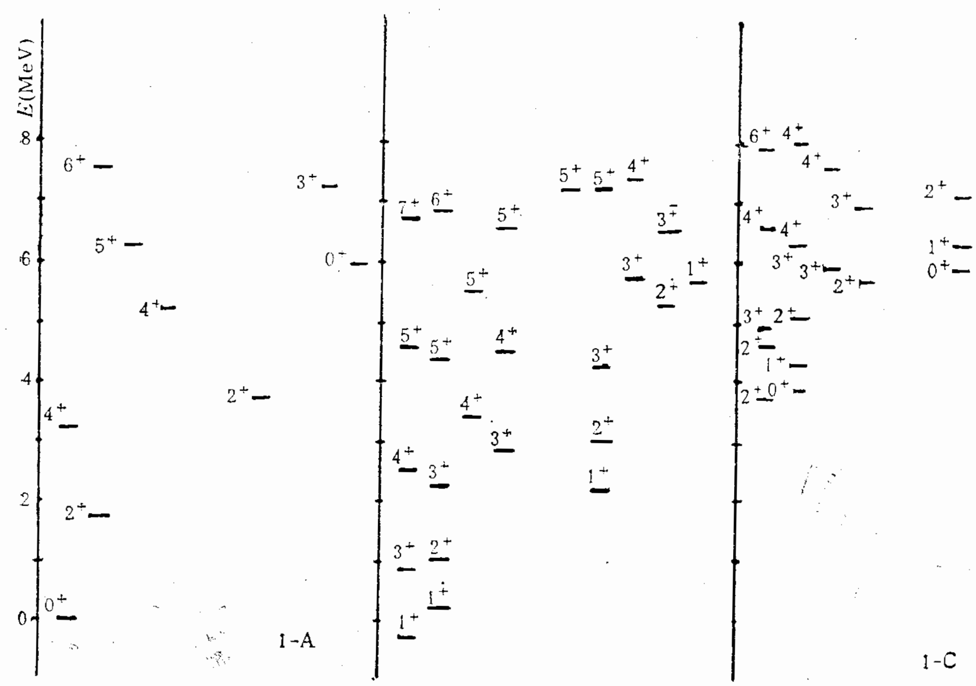

图 1 典型能谱 $(n = 3)$. 1-A 与 1-C 给出了偶偶核的同位旋 $T = 1$ 的低能态，1-B 给出了奇奇核的同位旋 $T = 0$ 的低能态

和 IBM4[4]类似，在 U_{90} 模型中也考虑了同位旋守恒与玻色子数守恒，故具有相同玻色子数的偶偶核与奇奇核形成一个多重态，其低能态能谱可用同一组参数由 (15) 式表示．这时能量较低的有如下一些态：

$$\mathrm{A}\quad |\{n\}\ \{n, 0\}\ [2n, 0]\ (\tau_1, \tau_2)\ \nu_\Delta\ L;\ \langle n, 0\rangle\ 0\ T\ J\rangle, \tag{16}$$

$$\mathrm{B}\quad |\{n\}\ \{n, 0\}\ [2n, 0]\ (\tau_1, \tau_2)\ \nu_\Delta\ L;\ \langle n, 0\rangle\ 1\ T\ J\rangle, \tag{17}$$

$$\mathrm{C}\quad |\{n\}\ \{n, 0\}\ [2n, 0]\ (\tau_1, \tau_2)\ \nu_\Delta\ L;\ \langle n, 0\rangle\ 2\ T\ J\rangle. \tag{18}$$

当 $n=3$ 时，利用(15)式可以算出它们的典型能谱（图 1）．$E_0^1 = -1.8$ MeV，$C = 0.11$

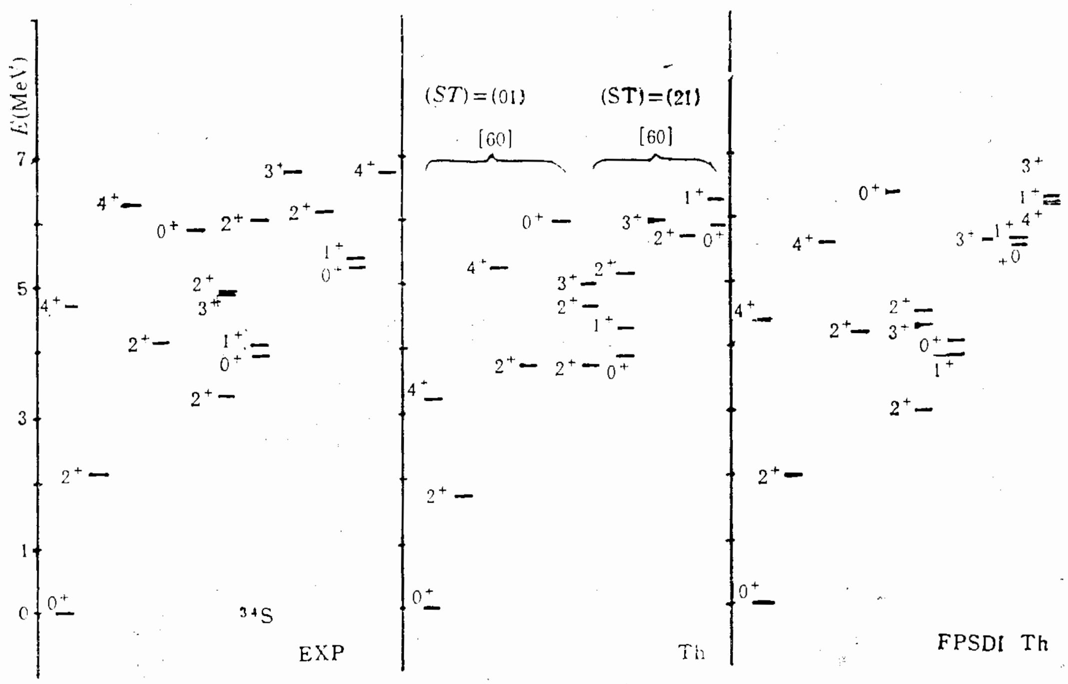

图 2　偶偶核的例子：34S

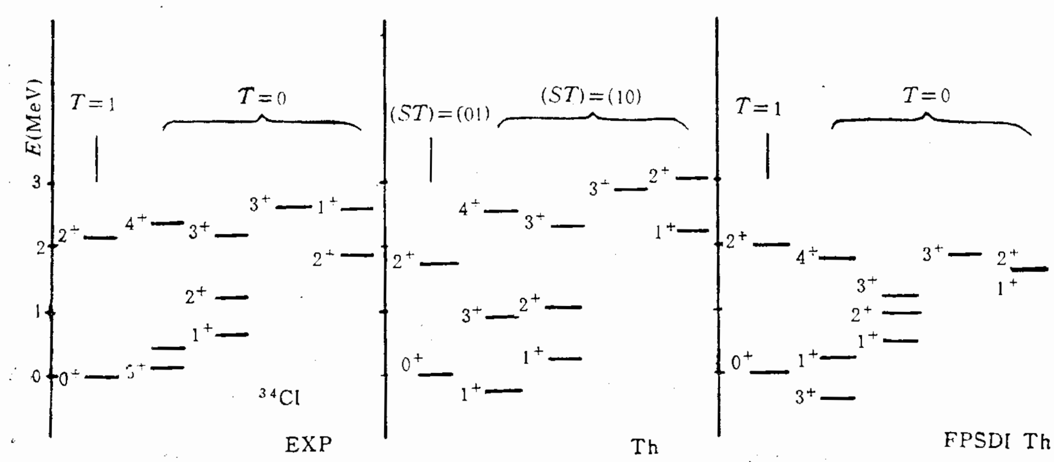

图 3　奇奇核的例子：34Cl

MeV, $D=-0.1$ MeV, $\beta=0.56$ MeV, $\delta=0.9$ MeV, $\gamma=0.206$ MeV. 在图2与图3中,分别对 ^{34}S 与 ^{34}Cl 给出了理论值与实验值[6]及用自由参数表面 δ 相互作用哈密顿量 FPSDI 算得之结果[7]的比较.

四、讨论

关于中重和重偶偶核,已经有许多作者讨论过 g 玻色子的影响[8,9,10]. 我们由图1-A的[60] ($SU(5)$ 的 IR) 能谱可以看出,它与 IBM1 $O(6)$ 极限中相应部份有些类似[10], 但不出现 $(\tau, 0)$($SO(5)$ 的 IR) 中 τ 为奇数的谱线. 正是由于这一点,当我用 sd 玻色子的 IBM4 $O(6)$ 极限同时拟合 ^{34}S 和 ^{34}Cl 的实验能谱时, 对 ^{34}Cl 不能得到很低的 3_1^+ 态. 当然, 与实验比较, 我们的结果还不够好. 例如, ^{34}Cl 的 $J^\pi=3_1^+$, 实验值是 0.146MeV,是第二低的能级,但我们的理论值为 0.892MeV,是第四低的能级. 另外,本文只考虑了能谱,尚需进一步计算 $E2$ 跃迁.

作者感谢清华大学孙洪洲教授的帮助.

参考文献

[1] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys.*, (N. Y) **99**(1976), 253; **111**(1978), 201; **123** (1979), 468.
[2] P. Halse, J. P. Elliott and J. A. Evans, *Nucl. Phys.*, **A417** (1984), 301.
[3] Li Guanghua, Sun Hongzhou and Han Qizhi, Commun. *in Theor. Phys.*, **7**(1987), 303.
[4] Han Qizhi, Sun Hongzhou and Li Guanghua, *Phys. Rev.*, **C35**(1987), 786.
[5] Chen Xuejun, Zhang Mei, Sun Hongzhou and Han Qizhi, *Sci. Sin.*, **A25**(1982), 834.
[6] P. M. Endt and C. Van der Leun, *Nucl. Phys.*, **A310**(1978), 1.
[7] B. H. Wildenthal, J. B. McGrory, E. C. Halbert and H. D. Graber, *Phys. Rev.*, **C4**(1971), 1708.
[8] Sun Hongzhou M Moshinsky, A. Frank and P. Van Isacker, Kinam, **5**(1983), 135.
[9] Wu Huachuan, *Phys Lett.*, **110B**(1982), 1.
[10] 凌寅生,高能物理与核物理,**6**(1982),77.

THE U(90) DYNAMICAL SYMMETRY IN LIGHT NUCLEI

Li Guanghua He Huiyong

(*Changsha Normal University of Mater Resources and Electric Power*)

Abstract

In the IBM4, when s. d. g bosons are presented, the symmetry group of the system is $U(90)$. In this paper, the group chain.

$$U_{90}\supset U_{15}(sdg)\times U_6(ST)\supset SU_{15}(sdg)\times U_6(ST)\supset SU_5(sdg)$$
$$\times O_6(ST)\supset SO_5(dg)\times O_3(S)\times O_3(T)\supset O_3(dg)\times O_3(S)\times O_3(T)\supset O_3(J)\times O_3(T)$$

is discussed, the reduction rules and the typical energy spectra are obtained. An example of a spectrum with this dynamical symmetry is found out, where the even-even nucleus ^{34}S and odd-odd nucleus ^{34}Cl are in one multiplet.