第 15 卷 第10期　高能物理与核物理　Vol. 15, No. 10
1991 年 10 月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Oct., 1991

量子 Virasoro 代数的中心扩张

胡　占　宁
(西北大学现代物理所，西安 710069)

摘　　要

本文给出了量子参数 q 取单位根时的雅可比恒等式，在此基础上求出了 q 为 Beraha 值时的量子 Virasoro 代数中心项的一般表达式。

一、引　　言

李代数的量子化或称 q 参数化，形成 QUE 代数 (quantized universal enveloping algebras)。QUE 代数与量子群的关系类似于李代数与通常群的关系，这种李代数的 q 参数化是 L. D. Faddeev[1]. P. P. Kulish[2] 等人对量子杨——Baxter 方程解的研究中，作为一种基本的代数关系而引入的。进一步的研究表明，QUE 代数出现于许多精确可解模型、共形场理论等物理及数学感兴趣的领域[1-11]。QUE 代数的特点在于当其参数 q 趋近于 1 时，将给出通常的李代数，这与量子理论中 $\hbar\to 0$ 时给出对应的经典理论相类似，正是在这种意义上，QUE 代数称为李代数的"量子化"。

近来，对 QUE 代数的研究引起了人们的普遍重视。T. Curtright[12] 及 C. Zachos[13] 等人对 QUE 代数的结构进行了仔细分析，给出了量子化 $SU_{(2)}$ 的具体函数关系。我国学者讨论了 QUE 代数的量子 Clebsch-Gordan 系数及 Racah 系数[11]，并研究了 QUE 代数的表示理论[14]。作为研究 QUE 代数的物理应用的重要一环，文献[15]给出了 q 参数化的雅可比恒等式及无中心项的量子 Virasoro 代数。N. Aizawa 及 H. Sato[16] 进一步得出了含有中心项的量子 Virasoro 代数；但其结论不适合 q 取单位根的情况，而 q 取单位根的情形恰好是物理上很感兴趣的问题之一[17-19]。

本文旨在讨论 q 取 Beraha 值的量子 Virasoro 代数；通过对文献[16]中雅可比关系式的修正，得到了适用于 q 取单位根的具有中心的量子 Virasoro 代数。全文分四部分，第二部分在证明无法用文献[15]给出的雅可比恒等式进行量子 Virasoro 代数中心扩张的基础上，给出了修正的雅可比恒等式，以此为依据进行量子 Virasoro 代数的中心扩张，求出了中心项满足的约束关系；在第三部分中，对此关系进行具体分析，得出了中心项的明确表达式；最后给出其一般表达式。

本文 1990 年 12 月 11 日收到.

二、q 参数化的雅可比恒等式及量子 Virasoro 代数中心项的约束关系

1. 雅可比恒等式

按照 E. Witten[5] q 参数化的方法，可以定义[15]：

$$[A, B]_r = rAB - \frac{1}{r}BA. \tag{1}$$

若 q 为非单位根，T. Curtright 及 C. Zachos[12,13] 得出无中心的量子 Virasoro 代数的产生子满足：

$$[L_n, L_m]_{q^{m-n}} = [n-m]L_{n+m}, \tag{2}$$

其中 $[x] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$. 在此基础上，文献 [16] 给出了具有中心项的量子 Virasoro 代数：

$$[L_n, L_m]_{q^{m-n}} = [n-m]L_{n+m} + \frac{q^2+q^{-2}}{q^n+q^{-n}}c_2\frac{[n+1][n][n-1]}{[3]!}\delta^0_{n+m}. \tag{3}$$

当 $q \to 1$ 时，就退化为普通的 Virasoro 代数[20]：

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta^0_{n+m}. \tag{4}$$

定义 $\delta^0_{n-m}\mathrm{mod}(p) = \begin{cases}1; & 若\ n-m = Kp \\ 0; & 若\ n-m \neq Kp\end{cases}$　（K 为整数）.

若 q 可取单位根，无中心的量子 Virasoro 代数对易子(2)应改写为：

$$[L_n, L_m]_{q^{m-n}} = [n-m]L_{n+m} + q^{n-m}(n-m)\delta^0_{n-m}\mathrm{mod}(p)L_{n+m}, \tag{5}$$

这里，可把 q 为非单位根(或者取 1)的情形理解为 $p \to +\infty$，因而上式第二项实际上为零；否则，若 q 取单位根，$q = e^{\frac{i\pi}{p}}$，$p = 3,4,5,\cdots$，这就是 q 为 Beraha 值的情况.

下面讨论量子 Virasoro 代数的中心扩张：

$$[L_n, L_m]_{q^{m-n}} = [n-m]L_{n+m} + q^{n-m}(n-m)\delta^0_{n-m}\mathrm{mod}(p)L_{n+m} + c_{(n,m)}. \tag{6}$$

显然，$c_{(n,m)} = -c_{(m,n)}$，由定义式(1)容易证明：

$$[L_n, [L_m, L_l]_{q^{l-m}}]_{q^{m+l-2n}} + (n, m, l)的轮换项 = 0, \tag{7}$$

其中，(n,m,l) 轮换项定义为将其角标 n,m,l 作轮换而得到的项，比如 $A_nB_mC_l$ 的(n,m,l) 轮换项就是 $A_mB_lC_n$ 及 $A_lB_nC_m$，下面的定义与此相同。(7)式也可以从文献[15]中的 q 参数化雅氏恒等式而得到.

令：
$$a_{n-m} = [n-m] + q^{n-m}(n-m)\delta^0_{n-m}\mathrm{mod}(p). \tag{8}$$

若假定量子 Virasoro 代数的产生子 L_n 与任意复数 $\mathbf{C}$ 间仍有 $L_n\mathbf{C} = \mathbf{C}L_n$，采用 P. Goddard 和 D. Olive[20]的方法，把(6)代入(7)中，并考虑到由 (5) 式表示的无中心的量子 Virasoro 代数(7)式仍成立，可得：

$$a_{m-l}c_{(n,m+l)} + a_{l-n}c_{(m,l+n)} + a_{n-m}c_{(l,n+m)}$$
$$= (q-q^{-1})([2n-m-l]c_{(m,l)}L_n + [2m-l-n]c_{(l,n)}L_m$$

$$+[2l-n-m]c_{(n,m)}L_l), \tag{9}$$

这一等式左边项为复数,右边项却是算子式,若 $q-q^{-1}\neq 0$,则:

$$[2n-m-l]c_{(m,l)}L_n+(n,m,l)\text{的轮换项}=0. \tag{10}$$

于是: $c_{(m,l)}=\lambda\delta^0_{2n-m-l}\mathrm{mod}(p)$, 这意味着量子 Virasoro 产生子 L_m, L_l 间的对易式与另一算子 L_n 的角标 n 有关,这点是难以理解的. 可见, 利用(7)无法进行量子 Virasoro 代数的中心扩张.

下面给出"修正"的雅可比恒等式.

采用 N. Aizawa 及 H. Sato[16] 的约定,记量子 Virasoro 代数产生子张成的空间为 V,则:

$$\forall X,\ Y\in V:\ [X,Y]=(XY)_q-(YX)_q, \tag{11}$$

其中$(\ \ )_q$表示产生子 L_n 的多项式的双线性括号,并满足:

$$\begin{aligned}&(aL_n)_q=(L_na)_q=aL_n\quad(a\in\mathbb{C}),\\&\Big(\sum_n\alpha_nL_n\sum_m\beta_mL_m\Big)_q=\sum_{nm}\alpha_n\beta_m(L_nL_m)_q,\\&(L_nL_m)_q=q^{-n}L_nL_mq^m.\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\alpha_n,\beta_m\in\mathbb{C}$; 这样, (3)、(5)、(6)式左边项 $[L_n,L_m]_{q^{m-n}}$ 均可记为 $[L_n,L_m]$; 比如:

$$[L_n,L_m]=a_{n-m}L_{n+m}. \tag{5'}$$

$$[L_n,L_m]=a_{n-m}L_{n+m}+c_{(n,m)}. \tag{6'}$$

容易证明,(5′)式满足:

$$\begin{aligned}(q^n+q^{-n})(1-\delta^0_{m-l}\mathrm{mod}(p))(1-\delta^0_{n-m-l}\mathrm{mod}(p))[L_n,[L_m,L_l]]\\+(n,m,l)\text{的轮换项}=0.\end{aligned} \tag{13}$$

显然, q 取非单位根时,上式就退化为文献 [16] 的 (8) 式; $q\to 1$ 时, 就退化为普通的雅可比关系式. 这就是所求得的 q 参数化雅可比关系式. 下面就以 (13) 为基础进行量子 Virasoro 代数的中心扩张.

2. 量子 Virasoro 代数中心项的约束关系

把(6′)代入(13),并考虑到对于(5′),(13)仍成立,我们得到:

$$(q^n+q^{-n})(1-\delta^0_{n-m-l}\,\mathrm{mod}(p))[m-l]c_{(n,m+l)}+(n,m,l)\text{的轮换项}=0. \tag{14}$$

由变换 $L_m\to L_m+c_{(0,m)}/a_{m-0}\quad(m\neq 0)$;

$L_0\to L_0+c_{(1,-1)}/a_{-1-1}$.

可以发现,不失一般性,我们取:

$$c_{(0,m)}=c_{(m,0)}=c_{(1,-1)}=0. \tag{15}$$

令 $n=0$,由(14)、(15)得:

$$(1-\delta^0_{m-l}\mathrm{mod}(p))[m+l]c_{(m,l)}=0. \tag{16}$$

于是,中心项 $c_{(m,l)}$ 可写为:

$$c_{(m,l)}=\lambda'_{m,l}\delta^0_{m-l}\mathrm{mod}(p)+\lambda_{m,l}\delta^0_{m+l}\mathrm{mod}(p).$$

把此式代入(14)中有:

$$(q^n + q^{-n})(1 - \delta^0_{n-m-l}\mathrm{mod}(p))[m - l]\lambda_{n,m+l}\delta^0_{n+m+l}\mathrm{mod}(p)$$
$$+ (n, m, l)\text{的轮换项} = 0. \tag{17}$$

可见，$c_{(m,l)}$ 的约束关系式(14)对 $\lambda'_{m,l}$ 无限制；此时，$\delta^0_{m-l}\mathrm{mod}(p) = 1$，所对应的量子 Virasoro 代数的对易式与普通 Virasoro 代数对易式间至多相差一个负号，或者，完全相同。考虑到"经典"情形[20]，

$$c_{m+1,-m-1} = \frac{m+2}{m-1} c_{m,-m},$$

我们有：

$$c_{(n,m)} = \frac{c}{12} n(n^2 - 1)q^{n-m}\delta^0_{n-m}\mathrm{mod}(p)\delta^0_{n+m} + \lambda_{n,m}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p); \tag{18}$$

其中，

$$\begin{aligned} c &= \frac{96}{p(p^2-4)} \cdot c_{(p/2,-p/2)} \qquad p\ \text{为偶数}. \\ c &= \frac{12}{p(p^2-1)} \cdot c_{(p,-p)} \qquad p\ \text{为奇数}. \end{aligned} \tag{19}$$

并且，

$$\lambda_{n,m} = -\lambda_{m,n}, \lambda_{0,m} = \lambda_{m,0} = \lambda_{1,-1} = 0.$$

在(17)中取，$n = 1$，$l = -m - 1 + Sp$（S 为整数），并注意到 $p \geqslant 3$，可得：

$$\begin{aligned} &(q^{m+1} + q^{-m-1})(1 - \delta^0_{2m+2}\mathrm{mod}(p))[m - 1]\lambda_{m+1,Sp-m-1} \\ &= (q^m + q^{-m})(1 - \delta^0_{2m}\mathrm{mod}(p))[m + 2]\lambda_{m,Sp-m} \\ &\quad - (q + q^{-1})[2m + 1]\lambda_{1,Sp-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

对此约束关系式进行求解，并利用(18)，就可得到具有中心项的量子 Virasoro 代数。

三、量子 Virasoro 代数的中心项

如上所述，q 取 Beraha 值，即：$q = e^{\frac{i\pi}{p}}$，其中，$p = 3,4,5,\cdots$。若 $\delta^0_{2m+2}\mathrm{mod}(p) = 1$ 即 $2m + 2 = Kp$，由(20)可得：

$$\lambda_{m,Sp-m} = (-)^{K+1}\lambda_{1,Sp-1}. \tag{21}$$

同样地，当 $\delta^0_{2m}\mathrm{mod}(p) = 1$，即 $2m = Kp$，我们有：

$$\lambda_{m+1,Sp-m-1} = (-)^K\lambda_{1,Sp-1}. \tag{22}$$

通过对(21)及(22)作变换 $m \to Sp - m$，$m \to m - 1$，可以看出，二者等价于

$$\lambda_{m,Sp-m} = (-)^K\lambda_{1,Sp-1}. \tag{23}$$

其中，$2m - 2 = Kp$，K，S 取整数。注意，若 $S = 0$，则 $\lambda_{1,Sp-1} = \lambda_{1,-1} = 0$。

这样，求解(20)式，关键在于讨论其左边项及右边第一项均不为零的情况。这时，存在着关系式：

$$m \neq K_1p + 1,\ 2m \neq K_2p - 2;\ 2m \neq K_3p,\ m \neq K_4p - 2. \tag{24}$$

其中，$K_i(i = 1,2,3,4)$，m 均为整数。下面将按 p 的取值情况作具体分析：

首先，$p = 3,4,6$。此时，满足不等式组(24)式的 m 是不存在的。于是，由(20)式仅

得出(23)式,因而其中心项可表示为:

$$c_{(n,m)}=\frac{c}{12}n(n^2-1)q^{n-m}\delta^0_{n-m}\mathrm{mod}(p)\delta^0_{n+m}+(-)^{\frac{2n-2}{p}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)\delta^0_{2n-2}\mathrm{mod}(p)$$

$$-(-)^{\frac{2m-2}{p}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)\delta^0_{2m-2}\mathrm{mod}(p)\cdot(1-\delta^0_{p-4}); \tag{25}$$

其中 c 由(19)式给出.

量子 Virasoro 代数的对易式为:

$$[L_n,L_m]=a_{n-m}L_{n+m}+c_{(n,m)}.$$

其中 a_{n-m} 及 $c_{(n,m)}$ 分别由(8)及(25)表示.

其次, $p=5$;由不等式组(24)知, $m=2+5K$ (K 取整数),利用(20)式有:

$$\lambda_{5K+2,5S-5K-2}=-\lambda_{5K+3,5S-5K-3}. \tag{26}$$

从而,中心项为:

$$c_{(n,m)}=\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta^0_n\mathrm{mod}(5)\delta^0_{n+m}+(-)^{\frac{2n-2}{5}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(5)$$

$$\cdot\delta^0_{2n-2}\mathrm{mod}(5)-(-)^{\frac{2m-2}{5}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(5)\delta^0_{2m-2}\mathrm{mod}(5)$$
$$+\lambda_{n,m}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(5)(\delta^2_n\mathrm{mod}(5)+\delta^3_n\mathrm{mod}(5)). \tag{27}$$

其中 c 由(19)给出. 这里的 $\lambda_{n,m}$ 具有性质:

$$\lambda_{n,m}=-\lambda_{n-1,m+1}\quad 当\ \delta^3_n\mathrm{mod}(5)\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(5)=1\ 时.$$
$$\lambda_{n,m}=-\lambda_{n+1,m-1}\quad 当\ \delta^2_n\mathrm{mod}(5)\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(5)=1\ 时.$$

在(26)中,若引入附加条件:

$$\lambda_{5K+2,5S-5K-2}=-\lambda_{5K+3\,5S-5K-3}=\lambda_{1,5S-1}. \tag{26'}$$

(27)可写为:

$$c_{(n,m)}=\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta^0_n\mathrm{mod}(5)\delta^0_{n+m}+\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(15)$$

$$\cdot(\delta^{1,2}_n\mathrm{mod}\,(5)-\delta^{3,4}_n\mathrm{mod}(5)); \tag{27'}$$

其中 $\delta^{k,l}_n\mathrm{mod}(p)=\delta^k_n\mathrm{mod}(p)+\delta^l_n\mathrm{mod}(p)$.

再者, $p\geqslant 8$ 且为偶数;由不等式组(24)知,(20)式给出关系式:

$$(q^{m+1}+q^{-m-1})[m-1]\lambda_{m+1,Sp-m-1}=(q^m+q^{-m})[m+2]\lambda_{m,Sp-m}$$
$$-(q+q^{-1})[2m+1]\lambda_{1,Sp-1}. \tag{28}$$

其中, $m=Kp+r$; $r=2,3,\cdots,\frac{p}{2}-2$.

若 $m=Kp+\frac{p}{2}-1$, 即 $\delta^0_{2m+2}\mathrm{mod}(p)=1$, 由(21)得:

$$\lambda_{Kp+\frac{p}{2}-1,Sp-Kp-\frac{p}{2}+1}=\lambda_{1,Sp-1}. \tag{29}$$

利用数学归纳法容易证明,(28)的解可表示为:

$$\lambda_{Kp+r,Sp-Kp-r}=-\lambda_{1,Sp-1}\sum_{n=1}^{\frac{p}{2}-r}q^{4n+2r-2}, \tag{30}$$

其中，$r=2,3,\cdots,\frac{p}{2}-2$.

于是，$c_{(n,m)}$ 可表示为：

$$c_{(n,m)}=\frac{c}{12}n(n^2-1)q^{n-m}\delta^0_{n-m}\mathrm{mod}(p)\delta^0_{n+m}+(-)^{\frac{2n-2}{p}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)$$

$$\cdot\,\delta^0_{2n-2}\mathrm{mod}(p)-(-)^{\frac{2m-2}{p}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)\delta^0_{2m-2}\mathrm{mod}(p)$$

$$+\lambda_{1,n+m-1}\left(\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-r}q^{4k+2r-2}\right)\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)(\delta^0_{m-r}\mathrm{mod}(p)-\delta^0_{n-r}\mathrm{mod}(p)),\quad(31)$$

其中，$r=2,3,\cdots,\frac{p}{2}-2$；$c$ 由(19)给出.

类似地，当 $p\geqslant7$ 且为奇数时，若约定 $\sum\limits_{i=a>b}^{b}x_i\equiv0$，可以得到：

$$\lambda_{Kp+\frac{p-1}{2}+1,Sp-Kp-\frac{p-1}{2}-1}=-\lambda_{Kp+\frac{p-1}{2},Sp-Kp-\frac{p-1}{2}}.\quad(32)$$

$$\lambda_{Kp+r,Sp-Kp-r}=\frac{q^2+q^{-2}}{q^r+q^{-r}}\cdot\frac{[r+1][r][r-1]}{[3]!}\lambda_{Kp+2,Sp-Kp-2}$$

$$-\frac{q+q^{-1}}{q^r+q^{-r}}\lambda_{1,Sp-1}\sum_{i=1}^{r-2}\frac{[r+1]![r-i-2]![2r-2i+1]}{[r-2]![r-i+2]!};\quad(33)$$

也就是：

$$c_{(n,m)}=\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta^0_n\mathrm{mod}(p)\delta^0_{n+m}+(-)^{\frac{2n-2}{p}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)\delta^0_{2n-2}\mathrm{mod}(p)$$

$$-(-)^{\frac{2m-2}{p}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)\delta^0_{2m-2}\mathrm{mod}(p)$$

$$+\left(\frac{q^2+q^{-2}}{q^r+q^{-r}}\cdot\frac{[r+1][r][r-1]}{[3]!}\cdot\lambda_{t-r+2,Sp-t+r-2}\right.$$

$$\left.-\frac{q+q^{-1}}{q^r+q^{-r}}\lambda_{1,Sp-1}\sum_{i=1}^{r-2}\frac{[r+1]![r-i-2]![2r-2i+1]}{[r-2]![r-i+2]!}\right)$$

$$\cdot\,\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)\delta^r_t\mathrm{mod}(p)(\delta^0_{n-t}-\delta^0_{m-t});\quad(34)$$

其中，$r=2,3,4,\cdots,\frac{p-1}{2}$. t 为使上式紧凑起见而引入的参数.

四、$c_{(n,m)}$ 的一般表达式

定义阶跃函数　$\theta_{(x)}=\begin{cases}1; & x>0\\ 0; & x<0\end{cases}$

把(25)、(27)、(31)及(34)合写起来，就得到 $p\geqslant3$ 时 $c_{(n,m)}$ 的一般表达式：

$$c_{(n,m)}=\frac{c}{12}n(n^2-1)q^{n-m}\delta^0_{n-m}\mathrm{mod}(p)+\lambda_{n,m}\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p). \tag{35}$$

并且:

$$\begin{aligned}\lambda_{n,m}=&(-)^{\frac{2n-2}{p}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{2n-2}\mathrm{mod}(p)-(-)^{\frac{2m-2}{p}}\lambda_{1,n+m-1}\delta^0_{2m-2}\mathrm{mod}(p)(1-\delta^0_{p-4})\\&+\frac{1+(-)^p}{2}\cdot\theta_{(p-7)}\lambda_{1,n+m-1}\left(\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-r'}q^{4K+2r'-2}\right)\delta^0_{n+m}\mathrm{mod}(p)(\delta^0_{m-r'}\mathrm{mod}(p)\\&-\delta^0_{n-r'}\mathrm{mod}(p))+\frac{1-(-)^p}{2}\theta_{(p-4)}\left(\frac{q^2+q^{-2}}{q^r+q^{-r}}\cdot\frac{[r+1][r][r-1]}{[3]!}\right.\\&\cdot\lambda_{t-r+2,sp-t+r-2}-\frac{q+q^{-1}}{q^r+q^{-r}}\\&\left.\cdot\lambda_{1,sp-1}\sum_{i=1}^{r-2}\frac{[r+1]![r-i-2]![2r-2i+1]}{[r-2]![r-i+2]!}\right)\\&\cdot\delta^0_{t-r}\mathrm{mod}(p)(\delta^0_{n-t}-\delta^0_{m-t});\end{aligned} \tag{36}$$

其中，c 由(19)表示. $r'=2,3,\cdots,\frac{p}{2}-2$; $r=2,3,\cdots,\frac{p-1}{2}$. 这样，量子 Virasoro 代数的对易式为:

$$[L_n,L_m]=a_{n-m}L_{n+m}+c_{(n,m)}.$$

其中，a_{n-m} 由(8)式给出，$c_{(n,m)}$ 由(35—36)表示.

衷心感谢侯伯宇教授、王佩教授对本工作的讨论.

参 考 文 献

[1] L. D. Faddeev, in: Les Houches Lectures 1982 (Elsevier, Amsterdam 1984).

[2] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Lecture Notes in Physics*, **151**(1982), 61.

[3] V. Drinfeld, *Sov. Math. Dokl.*, **32**(1985), 254.

[4] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63; **11**(1986), 247.

[5] E. Witten, Institute for Advanced Study preprint IASSNS-HEP-89/32; *Nucl. Phys.*, **B330**(1990), 285.

[6] M. Jimbo, *Int. J. Mod. Phys.*, **A4**(1989), 3759.

[7] M. Rosso, *Commun. Math. Phys.*, **117**(1988), 581.

[8] P. Roche and D. Arnaudon, *Lett. Math. Phys.*, **17**(1989), 295.

[9] L. Avarez-Gaume, C. Gomez and G. Sierra, *Phys. Lett.*, **B220**(1989), 142; *Nucl. Phys.*, **B319**(1989), 155.

[10] Bo-Yu Hou, Bo-Yan Hou and Z. Q. Ma, *Commun. Theor. Phys.*, **13**(1990), 181; **13**(1990), 341.

[11] P. Kulish and N. Reshetikhih, *Lett. Math. Phys.*, **18**(1989), 143.

[12] T. Curtright and C. Zachos, *Phys. Lett.*, **B243**(1990), 237.

[13] C. Zachos, preprint ANL-HEP-PR-90-61; ANL-HEP-CP-90-43.

[14] L. Liao and X. C. Song, *Commun. Theor. Phys.*, **13**(1990), 209.

[15] M. Chaichian, P. Kulish and J. Lukierski, *Phys. Lett.*, **B237**(1990), 401.

[16] N. Aizawa and H. Sato, preprint HUPD-9012 July (1990).

[17] P. P. Martin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**(1988), 577.

[18] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou and Z. Q. Ma, preprint BIHEP-TH-90-31.

[19] V. Pasquier and H. Saleur, *Nucl. Phys.*, **B330**(1990), 523.

[20] P. Goddard and D. Olive, *Int. J. Mod. Phys.*, **A1**(1986), 303.